円の決定クイズ

1 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(4,\ 3)$ を中心とし，原点を通る

(2)　2 点 $(-2,\ -1)$，$(2,\ 3)$ を直径の両端とする

解答　(1)　$(x-4)^2+(y-3)^2=25$　　(2)　$x^2+(y-1)^2=8$

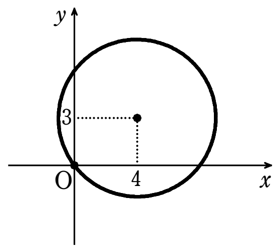
解説

(1)　半径を r とすると，r は中心 $(4,\ 3)$ と原点 $(0,\ 0)$ の距離であるから

$$r^2=(0-4)^2+(0-3)^2$$
$$=25$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$



(2)　中心は 2 点 $(-2,\ -1)$，$(2,\ 3)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

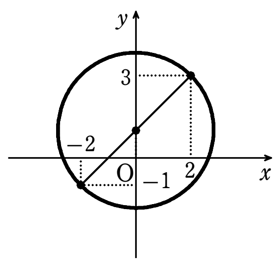
$$\left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$$

すなわち　$(0,\ 1)$

半径を r とすると，r は中心 $(0,\ 1)$ と点 $(2,\ 3)$ の距離であるから

$$r^2=(2-0)^2+(3-1)^2=8$$

よって，求める円の方程式は　$x^2+(y-1)^2=8$



2 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-1,\ 2)$ を中心とし，点 $(2,\ 3)$ を通る

(2)　2 点 $(2,\ 2)$，$(0,\ -6)$ を直径の両端とする

解答　(1)　$(x+1)^2+(y-2)^2=10$　　(2)　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$

解説

(1)　半径を r とすると，r は中心 $(-1,\ 2)$ と点 $(2,\ 3)$ の距離であるから

$$r^2=(2+1)^2+(3-2)^2=10$$

よって，求める円の方程式は　$(x+1)^2+(y-2)^2=10$

(2)　中心は 2 点 $(2,\ 2)$，$(0,\ -6)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

$$\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{2-6}{2}\right)$$　すなわち　$(1,\ -2)$

半径を r とすると，r は中心 $(1,\ -2)$ と点 $(2,\ 2)$ の距離であるから

$$r^2=(2-1)^2+(2+2)^2=17$$

よって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$

3 3 点 A $(-1,\ 7)$，B $(2,\ -2)$，C $(6,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

解説

求める円の方程式を

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

とすると，この円が，A $(-1,\ 7)$ を通るから

$$(-1)^2+7^2-l+7m+n=0$$

B $(2,\ -2)$ を通るから

$$2^2+(-2)^2+2l-2m+n=0$$

C $(6,\ 0)$ を通るから

$$6^2+0^2+6l+0m+n=0$$

これらを整理すると

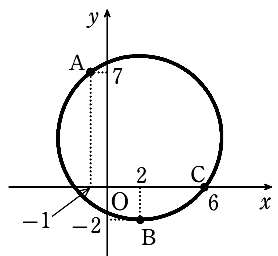
$$l-7m-n=50,\ 2l-2m+n=-8,\ 6l+n=-36$$

これを解いて

$$l=-4,\ m=-6,\ n=-12$$

よって，求める円の方程式は

$$x^2+y^2-4x-6y-12=0$$



4 3 点 A $(-1,\ 0)$，B $(2,\ 1)$，C $(3,\ -2)$ がある。

(1)　3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

解答　(1)　$x^2+y^2-2x+2y-3=0$

(2)　外心の座標は $(1,\ -1)$，外接円の半径は $\sqrt{5}$

解説

(1)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とすると，この円が点 A $(-1,\ 0)$ を通るから　$(-1)^2+0^2-l+0\cdot m+n=0$

点 B $(2,\ 1)$ を通るから　$2^2+1^2+2l+m+n=0$

点 C $(3,\ -2)$ を通るから　$3^2+(-2)^2+3l-2m+n=0$

この 3 つの式を整理すると

$$l-n=1,\ 2l+m+n=-5,\ 3l-2m+n=-13$$

これを解いて　$l=-2,\ m=2,\ n=-3$

よって　$x^2+y^2-2x+2y-3=0$

(2)　(1)で求めた円は，3 点 A $(-1,\ 0)$，B $(2,\ 1)$，C $(3,\ -2)$ を頂点とする△ABC の外接円である。

その方程式 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$ は　$(x-1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{5})^2$

と変形されるから，外心の座標は $(1,\ -1)$，外接円の半径は $\sqrt{5}$ である。

5 中心が点 $(4,\ 3)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=1$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ。

解答　$(x-4)^2+(y-3)^2=16$

解説

円 $x^2+y^2=1$ は，中心が原点，半径が 1 の円である。

2 つの円の中心間の距離は

$$\sqrt{4^2+3^2}=5$$

2 つの円が外接するとき，円 C の半径を r とすると

$$5=r+1$$

ゆえに　$r=5-1=4$

よって，円 C の方程式は

$$(x-4)^2+(y-3)^2=16$$

6 中心が点 $(4,\ 2)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=5$ が内接するとき，円 C の方程式を求めよ。

解答　$(x-4)^2+(y-2)^2=45$

解説

円 $x^2+y^2=5$ は，中心が原点，半径が $\sqrt{5}$ の円である。

2 つの円の中心間の距離は

$$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

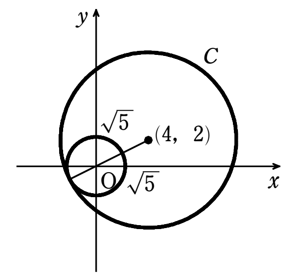
2 つの円が内接するとき，円 C の半径を r とすると

$$2\sqrt{5}=r-\sqrt{5}$$

ゆえに　$r=3\sqrt{5}$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-2)^2=45$$



7 2 つの円

$$x^2+y^2=5 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+y^2-6x-2y+5=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の交点 A，B と点 $(0,\ 3)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　中心は点 $(-3,\ -1)$，半径は 5

解説

k を定数として

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

とすると，③ は 2 つの円 ①，② の交点 A，B を通る図形を表す。③ が点 $(0,\ 3)$ を通るとすると，③ に $x=0$，$y=3$ を代入して　$4k+8=0$

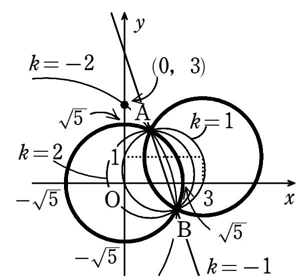
ゆえに　$k=-2$

これを ③ に代入して整理すると

$$x^2+y^2+6x+2y-15=0$$

すなわち　$(x+3)^2+(y+1)^2=5^2$

よって，求める円の中心は点 $(-3,\ -1)$，半径は 5 である。



8 2 つの円 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-4x+2y-6=0$ の 2 つの交点と点 $(1,\ 2)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　中心は $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$，半径は $\frac{5}{2}$

解説

k を定数として

$$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

とすると，① は 2 つの円 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-4x+2y-6=0$ の交点を通る図形を表す。

① が点 $(1,\ 2)$ を通るとすると，① に $x=1$，$y=2$ を代入して

$k-1=0$　　ゆえに　$k=1$

これを ① に代入して整理すると

$$x^2+y^2-2x+y-5=0 \quad すなわち \quad (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

よって，求める円の中心は点 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$，半径は $\frac{5}{2}$ である。

9 3 直線 $x+2=0$，$x-y-4=0$，$x+7y-12=0$ で作られる三角形について，その外接円の半径と外心の座標を求めよ。

解答　順に 5，(1，−2)

解説

$x+2=0$ ……①

$x-y-4=0$ ……②

$x+7y-12=0$ ……③　とする。

① と ② の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} x+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases}$ を解いて

$x=-2,\ y=-6$　すなわち　$(-2,\ -6)$

同様にして，② と ③ の交点の座標は　$(5,\ 1)$

③ と ① の交点の座標は　$(-2,\ 2)$

よって，3 直線 ①，②，③ で作られる三角形の頂点は，3 点 $(-2,\ -6)$，$(5,\ 1)$，$(-2,\ 2)$ である。

外接円の方程式を

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

とおくと，外接円は三角形の 3 つの頂点を通るから

$$\begin{cases} -2l-6m+n+40=0 \\ 5l+m+n+26=0 \\ -2l+2m+n+8=0 \end{cases}$$

これを解いて　$l=-2,\ m=4,\ n=-20$

よって，外接円の方程式は

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0 \quad すなわち \quad (x-1)^2+(y+2)^2=5^2$$

したがって，外接円の半径は 5，外心の座標は $(1,\ -2)$

別解　$x+2=0$ ……①

$x-y-4=0$ ……②

$x+7y-12=0$ ……③

とし，① と ②，② と ③，③ と ① の交点を，それぞれ A，B，C とすると，A $(-2,\ -6)$，B $(5,\ 1)$，C $(-2,\ 2)$ である。

外接円の中心を P $(a,\ b)$ とすると，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ から

$$(a+2)^2+(b+6)^2=(a-5)^2+(b-1)^2$$

すなわち　$a+b+1=0$ ……④

$\mathrm{AP}^2=\mathrm{CP}^2$ から　$(a+2)^2+(b+6)^2=(a+2)^2+(b-2)^2$

すなわち　$b+2=0$ ……⑤

④，⑤から　$a=1,\ b=-2$

よって，外接円の中心は　$(1,\ -2)$

半径は　$\mathrm{AP}=\sqrt{(1+2)^2+(-2+6)^2}=\sqrt{25}=5$

10 次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 1)$ を中心とし，直線 $x+2y+1=0$ に接する円

(2)　円 $x^2+y^2-2x+4y=0$ と中心が同じで，直線 $y=x$ に接する円

(3)　中心が直線 $y=x+1$ 上にあり，x 軸に接して，点 $(3,\ 2)$ を通る円

解答　(1)　$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　　(2)　$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{9}{2}$

(3)　$(x-1)^2+(y-2)^2=4$，$(x-9)^2+(y-10)^2=100$

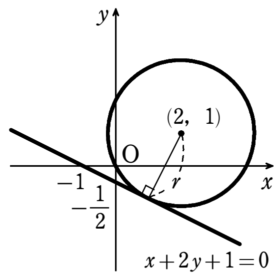
解説

(1)　求める円の半径を r とすると，r は点 $(2,\ 1)$ と直線 $x+2y+1=0$ の距離に等しいから

$$r=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$



(2)　与えられた円の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

よって，求める円の中心は点 $(1,\ -2)$

また，この点と直線 $y=x$ すなわち $x-y=0$ との距離 d が求める円の半径で

$$d=\frac{|1-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

ゆえに，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{9}{2}$

(3)　中心が直線 $y=x+1$ 上にあるから，その座標を $(a,\ a+1)$ とする。

x 軸に接するから，その半径は $|a+1|$ であり，円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$$

とおける。これが点 $(3,\ 2)$ を通るから

$$(3-a)^2+(2-a-1)^2=(a+1)^2$$

すなわち　$a^2-10a+9=0$

これを解くと　$a=1,\ 9$

よって，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4,\ (x-9)^2+(y-10)^2=100$$

別解 1　(1)　中心が $(2,\ 1)$ の円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2 \quad ……①$$

とおける。

$x+2y+1=0$ から　$x=-2y-1$

これを ① に代入して　$(-2y-3)^2+(y-1)^2=r^2$

整理して　$5y^2+10y+10-r^2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=25-5(10-r^2)=5(r^2-5)$$

直線が円に接するための必要十分条件は $D=0$ であるから

$5(r^2-5)=0$　すなわち　$r^2=5$

① から，求める円の方程式は　$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

(2)　与えられた円の方程式を変形すると　$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

ゆえに，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2=r^2 \quad ……②$$

とおける。

$y=x$ を ② に代入すると

$$(x-1)^2+(x+2)^2=r^2$$

整理して　$2x^2+2x+5-r^2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1-2(5-r^2)=2r^2-9$$

直線が円に接するための必要十分条件は $D=0$ であるから

$2r^2-9=0$　すなわち　$r^2=\frac{9}{2}$

② から，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{9}{2}$

別解 2　(1)　中心が $(2,\ 1)$ で半径が r の円

$$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$$

と，接線 $x+2y+1=0$ を，x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると

$x^2+y^2=r^2$ ……①

$x+2y+5=0$ ……②

円 ① 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ で，これが ② と一致するためには

$$x_1=\frac{y_1}{2}=\frac{-r^2}{5},\quad {x_1}^2+{y_1}^2=r^2$$

これらから

$$\left(-\frac{1}{5}r^2\right)^2+\left(-\frac{2}{5}r^2\right)^2=r^2 \quad すなわち \quad r^2(r^2-5)=0$$

$r^2>0$ より　$r^2=5$

よって，求める円の方程式は　$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

11 中心が点 $(3,\ 3)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=2$ が接するとき，円 C の方程式を求めよ。

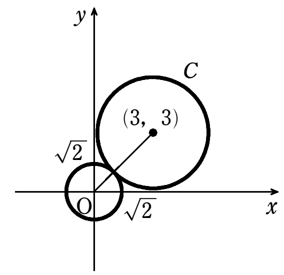
解答　$(x-3)^2+(y-3)^2=8$，$(x-3)^2+(y-3)^2=32$

解説

円 $x^2+y^2=2$ は，中心が原点，半径が $\sqrt{2}$ の円である。

2 つの円の中心間の距離は　$\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

2 つの円が接するのは，外接するときと内接するときがある。



2 つの円が外接するとき，円 C の半径を r_1 とすると

$$3\sqrt{2}=r_1+\sqrt{2}$$

ゆえに　$r_1=2\sqrt{2}$

よって，円 C の方程式は

$$(x-3)^2+(y-3)^2=8$$

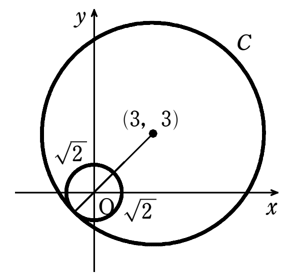
2 つの円が内接するとき，円 C の半径を r_2 とすると

$$3\sqrt{2}=r_2-\sqrt{2}$$

ゆえに　$r_2=4\sqrt{2}$

よって，円 C の方程式は

$$(x-3)^2+(y-3)^2=32$$



以上から，円 C の方程式は

$$(x-3)^2+(y-3)^2=8,\ (x-3)^2+(y-3)^2=32$$

12 円 $x^2+y^2-x-y-2=0$ と直線 $3x+y-2=0$ の 2 つの交点および原点を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　中心 $(2,\ 1)$，半径 $\sqrt{5}$

解説

$x^2+y^2-x-y-2=0$ ……①

$3x+y-2=0$ ……②

とする。k を定数として

$k(3x+y-2)+(x^2+y^2-x-y-2)=0$ ……③

とすると，③ は円 ① と直線 ② の交点を通る図形を表す。

③ が原点 (0，0) を通るとすると，③ に $x=0$，$y=0$ を代入して

$-2k-2=0$　　ゆえに　　$k=-1$

これを ③ に代入して

$-(3x+y-2)+(x^2+y^2-x-y-2)=0$

整理すると

$x^2+y^2-4x-2y=0$　すなわち　$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

よって，求める円の中心は点 (2，1)，半径は $\sqrt{5}$ である。

13 中心が第 1 象限にあって，x 軸，y 軸および直線 $3x+4y-12=0$ に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-6)^2+(y-6)^2=36$

解説

中心が第 1 象限にあって，x 軸，y 軸に接する円の方程式は，半径を r とすると

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$　$(r>0)$

とおける。この円が直線 $3x+4y-12=0$ に接するためには

$\dfrac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$　　すなわち　　$|7r-12|=5r$

両辺を 2 乗して整理すると

$r^2-7r+6=0$　　ゆえに　　$r=1，6$

よって，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-6)^2+(y-6)^2=36$

14 3 点 A (0，−2)，B (1，−1)，C (−3，7) について，次の問いに答えよ。[各 10 点]

(1)　3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

解答　(1)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

この円が A (0，−2)を通るから

$4-2m+n=0$ ……①

B (1，−1) を通るから

$2+l-m+n=0$ ……②

C (−3，7) を通るから

$58-3l+7m+n=0$ ……③

①，②，③ を解いて　　$l=6$，$m=-4$，$n=-12$

よって　　$x^2+y^2+6x-4y-12=0$

(2)　(1) から外接円の方程式は　　$x^2+y^2+6x-4y-12=0$

すなわち　　$(x+3)^2+(y-2)^2=5^2$

よって，外心の座標は (−3，2)，外接円の半径は 5 である。

解説

(1)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

この円が A (0，−2)を通るから

$4-2m+n=0$ ……①

B (1，−1) を通るから

$2+l-m+n=0$ ……②

C (−3，7) を通るから

$58-3l+7m+n=0$ ……③

①，②，③ を解いて　　$l=6$，$m=-4$，$n=-12$

よって　　$x^2+y^2+6x-4y-12=0$

(2)　(1) から外接円の方程式は　　$x^2+y^2+6x-4y-12=0$

すなわち　　$(x+3)^2+(y-2)^2=5^2$

よって，外心の座標は (−3，2)，外接円の半径は 5 である。

15 中心が点 (−6，3) である円 C と，円 $x^2+y^2=20$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ。[20 点]

解答　円 $x^2+y^2=20$ は，中心が原点，半径が $2\sqrt{5}$ の円である。

2 つの円の中心間の距離は　　$\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$

2 つの円が外接するとき，円 C の半径を r とすると

$3\sqrt{5}=r+2\sqrt{5}$　　ゆえに　　$r=\sqrt{5}$

よって，円 C の方程式は　　$(x+6)^2+(y-3)^2=5$

解説

円 $x^2+y^2=20$ は，中心が原点，半径が $2\sqrt{5}$ の円である。

2 つの円の中心間の距離は　　$\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$

2 つの円が外接するとき，円 C の半径を r とすると

$3\sqrt{5}=r+2\sqrt{5}$　　ゆえに　　$r=\sqrt{5}$

よって，円 C の方程式は　　$(x+6)^2+(y-3)^2=5$

16 点 (2，3) を通り，y 軸に接し，更に中心が直線 $y=x+2$ 上にある円の方程式を求めよ。[15 点]

解答　y 軸に接して中心が直線 $y=x+2$ 上にあるから，中心を $(a，a+2)$ とすると，求める円の方程式は

$(x-a)^2+\{y-(a+2)\}^2=a^2$

とおける。これが，点 (2，3) を通るから

$(2-a)^2+(3-a-2)^2=a^2$

$a^2-6a+5=0$ より　　$(a-1)(a-5)=0$

よって　　$a=1，5$

ゆえに　　$(x-1)^2+(y-3)^2=1$，$(x-5)^2+(y-7)^2=25$

解説

y 軸に接して中心が直線 $y=x+2$ 上にあるから，中心を $(a，a+2)$ とすると，求める円の方程式は

$(x-a)^2+\{y-(a+2)\}^2=a^2$

とおける。これが，点 (2，3) を通るから

$(2-a)^2+(3-a-2)^2=a^2$

$a^2-6a+5=0$ より　　$(a-1)(a-5)=0$

よって　　$a=1，5$

ゆえに　　$(x-1)^2+(y-3)^2=1$，$(x-5)^2+(y-7)^2=25$

17 円 $C：x^2+y^2-4x-2y+4=0$ と，点 (−2，1) を中心とする円 D が接しているとき，円 D の方程式を求めよ。[20 点]

解答　円 C の方程式を変形すると　　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

よって，円 C の中心は (2，1)，半径は 1 である。

2 円 C，D の中心間の距離 d は　　$d=|2-(-2)|=4$

ゆえに，円 D の半径を r とすると，

円 C と円 D が外接するとき　　$d=1+r$

よって　　$r=d-1=3$

円 C と円 D が内接するとき　　$d=r-1$

よって　　$r=d+1=5$

したがって，円 D の方程式は

$(x+2)^2+(y-1)^2=9$　または　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

解説

円 C の方程式を変形すると　　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

よって，円 C の中心は (2，1)，半径は 1 である。

2 円 C，D の中心間の距離 d は　　$d=|2-(-2)|=4$

ゆえに，円 D の半径を r とすると，

円 C と円 D が外接するとき　　$d=1+r$

よって　　$r=d-1=3$

円 C と円 D が内接するとき　　$d=r-1$

よって　　$r=d+1=5$

したがって，円 D の方程式は

$(x+2)^2+(y-1)^2=9$　または　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

18 2 つの円 $x^2+y^2=16$，$x^2+y^2-2x-y-20=0$ の共有点と原点を通る円の中心と半径を求めよ。[25 点]

解答　$x^2+y^2=16$ ……①　$x^2+y^2-2x-y-20=0$ ……②

k を定数とすると，方程式

$k(x^2+y^2-16)+x^2+y^2-2x-y-20=0$ ……③

は，①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

③ が原点を通るとき，③ に $x=0$，$y=0$ を代入した等式が成り立つから

$-16k-20=0$　　ゆえに　　$k=-\dfrac{5}{4}$

これを ③ に代入して，両辺に -4 を掛けると

$5(x^2+y^2-16)-4(x^2+y^2-2x-y-20)=0$

$x^2+y^2+8x+4y=0$

よって　　$(x+4)^2+(y+2)^2=20$

ゆえに　　中心 (−4，−2)，半径 $2\sqrt{5}$

解説

$x^2+y^2=16$ ……①　$x^2+y^2-2x-y-20=0$ ……②

k を定数とすると，方程式

$k(x^2+y^2-16)+x^2+y^2-2x-y-20=0$ ……③

は，①，② の 2 つの交点を通る図形を表す。

③ が原点を通るとき，③ に $x=0$，$y=0$ を代入した等式が成り立つから

$-16k-20=0$　　ゆえに　　$k=-\dfrac{5}{4}$

これを ③ に代入して，両辺に -4 を掛けると

$5(x^2+y^2-16)-4(x^2+y^2-2x-y-20)=0$

$x^2+y^2+8x+4y=0$

よって　　$(x+4)^2+(y+2)^2=20$

ゆえに　　中心 (−4，−2)，半径 $2\sqrt{5}$

19 (1) 点 $(-5,\ 4)$ を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ。
(2) 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 6)$，$\mathrm{B}(3,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

解答 (1) $(x+5)^2+(y-4)^2=41$ (2) $x^2+(y-2)^2=25$

解説

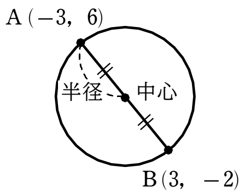
(1) 半径 r は，中心 $(-5,\ 4)$ と原点の距離であるから

$$r^2=(-5)^2+4^2=41$$

したがって，求める円の方程式は $(x+5)^2+(y-4)^2=41$

(2) 中心は直径の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{(-3)+3}{2},\ \frac{6+(-2)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 2)$$



半径 r は中心 $(0,\ 2)$ と点 $\mathrm{A}(-3,\ 6)$ の距離であるから

$$r^2=(-3-0)^2+(6-2)^2=25$$

したがって，求める円の方程式は

$$x^2+(y-2)^2=25$$

20 (1) 点 $(1,\ -7)$ を中心とし，点 $(4,\ -3)$ を通る円の方程式を求めよ。
(2) 2 点 $(-3,\ -4)$，$(5,\ 8)$ が直径の両端である円の方程式を求めよ。

解答 (1) $(x-1)^2+(y+7)^2=25$ (2) $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

解説

(1) 半径 r は中心 $(1,\ -7)$ と点 $(4,\ -3)$ の距離であるから

$$r^2=(4-1)^2+\{-3-(-7)\}^2=25$$

よって，求める円の方程式は $(x-1)^2+(y+7)^2=25$

(2) 中心は直径の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{-4+8}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (1,\ 2)$$

半径 r は中心 $(1,\ 2)$ と点 $(5,\ 8)$ の距離であるから $r^2=(5-1)^2+(8-2)^2=52$

よって，求める円の方程式は $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

21 3 点 $\mathrm{A}(8,\ 5)$，$\mathrm{B}(1,\ -2)$，$\mathrm{C}(9,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答 $x^2+y^2-8x-4y-5=0$

解説

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

この円が $\mathrm{A}(8,\ 5)$ を通るから

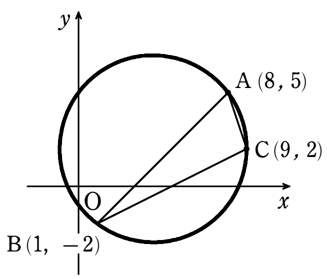
$$8^2+5^2+8l+5m+n=0$$

$\mathrm{B}(1,\ -2)$ を通るから

$$1^2+(-2)^2+l-2m+n=0$$

$\mathrm{C}(9,\ 2)$ を通るから

$$9^2+2^2+9l+2m+n=0$$



これらを整理すると

$$\begin{cases} 8l+5m+n=-89 & \cdots\cdots ① \\ l-2m+n=-5 & \cdots\cdots ② \\ 9l+2m+n=-85 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①～③を連立して解くと $l=-8,\ m=-4,\ n=-5$

よって，求める方程式は $x^2+y^2-8x-4y-5=0$

別解 $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が求める円の中心である。

線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{9}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-x+6 \quad \cdots\cdots ④$$

線分 BC の垂直二等分線の方程式は

$$y-0=-2(x-5) \quad \text{すなわち} \quad y=-2x+10 \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤を連立して解くと $x=4,\ y=2$

ゆえに，外接円の中心は点 $(4,\ 2)$ で，半径は $\sqrt{(8-4)^2+(5-2)^2}=5$

よって，求める方程式は $(x-4)^2+(y-2)^2=25$

22 (1) 3 点 $(-2,\ 6)$，$(1,\ -3)$，$(5,\ -1)$ を通る円の方程式を求めよ。
(2) 3 直線 $x-y+1=0$，$x-3y-1=0$，$x+3y-7=0$ の囲む三角形の外心の座標と外接円の半径を求めよ。

解答 (1) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ (2) 外心の座標 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

与えられた 3 点の座標を代入して

$$40-2l+6m+n=0, \quad 10+l-3m+n=0,$$
$$26+5l-m+n=0$$

この連立方程式を解くと $l=-2,\ m=-4,\ n=-20$

よって，求める方程式は $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

(2) 三角形の頂点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3y-1=0 \\ x+3y-7=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y-7=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

をそれぞれ解いて

$$(x,\ y)=(-2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (1,\ 2)$$

求める外接円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

これが 3 点 $(-2,\ -1)$，$(4,\ 1)$，$(1,\ 2)$ を通るから

$$5-2l-m+n=0, \quad 17+4l+m+n=0, \quad 5+l+2m+n=0$$

この連立方程式を解くと $l=-3,\ m=3,\ n=-8$

よって，外接円の方程式は $x^2+y^2-3x+3y-8=0$

変形すると $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

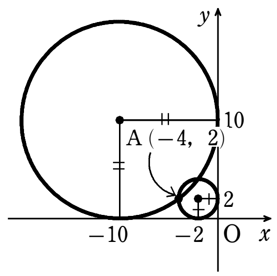
したがって 外心の座標は $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，半径は $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

23 次の円の方程式を求めよ。
(1) x 軸と y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通る。
(2) 点 $(3,\ 4)$ を通り，x 軸に接し，中心が直線 $y=x-1$ 上にある。

解答 (1) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$，$(x+10)^2+(y-10)^2=100$
(2) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$，$(x-11)^2+(y-10)^2=100$

解説

(1) x 軸，y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通る円の中心は第 2 象限にある。



よって，半径を r とすると，中心の座標は $(-r,\ r)$ と表されるから，求める円の方程式は

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$

この円が点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通るから

$$(-4+r)^2+(2-r)^2=r^2$$

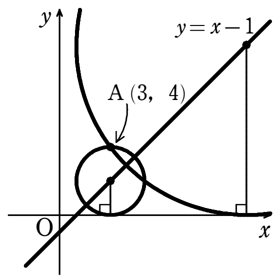
整理して $r^2-12r+20=0$

これを解いて $r=2,\ 10$

ゆえに，求める円の方程式は

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4, \quad (x+10)^2+(y-10)^2=100$$

(2) 中心の座標は $(t,\ t-1)$ とおくことができ，この円が x 軸に接するから，半径は $|t-1|$ と表される。



よって，求める円の方程式は

$$(x-t)^2+\{y-(t-1)\}^2=|t-1|^2$$

この円が点 $(3,\ 4)$ を通るから

$$(3-t)^2+\{4-(t-1)\}^2=(t-1)^2$$

整理して $t^2-14t+33=0$

これを解いて $t=3,\ 11$

ゆえに，求める円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4, \quad (x-11)^2+(y-10)^2=100$$

24 次の円の方程式を求めよ。
(1) 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$，$\mathrm{B}(3,\ 4)$ を通り，中心が直線 $y=2x-9$ 上にある。
(2) 直線 $2x+y-3=0$ 上に中心をもち，x 軸と y 軸に接する。

解答 (1) $(x-4)^2+(y+1)^2=26$ (2) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-3)^2+(y+3)^2=9$

解説

(1) 円の中心は直線 $y=2x-9$ 上にあるから，その座標を $(t,\ 2t-9)$ とし，半径を r とすると，求める円の方程式は $(x-t)^2+(y-2t+9)^2=r^2$ と表される。

2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$，$\mathrm{B}(3,\ 4)$ を通るから

$$(-1-t)^2+(7-2t)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①, \quad (3-t)^2+(13-2t)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①−② から $32t-128=0$ ゆえに $t=4$

① に代入して $r^2=26$

よって，求める円の方程式は $(x-4)^2+(y+1)^2=26$

別解 線分 AB の中点の座標は $(1,\ 1)$

直線 AB の傾きは $\frac{4-(-2)}{3-(-1)}=\frac{3}{2}$

よって，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

これと $y=2x-9$ を連立して解くと $x=4,\ y=-1$

ゆえに，点 $(4,\ -1)$ が円の中心であり，2 点 $(3,\ 4)$，$(4,\ -1)$ の距離 $\sqrt{(4-3)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{26}$ が半径である。

よって，求める円の方程式は $(x-4)^2+(y+1)^2=26$

(2) x 軸，y 軸の両方に接する円の中心は，直線 $y=x$ または直線 $y=-x$ 上にある。

[1] 中心が直線 $y=x$ 上にあるとき

2 直線 $2x+y-3=0$ と $y=x$ の交点の座標は，2 つの方程式を連立して解くと

$$(1,\ 1)$$

ゆえに，求める円の中心の座標は $(1,\ 1)$，半径は 1 である。

よって，その方程式は　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

[2]　中心が直線 $y=-x$ 上にあるとき

2直線 $2x+y-3=0$ と $y=-x$ の交点の座標は，2つの方程式を連立して解くと

$(3,\ -3)$

ゆえに，求める円の中心の座標は $(3,\ -3)$，半径は3である。

よって，その方程式は　$(x-3)^2+(y+3)^2=9$

別解　円の中心は直線 $2x+y-3=0$ 上にあるから，その座標を $(t,\ -2t+3)$ とする。

中心から x 軸，y 軸までの距離は等しいから　$|-2t+3|=|t|$

よって　$-2t+3=\pm t$　　ゆえに　$t=1,\ 3$

$t=1$ のとき　中心 $(1,\ 1)$，半径1

$t=3$ のとき　中心 $(3,\ -3)$，半径3

よって，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\quad (x-3)^2+(y+3)^2=9$

25 2つの円 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$，$x^2+y^2=5$ について

(1)　2円の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2円の2つの交点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　(1)　$x+2y-3=0$　　(2)　中心 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{205}}{8}$

解説

円 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ すなわち $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ は中心が点 $(1,\ 2)$，半径が2の円である。

円 $x^2+y^2=5$ は中心が原点，半径が $\sqrt{5}$ の円である。

2円の中心間の距離は　$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって　$\sqrt{5}-2<\sqrt{5}<\sqrt{5}+2$

ゆえに，この2円は2点で交わる。

次に，k を定数とし，次の方程式が表す図形を考える。

$k(x^2+y^2-5)+x^2+y^2-2x-4y+1=0$　……①

①は，2円の2つの交点を通る直線または円を表す。

(1)　①で $k=-1$ とすると　$-2x-4y+6=0$

これは，x，y の1次方程式で直線を表す。

よって，求める方程式は　$x+2y-3=0$

(2)　①が点 $(1,\ 3)$ を通るとして，$x=1$，$y=3$ を代入すると

$5k-3=0$　　ゆえに　$k=\dfrac{3}{5}$

①に代入して整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{5}{2}y-\dfrac{5}{4}=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{205}{64}$

したがって　中心 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{205}}{8}$

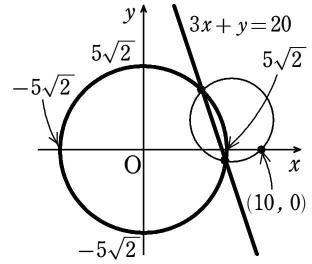
26 円 $x^2+y^2=50$ と直線 $3x+y=20$ の2つの交点と点 $(10,\ 0)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　中心 $\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$，半径 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

解説

円の中心と直線の距離は

$\dfrac{|-20|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}=\sqrt{40}$



円の半径は　$\sqrt{50}$

$\sqrt{40}<\sqrt{50}$ であるから，この円と直線は2点で交わる。

次に，k を定数とし，次の方程式が表す図形を考える。

$x^2+y^2-50+k(3x+y-20)=0$　……①

①は，与えられた円と直線の交点を通る図形を表す。

①が点 $(10,\ 0)$ を通るとして，$x=10$，$y=0$ を代入すると　$50+10k=0$

これを解いて　$k=-5$

①に代入して　$x^2+y^2-50-5(3x+y-20)=0$

整理すると　$x^2+y^2-15x-5y+50=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

したがって　中心 $\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$，半径 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

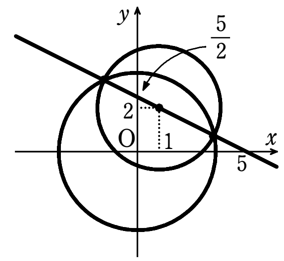
27 円 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ と直線 $x+2y=5$ の2つの交点と点 $(3,\ 2)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{13}$

解説

$x^2+y^2-2x-4y-3=0$ から

$(x-1)^2+(y-2)^2=8$



この円の中心 $(1,\ 2)$ は，直線 $x+2y=5$ 上にある。

したがって，この円と直線は2点で交わる。

次に，k を定数とし，次の方程式が表す図形を考える。

$x^2+y^2-2x-4y-3+k(x+2y-5)=0$　……①

①は，与えられた円と直線の交点を通る図形を表す。

①が点 $(3,\ 2)$ を通るとして，$x=3$，$y=2$ を代入すると

$-4+2k=0$　　これを解いて　$k=2$

①に代入して　$x^2+y^2-2x-4y-3+2(x+2y-5)=0$

整理すると　$x^2+y^2=13$

したがって　中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{13}$

28 次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-2,\ 1)$ を中心とし，点 $(1,\ -3)$ を通る

(2)　2点 $(4,\ -2)$，$(-6,\ 2)$ を直径の両端とする

(3)　点 $(3,\ 4)$ を中心とし，x 軸に接する

解答　(1)　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$　　(2)　$(x+1)^2+y^2=29$　　(3)　$(x-3)^2+(y-4)^2=16$

解説

(1)　半径 r は中心 $(-2,\ 1)$ と点 $(1,\ -3)$ の距離で　$r^2=(1+2)^2+(-3-1)^2=25$

よって，求める円の方程式は　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

(2)　中心は，2点 $(4,\ -2)$，$(-6,\ 2)$ を結ぶ線分の中点である。

その座標は　$\left(\dfrac{4-6}{2},\ \dfrac{-2+2}{2}\right)$　すなわち　$(-1,\ 0)$

半径 r は中心 $(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離で　$r^2=(4+1)^2+(-2-0)^2=29$

よって，求める円の方程式は　$(x+1)^2+y^2=29$

(3)　x 軸に接するとき，中心 $(3,\ 4)$ と x 軸の距離4が半径に等しい。

よって，求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y-4)^2=16$

29 3点 A $(1,\ 1)$，B $(2,\ -1)$，C $(3,\ 2)$ がある。

(1)　3点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

解答　(1)　$x^2+y^2-5x-y+4=0$　　(2)　外心 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

解説

(1)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とすると，この円が，A $(1,\ 1)$ を通るから　$1^2+1^2+l\cdot1+m\cdot1+n=0$

よって　$l+m+n=-2$　……①

B $(2,\ -1)$ を通るから　$2^2+(-1)^2+l\cdot2+m\cdot(-1)+n=0$

よって　$2l-m+n=-5$　……②

C $(3,\ 2)$ を通るから　$3^2+2^2+l\cdot3+m\cdot2+n=0$

よって　$3l+2m+n=-13$　……③

①～③を解いて　$l=-5$，$m=-1$，$n=4$

ゆえに，求める円の方程式は　$x^2+y^2-5x-y+4=0$

(2)　(1)で求めた円は，3点 A $(1,\ 1)$，B $(2,\ -1)$，C $(3,\ 2)$ を頂点とする △ABC の外接円である。

その方程式 $x^2+y^2-5x-y+4=0$ は

$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

と変形されるから，外心の座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ である。

30 次の円の方程式を求めよ。

(1)　円 $x^2+y^2-3x+5y-1=0$ と中心が同じで，点 $(1,\ 2)$ を通る円

(2)　点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ と対称な円

(3)　中心が x 軸上にあり，2点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通る円

(4)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ で点 $(2,\ 1)$ を通る円

(5)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸および y 軸に接する円

(6)　3直線 $x-y=-1$，$x+y=3$，$x+2y=-1$ で作られる三角形の外接円

解答　(1)　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{41}{2}$　　(2)　$(x-2)^2+(y+6)^2=1$

(3)　$(x+2)^2+y^2=50$　　(4)　$(x+1)^2+(y+1)^2=13$，$(x-4)^2+(y-4)^2=13$

(5)　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$　　(6)　$x^2+y^2-6x+4y-7=0$

解説

(1)　$x^2+y^2-3x+5y-1=0$ を変形すると　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{19}{2}$

よって，求める円の中心の座標は　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$

求める円の半径を r とすると　$r^2=\left(1-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(2+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{41}{2}$

したがって，求める円の方程式は　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{41}{2}$

別解　求める円の方程式は $x^2+y^2-3x+5y+n=0$ とおける。

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから　$1^2+2^2-3\cdot1+5\cdot2+n=0$

よって　$n=-12$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x+5y-12=0$

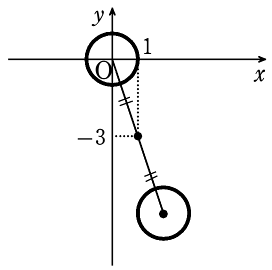
(2)　点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と対称な点の座標を $(p,\ q)$ とすると

$$\frac{p}{2}=1,\ \frac{q}{2}=-3$$

よって　$p=2,\ q=-6$

求める円は，中心 $(p,\ q)$，半径 1 の円であるから，その方程式は

$$(x-2)^2+(y+6)^2=1$$



(3)　中心が x 軸上にあるから，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

とおける。これが 2 点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通るから

$$(3-a)^2+25=r^2,\ (-3-a)^2+49=r^2$$

この 2 式から r^2 を消去して　$(3-a)^2+25=(-3-a)^2+49$

よって　$a=-2$　　このとき　$r^2=50$

したがって，求める円の方程式は　$(x+2)^2+y^2=50$

(4)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ であるから，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-a)^2=13$$

とおける。これが点 $(2,\ 1)$ を通るから　$(2-a)^2+(1-a)^2=13$

よって　$a^2-3a-4=0$　　これを解いて　$a=-1,\ 4$

したがって，求める円の方程式は　$(x+1)^2+(y+1)^2=13,\ (x-4)^2+(y-4)^2=13$

(5)　x 軸，y 軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通るから，円の中心は第 1 象限にある。

円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると，

$a>0,\ b>0$ で　$a=b=r$

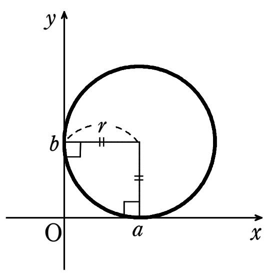
よって，円の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$$

ゆえに　$r^2-6r+5=0$

これを解いて　$r=1,\ 5$



したがって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-5)^2+(y-5)^2=25$

(6)　$x-y=-1$　……①

$x+y=3$　……②

$x+2y=-1$　……③

とする。

2 直線 ①，② の交点の座標は　$(1,\ 2)$

2 直線 ②，③ の交点の座標は　$(7,\ -4)$

2 直線 ③，① の交点の座標は　$(-1,\ 0)$

求める外接円の方程式を

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

とする。これが上で求めた 3 点を通るから

$$1^2+2^2+l\cdot1+m\cdot2+n=0$$
$$7^2+(-4)^2+l\cdot7+m\cdot(-4)+n=0$$
$$(-1)^2+0^2+l\cdot(-1)+m\cdot0+n=0$$

よって　$l+2m+n=-5,\ 7l-4m+n=-65,\ -l+n=-1$

これを解いて　$l=-6,\ m=4,\ n=-7$

ゆえに，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+4y-7=0$

31 次の円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ 0)$ を中心とし，直線 $4x-3y-2=0$ に接する円

(2)　中心が x 軸の上側にあり，x 軸と直線 $x+y=1$ に接し，半径が 3 である円

(3)　中心が直線 $y=3x$ 上にあり，直線 $2x+y=0$ に接し，点 $(2,\ 1)$ を通る円

解答　(1)　$(x-3)^2+y^2=4$

(2)　$(x+2-3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9,\ (x+2+3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$

(3)　$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

解説

(1)　求める円の半径を r とする。

r は円の中心 $(3,\ 0)$ と直線 $4x-3y-2=0$ の距離に等しいから

$$r=\frac{|4\cdot3-3\cdot0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

よって，求める円の方程式は　$(x-3)^2+y^2=4$

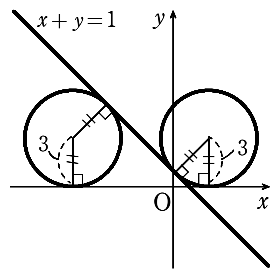
(2)　x 軸に接し，中心が x 軸の上側にあるから，中心の y 座標は半径 3 に等しい。

よって，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-3)^2=9$$

とおける。

この円が直線 $x+y=1$ に接するから，円の中心 $(a,\ 3)$ とこの直線の距離が円の半径 3 に等しい。



よって　$\dfrac{|a+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$　　ゆえに　$|a+2|=3\sqrt{2}$

これを解いて　$a=-2\pm3\sqrt{2}$

したがって，求める円の方程式は

$$(x+2-3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9,\ (x+2+3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$$

(3)　中心が直線 $y=3x$ 上にあるから，その座標は $(a,\ 3a)$ とおける。

直線 $2x+y=0$ に接するから，求める円の半径を r とすると　$r=\dfrac{|2a+3a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}|a|$

よって，求める円の方程式は $(x-a)^2+(y-3a)^2=5a^2$ とおける。

この円が点 $(2,\ 1)$ を通るから　$(2-a)^2+(1-3a)^2=5a^2$

整理すると　$a^2-2a+1=0$

よって　$(a-1)^2=0$　　ゆえに　$a=1$

したがって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

32 次の円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(4,\ 4)$ で，円 $x^2+y^2-2x-3=0$ と外接する円

(2)　中心が点 $(1,\ -2)$ で，円 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ と内接する円

解答　(1)　$(x-4)^2+(y-4)^2=9$　　(2)　$(x-1)^2+(y+2)^2=49$

解説

(1)　$x^2+y^2-2x-3=0$ を変形すると

$$(x-1)^2+y^2=4$$

これは中心が点 $(1,\ 0)$，半径が 2 の円を表す。

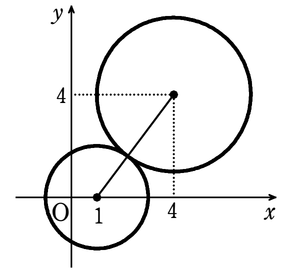
2 つの円の中心間の距離は　$\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$

2 つの円が外接するとき，求める円の半径を r とすると　$5=r+2$

ゆえに　$r=3$

したがって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-4)^2=9$$



(2)　$x^2+y^2+6x-2y+6=0$ を変形すると

$$(x+3)^2+(y-1)^2=4\ \ \cdots\cdots①$$

これは中心が点 $(-3,\ 1)$，半径が 2 の円を表す。

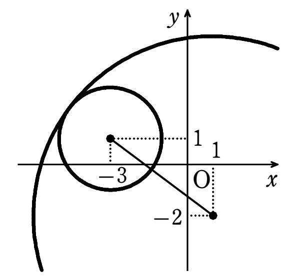
2 つの円の中心間の距離は

$$\sqrt{(1+3)^2+(-2-1)^2}=5$$

求める円の半径を r とすると，この円と円 ① が内接するから　$5=r-2$

ゆえに　$r=7$

したがって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2=49$



33 次の円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(2,\ 2)$ で，円 $x^2+y^2-2y-19=0$ と接する円

(2)　中心が点 $(-1,\ 7)$ で，円 $x^2+y^2-8x+10y+16=0$ と接する円

解答　(1)　$(x-2)^2+(y-2)^2=5,\ (x-2)^2+(y-2)^2=45$

(2)　$(x+1)^2+(y-7)^2=64,\ (x+1)^2+(y-7)^2=324$

解説

(1)　$x^2+y^2-2y-19=0$ を変形すると

$$x^2+(y-1)^2=20\ \ \cdots\cdots①$$

これは中心が点 $(0,\ 1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の円を表す。

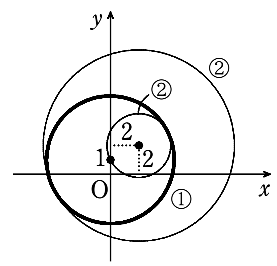
求める円を ② とする。

2 つの円 ①，② の中心間の距離を d とすると

$$d=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

円 ② の中心 $(2,\ 2)$ は円 ① の内部にあるから，

2 つの円が接するのは，次の 2 つの場合がある。



[1]　2 つの円 ①，② が内接し，円 ② の半径が円 ① の半径よりも小さい。

[2]　2 つの円 ①，② が内接し，円 ② の半径が円 ① の半径よりも大きい。

円 ② の半径を r とすると

[1] の場合　$d=2\sqrt{5}-r$　　よって　$r=\sqrt{5}$

[2] の場合　$d=r-2\sqrt{5}$　　よって　$r=3\sqrt{5}$

以上から，求める円の方程式は　$(x-2)^2+(y-2)^2=5,\ (x-2)^2+(y-2)^2=45$

(2)　$x^2+y^2-8x+10y+16=0$ を変形すると　$(x-4)^2+(y+5)^2=25$　……①

これは中心が点 $(4,\ -5)$，半径が 5 の円を表す。

求める円を ② とする。

2 つの円 ①，② の中心間の距離を d とすると

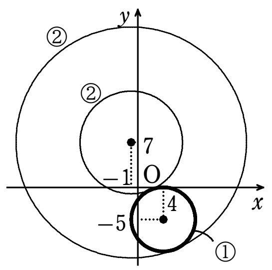
$d=\sqrt{(-1-4)^2+(7+5)^2}=13$

円 ② の中心 $(-1,\ 7)$ は円 ① の外部にあるから，

2 つの円が接するのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　2 つの円 ①，② が外接する。

[2]　2 つの円 ①，② が内接する。



円 ② の半径を r とすると

[1] の場合　$d=5+r$　　よって　$r=8$

[2] の場合　$d=r-5$　　よって　$r=18$

以上から，求める円の方程式は　$(x+1)^2+(y-7)^2=64$，$(x+1)^2+(y-7)^2=324$

34 2 つの円 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ の 2 つの交点と点 $(1,\ -1)$ を通る円の中心と半径を求めよ。また，2 つの円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

解答　中心 $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$；$4x+2y-5=0$

解説

k を定数として

$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$　…… ①

とすると，① は 2 つの円の 2 つの交点を通る図形を表す。

(前半)　① が点 $(1,\ -1)$ を通るとすると，① に $x=1$，$y=-1$ を代入して

$-2k+1=0$　　よって　$k=\dfrac{1}{2}$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{4}{3}y-\dfrac{2}{3}=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{26}{9}$

よって，求める円の中心は点 $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，半径は $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$ である。

(後半)　① が直線であるとき x^2，y^2 の項の係数が 0 となることから　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　$4x+2y-5=0$

35 円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の 2 つの交点と点 $(-1,\ 2)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　中心 $\left(-\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$，半径 $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

解説

k を定数として

$k(7x-y+2)+(x^2+y^2+2x+4y-4)=0$　…… ①

とすると，① は円と直線の 2 つの交点を通る図形を表す。

① が点 $(-1,\ 2)$ を通るとすると，① に $x=-1$，$y=2$ を代入して

$-7k+7=0$　　よって　$k=1$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$

すなわち　$\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{49}{2}$

よって，求める円の中心は点 $\left(-\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$，半径は $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ である。

36 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。

(1)　$(0,\ 0)$，$(1,\ -2)$，$(2,\ 1)$　　　(2)　$(1,\ 1)$，$(5,\ -1)$，$(-3,\ -7)$

解答　(1)　$x^2+y^2-3x+y=0$　　(2)　$x^2+y^2-2x+8y-8=0$

解説

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

(1)　点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0^2+0^2+l\cdot0+m\cdot0+n=0$

点 $(1,\ -2)$ を通るから　$1^2+(-2)^2+l+(-2)m+n=0$

点 $(2,\ 1)$ を通るから　$2^2+1^2+2l+m+n=0$

整理すると　$n=0$

$l-2m+n=-5$

$2l+m+n=-5$

これを解くと　$l=-3$，$m=1$，$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x+y=0$

(2)　点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1^2+1^2+l+m+n=0$

点 $(5,\ -1)$ を通るから　$5^2+(-1)^2+5l+(-1)m+n=0$

点 $(-3,\ -7)$ を通るから　$(-3)^2+(-7)^2+(-3)l+(-7)m+n=0$

整理すると　$l+m+n=-2$

$5l-m+n=-26$

$3l+7m-n=58$

これを解くと　$l=-2$，$m=8$，$n=-8$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x+8y-8=0$

37 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(-2,\ 4)$ で，点 $(3,\ 1)$ を通る円

(2)　3 点 A$(-3,\ 4)$，B$(4,\ 5)$，C$(1,\ -4)$ を頂点とする △ABC の外接円

解答　(1)　$(x+2)^2+(y-4)^2=34$　　(2)　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

解説

(1)　半径は 2 点 $(-2,\ 4)$，$(3,\ 1)$ 間の距離であるから

$\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(1-4)^2}=\sqrt{34}$

よって，求める円の方程式は

$\{x-(-2)\}^2+(y-4)^2=(\sqrt{34})^2$

すなわち　$(x+2)^2+(y-4)^2=34$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

△ABC の外接円は，

点 A を通るから　$(-3)^2+4^2+(-3)l+4m+n=0$

点 B を通るから　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

点 C を通るから　$1^2+(-4)^2+l+(-4)m+n=0$

整理すると　$3l-4m-n=25$

$4l+5m+n=-41$

$l-4m+n=-17$

これを解くと　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

38 2 点 $(-5,\ 1)$，$(2,\ 8)$ を通り，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x+10)^2+(y-13)^2=169$，$(x+2)^2+(y-5)^2=25$

解説

円の中心の座標を $(a,\ b)$ とおく。

x 軸に接するから，円の半径は $|b|$ である。

この円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=|b|^2$

すなわち　$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

点 $(-5,\ 1)$ を通るから　$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2$

よって　$a^2+10a-2b+26=0$　…… ①

点 $(2,\ 8)$ を通るから　$(2-a)^2+(8-b)^2=b^2$

よって　$a^2-4a-16b+68=0$　…… ②

①×8−② から　$7a^2+84a+140=0$

すなわち　$a^2+12a+20=0$

ゆえに，$(a+2)(a+10)=0$ であるから　$a=-10,\ -2$

また，① から　$b=\dfrac{1}{2}(a^2+10a+26)$

この式から，$a=-10$ のとき　$b=13$

$a=-2$ のとき　$b=5$

よって，求める円の方程式は　$(x+10)^2+(y-13)^2=169$，$(x+2)^2+(y-5)^2=25$

参考　x 軸に接し，点 $(-5,\ 1)$，$(2,\ 8)$ を通るから，円の中心は第 1 象限または第 2 象限にあることがわかる。よって，円の中心の座標を $(a,\ b)$ とおくと，$b>0$ であるから，半径は $b\ (=|b|)$ である。