球面の方程式クイズ

$\boxed{1}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 中心が点 $(1,\ -1,\ 3)$，半径が 2

(2) 2 点 $(2,\ 0,\ 3)$，$(-2,\ 4,\ 1)$ を直径の両端とする

解答 (1) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$ (2) $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$

解説

(1) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$

(2) 求める球面の中心は，2 点 $(2,\ 0,\ 3)$，$(-2,\ 4,\ 1)$ を結ぶ線分の中点であるから

$\left(\dfrac{2-2}{2},\ \dfrac{0+4}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$ すなわち $(0,\ 2,\ 2)$

半径 r は中心と点 $(2,\ 0,\ 3)$ の距離であるから

$r^2=(2-0)^2+(0-2)^2+(3-2)^2=9$

よって，求める球面の方程式は

$x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$

$\boxed{2}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 中心が原点，半径が 3 (2) 中心が点 $(1,\ -2,\ 0)$，半径が 4

(3) 2 点 $(-1,\ 1,\ 4)$，$(5,\ -3,\ 2)$ を直径の両端とする

解答 (1) $x^2+y^2+z^2=9$ (2) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$

(3) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$

解説

(1) $x^2+y^2+z^2=9$

(2) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$

(3) 求める球面の中心は，2 点 $(-1,\ 1,\ 4)$，$(5,\ -3,\ 2)$ を結ぶ線分の中点であるから

$\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{1-3}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)$ すなわち $(2,\ -1,\ 3)$

半径 r は中心と点 $(-1,\ 1,\ 4)$ の距離であるから

$r^2=(-1-2)^2+(1+1)^2+(4-3)^2=14$

よって，求める球面の方程式は

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$

$\boxed{3}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 A $(1,\ -2,\ 3)$ を中心とし，点 B $(3,\ 1,\ 0)$ を通る球面

(2) 点 $(2,\ 1,\ 1)$ を通り，3 つの座標平面に接する球面

解答 (1) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=22$

(2) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$

解説

(1) 求める球面の方程式は

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=r^2$

とおける。

点 $(3,\ 1,\ 0)$ を通るから

$(3-1)^2+(1+2)^2+(0-3)^2=r^2$

よって $r^2=22$

したがって，求める球面の方程式は

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=22$

(2) 求める球面の方程式は，3 つの座標平面に接し，$x>0$，$y>0$，$z>0$ の点を通ることから，球面の半径を r とすると

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

とおける。

これが点 $(2,\ 1,\ 1)$ を通るためには

$(2-r)^2+(1-r)^2+(1-r)^2=r^2$

整理して $r^2-4r+3=0$

これを解いて $r=1,\ 3$

よって，求める球面の方程式は

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$

$\boxed{4}$ 次の球面の方程式を求めよ。[各 15 点]

(1) 点 C $(1,\ 2,\ -3)$ を中心とし，yz 平面に接する球面

(2) 点 C $(-3,\ 2,\ -1)$ を中心とし，原点を通る球面

解答 (1) 球面は yz 平面に接しているので，半径は 1 である。

よって $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$

(2) 球面は原点を通るので，半径は $\mathrm{OC}=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$

よって $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=14$

解説

(1) 球面は yz 平面に接しているので，半径は 1 である。

よって $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$

(2) 球面は原点を通るので，半径は $\mathrm{OC}=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$

よって $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=14$

$\boxed{5}$ 次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。

(1) 2 点 A $(6,\ 3,\ 2)$，B $(-2,\ -7,\ 8)$ を直径の両端とする。

(2) 点 $(5,\ -1,\ 4)$ を通り，3 つの座標平面に接する。

解答 (1) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=50$

(2) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-7)^2+(y+7)^2+(z-7)^2=49$

解説

(1) この球面の中心 C は直径 AB の中点であるから

$\mathrm{C}\left(\dfrac{6-2}{2},\ \dfrac{3-7}{2},\ \dfrac{2+8}{2}\right)$ すなわち $\mathrm{C}(2,\ -2,\ 5)$

また，球面の半径を r とすると $r^2=\mathrm{AC}^2=(2-6)^2+(-2-3)^2+(5-2)^2=50$

よって $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=50$

(2) 球面が各座標平面に接し，かつ点 $(5,\ -1,\ 4)$ を通ることから，半径を r とすると，中心の座標は $(r,\ -r,\ r)$ と表される。

ゆえに，球面の方程式は $(x-r)^2+(y+r)^2+(z-r)^2=r^2$

点 $(5,\ -1,\ 4)$ を通るから $(5-r)^2+(-1+r)^2+(4-r)^2=r^2$

よって $r^2-10r+21=0$ ゆえに $(r-3)(r-7)=0$

したがって $r=3,\ 7$ ($r>0$ を満たす。)

よって $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-7)^2+(y+7)^2+(z-7)^2=49$

$\boxed{6}$ 次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。

(1) 直径の両端が 2 点 $(1,\ -4,\ 3)$，$(3,\ 0,\ 1)$ である。

(2) 点 $(-2,\ 1,\ -1)$ を通り，3 つの座標平面に接する。

解答 (1) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=6$

(2) $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$ または $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$

解説

(1) 球面の中心は 2 点を結ぶ線分の中点であるから

$\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{-4+0}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$ すなわち $(2,\ -2,\ 2)$

また，球面の半径を r とすると $r^2=(2-1)^2+(-2+4)^2+(2-3)^2=6$

よって $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=6$

(2) 球面が 3 つの座標平面に接し，点 $(-2,\ 1,\ -1)$ を通ることから，

半径を r とすると中心の座標は $(-r,\ r,\ -r)$ と表される。

ゆえに，球面の方程式は $(x+r)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=r^2$

点 $(-2,\ 1,\ -1)$ を通るから $(-2+r)^2+(1-r)^2+(-1+r)^2=r^2$

整理すると $r^2-4r+3=0$ ゆえに $(r-1)(r-3)=0$

したがって $r=1,\ 3$

よって，求める球面の方程式は

$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$ または $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$

$\boxed{7}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 中心が点 $(1,\ -3,\ 5)$，半径が 2 の球面

(2) 原点を中心とし，点 A $(3,\ -6,\ -2)$ を通る球面

(3) 2 点 A $(2,\ -1,\ 3)$，B $(4,\ 5,\ -7)$ を直径の両端とする球面

解答 (1) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=4$ (2) $x^2+y^2+z^2=49$

(3) $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=35$

解説

(1) $(x-1)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-5)^2=2^2$

すなわち $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=4$

(2) 原点を O とすると，この球面の半径は OA

ここで $\mathrm{OA}^2=3^2+(-6)^2+(-2)^2=49$

よって，球面の方程式は $x^2+y^2+z^2=49$

(3) 球面の中心を C とする。

線分 AB の中点が C であるから，C の座標は $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{3-7}{2}\right)$

すなわち $(3,\ 2,\ -2)$

また，球面の半径は CA であり $\mathrm{CA}^2=(2-3)^2+(-1-2)^2+(3+2)^2=35$

よって，球面の方程式は $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=35$

$\boxed{8}$ 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(4,\ 2,\ 2)$ を通り，3 つの座標平面に接する球面

(2) 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面

解答　(1)　$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$，$(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=36$

(2)　$x^2+y^2+z^2-3x-4y+z=0$

解説

(1)　求める球面の半径を r $(r>0)$ とする。

この球面が点 $(4,\ 2,\ 2)$ を通り，3 つの座標平面に接することから，球面の中心の座標は $(r,\ r,\ r)$ となる。

したがって，球面の方程式は　　$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

この球面が点 $(4,\ 2,\ 2)$ を通ることから　　$(4-r)^2+(2-r)^2+(2-r)^2=r^2$

展開して整理すると　　$r^2-8r+12=0$

これを解いて　　$r=2,\ 6$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4,\ (x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=36$$

(2)　求める球面の方程式を $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ とおく。

この球面が 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ -1)$ を通ることから

$$D=0$$
$$9+3A+D=0$$
$$16+4B+D=0$$
$$1-C+D=0$$

これを解いて　　$A=-3$，$B=-4$，$C=1$，$D=0$

よって，求める球面の方程式は　　$x^2+y^2+z^2-3x-4y+z=0$

参考　(2) の方程式を変形すると　　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$

9　点 P$(-1,\ 1,\ -1)$ を通り，xy 平面と交わってできる図形が，中心 $(-1,\ 1,\ 0)$，半径 $\sqrt{5}$ の円である球面の方程式を求めよ。

解答　$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

解説

球面の中心は，与えられた円の中心 $(-1,\ 1,\ 0)$ を通る xy 平面に垂直な直線上にあるから，その座標は $(-1,\ 1,\ c)$ とおける。

球面の半径を r とすると，求める球面の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

この球面が xy 平面 $z=0$ と交わってできる図形の方程式は

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(0-c)^2=r^2,\ z=0$$

すなわち　　$(x+1)^2+(y-1)^2=r^2-c^2$，$z=0$

この方程式が xy 平面上の半径が $\sqrt{5}$ の円を表すから　　$r^2-c^2=5$　……②

また，① が点 $(-1,\ 1,\ -1)$ を通ることから　　$(-1-c)^2=r^2$　……③

②，③ を解いて　　$c=2$，$r^2=9$

したがって，求める球面の方程式は，① から　　$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$