# 動点に伴って動く点の描く図形クイズ

**1** 点 $z$ が，原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 $-4$ と点 $z$ を結ぶ線分の中点 $w$ は，どのような図形を描くか。

解答　点 $-2$ を中心とする半径 1 の円

解説

点 $z$ は中心 O，半径 2 の円上にあるから

$|z|=2$

$w=\dfrac{z-4}{2}$ であるから

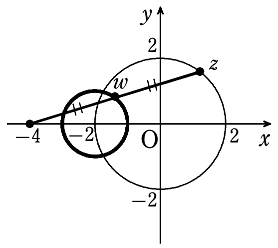
$z=2(w+2)$

よって　$|2(w+2)|=2$

ゆえに　$|w+2|=1$

したがって，点 $w$ は

点 $-2$ を中心とする半径 1 の円を描く。




**2** $w=1+iz$ とする。点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　点 1 を中心とする半径 1 の円

解説

$w=1+iz$ から　$z=\dfrac{w-1}{i}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{w-1}{i}\right|=1$

よって　$|w-1|=1$

ゆえに，点 $w$ は点 1 を中心とする半径 1 の円を描く。

**3** 点 $z$ が点 $\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 $w$ が描く図形を調べてみよう。

点 $z$ は原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上を動くから

$|z|=|z-1|$　……①

$w=\dfrac{1}{z}$ から　$wz=1$

$w\neq 0$ であるから　$z=\dfrac{1}{w}$

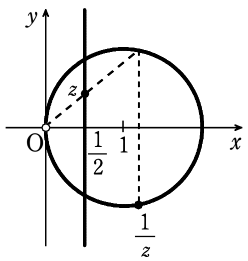
① に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}-1\right|$

両辺に $|w|$ を掛けると　$1=|1-w|$　すなわち　$|w-1|=1$

よって，点 $w$ は点 1 を中心とする半径 1 の円を描く。

ただし，$w\neq 0$ であるから，原点は除く。

解説




**4** 点 $z$ が点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 $w$ は，どのような図形を描くか。

解答　点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円。ただし，原点は除く。

解説

点 $z$ は原点と点 2 を結ぶ線分の垂直二等分線上を動くから

$|z|=|z-2|$　……①

$w=\dfrac{1}{z}$ から　$wz=1$

$w\neq 0$ であるから　$z=\dfrac{1}{w}$

① に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}-2\right|$

両辺に $|w|$ を掛けると　$1=|1-2w|$　すなわち　$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，点 $w$ は点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。

ただし，$w\neq 0$ であるから，原点は除く。

参考　点 $z$ と点 $\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が点 1 であるから　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=1$

すなわち　$z+\overline{z}=2$

これに $z=\dfrac{1}{w}$，$\overline{z}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ を代入すると　$\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{\overline{w}}=2$

よって　$\overline{w}+w=2w\overline{w}$　すなわち　$w\overline{w}-\dfrac{\overline{w}}{2}-\dfrac{w}{2}=0$

ゆえに　$\left(w-\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

したがって　$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|^2=\dfrac{1}{4}$　すなわち　$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

**5** 複素数平面上で，点 $z$ は，点 $-1$ を中心とする半径 1 の円の原点以外の部分を動くとする。このとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　点 $-\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線

解説

点 $z$ は点 $-1$ を中心とする半径 1 の円上を動くから

$|z+1|=1$　……①

$w=\dfrac{1}{z}$ から　$wz=1$　　$w\neq 0$ であるから　$z=\dfrac{1}{w}$

① に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}+1\right|=1$

変形すると　$\left|\dfrac{1+w}{w}\right|=1$　すなわち　$\dfrac{|w+1|}{|w|}=1$

よって　$|w|=|w+1|$

したがって，点 $w$ は，原点と点 $-1$ を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち，

点 $-\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線を描く。

**6** 点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=\dfrac{iz+4}{2}$ を満たす点 $w$ は，どのような図形を描くか。[15 点]

解答　点 $z$ は中心 O，半径 1 の円上にあるから　$|z|=1$

$w=\dfrac{iz+4}{2}$ であるから　$z=\dfrac{2(w-2)}{i}$　よって　$\left|\dfrac{2(w-2)}{i}\right|=1$

ゆえに　$|w-2|=\dfrac{1}{2}$

したがって，点 $w$ は点 2 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。

解説

点 $z$ は中心 O，半径 1 の円上にあるから　$|z|=1$

$w=\dfrac{iz+4}{2}$ であるから　$z=\dfrac{2(w-2)}{i}$　よって　$\left|\dfrac{2(w-2)}{i}\right|=1$

ゆえに　$|w-2|=\dfrac{1}{2}$

したがって，点 $w$ は点 2 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。

**7** 複素数 $z$ が $|z|=1$ のとき，$w=\dfrac{1-iz}{1-z}$ を満たす点 $w$ は，どのような図形を描くか。[15 点]

解答　$w=\dfrac{1-iz}{1-z}$ であるから　$(w-i)z=w-1$　よって　$z=\dfrac{w-1}{w-i}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{w-1}{w-i}\right|=1$　ゆえに　$\dfrac{|w-1|}{|w-i|}=1$

よって　$|w-1|=|w-i|$

したがって，点 $w$ は 2 点 1，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

解説

$w=\dfrac{1-iz}{1-z}$ であるから　$(w-i)z=w-1$　よって　$z=\dfrac{w-1}{w-i}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{w-1}{w-i}\right|=1$　ゆえに　$\dfrac{|w-1|}{|w-i|}=1$

よって　$|w-1|=|w-i|$

したがって，点 $w$ は 2 点 1，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

**8** 点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$ を満たす点 $w$ は，どのような図形を描くか 。[25 点]

解答　$w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$ であるから　$z=\dfrac{w-1}{2(w-3)}$

$|z|=1$ に代入して　$\left|\dfrac{w-1}{2(w-3)}\right|=1$　よって　$|w-1|=2|w-3|$

両辺を 2 乗すると　$|w-1|^2=4|w-3|^2$

ゆえに　$(w-1)(\overline{w}-1)=4(w-3)(\overline{w}-3)$

展開して整理すると　$w\overline{w}-\dfrac{11}{3}(w+\overline{w})+\dfrac{35}{3}=0$

よって　$\left(w-\frac{11}{3}\right)\left(\overline{w}-\frac{11}{3}\right)=\frac{16}{9}$　すなわち　$\left|w-\frac{11}{3}\right|^2=\frac{16}{9}$

ゆえに　$\left|w-\frac{11}{3}\right|=\frac{4}{3}$

したがって，点 $w$ は $\frac{11}{3}$ を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円を描く。

解説

$w=\frac{6z-1}{2z-1}$ であるから　$z=\frac{w-1}{2(w-3)}$

$|z|=1$ に代入して　$\left|\frac{w-1}{2(w-3)}\right|=1$　よって　$|w-1|=2|w-3|$

両辺を 2 乗すると　$|w-1|^2=4|w-3|^2$

ゆえに　$(w-1)(\overline{w}-1)=4(w-3)(\overline{w}-3)$

展開して整理すると　$w\overline{w}-\frac{11}{3}(w+\overline{w})+\frac{35}{3}=0$

よって　$\left(w-\frac{11}{3}\right)\left(\overline{w}-\frac{11}{3}\right)=\frac{16}{9}$　すなわち　$\left|w-\frac{11}{3}\right|^2=\frac{16}{9}$

ゆえに　$\left|w-\frac{11}{3}\right|=\frac{4}{3}$

したがって，点 $w$ は $\frac{11}{3}$ を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円を描く。

9　$w=iz+2$ とする。点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　点 2 を中心とする半径 1 の円

解説

$z$ は等式 $|z|=1$ を満たす。

$w=iz+2$ より $z=\frac{w-2}{i}$ であるから

$$|z|=\left|\frac{w-2}{i}\right|=\frac{|w-2|}{|i|}=|w-2|$$

よって　$|w-2|=1$

したがって，点 $w$ は点 2 を中心とする半径 1 の円を描く。

10　$w=i(z-2)$ とする。点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　点 $-2i$ を中心とする半径 1 の円

解説

$z$ は等式 $|z|=1$ を満たす。

$w=i(z-2)$ より $z=\frac{w+2i}{i}$ であるから

$$|z|=\left|\frac{w+2i}{i}\right|=\frac{|w+2i|}{|i|}=|w+2i|$$

よって　$|w+2i|=1$

したがって，点 $w$ は点 $-2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

11　$w=\overline{z}$ とする。複素数平面上で，点 $z$ が円 $|z-i|=1$ 上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　点 $-i$ を中心とする半径 1 の円

解説

$w=\overline{z}$ より　$z=\overline{w}$

これを $|z-i|=1$ に代入すると　$|\overline{w}-i|=1$

よって　$|\overline{w+i}|=1$　すなわち　$|w+i|=1$

したがって，点 $w$ は点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

12　2 つの複素数 $w$，$z$ が，等式 $w=\frac{z-4}{z+2}$ を満たす。複素数平面上で，点 $w$ が原点を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 $z$ はどのような図形を描くか。

解答　点 $-4$ を中心とする半径 4 の円

解説

$|w|=2$ であるから　$\left|\frac{z-4}{z+2}\right|=2$　すなわち　$|z-4|=2|z+2|$

両辺を 2 乗すると

$|z-4|^2=4|z+2|^2$

$(z-4)(\overline{z}-4)=4(z+2)(\overline{z}+2)$

展開して整理すると

$z\overline{z}+4z+4\overline{z}=0$

$(z+4)(\overline{z}+4)=4^2$

$|z+4|^2=4^2$

よって　$|z+4|=4$

したがって，点 $z$ は点 $-4$ を中心とする半径 4 の円を描く。

13　$w=iz+i$ とする。点 $z$ が点 $i$ を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。　[20点]

解答　$z$ は等式 $|z-i|=1$ を満たす。$w=iz+i$ より $z=\frac{w-i}{i}$ であるから

$|z-i|=\left|\frac{w-i}{i}-i\right|=\frac{|w-i+1|}{|i|}=|w-i+1|$　よって　$|w-(-1+i)|=1$

したがって，点 $w$ は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

解説

$z$ は等式 $|z-i|=1$ を満たす。$w=iz+i$ より $z=\frac{w-i}{i}$ であるから

$|z-i|=\left|\frac{w-i}{i}-i\right|=\frac{|w-i+1|}{|i|}=|w-i+1|$　よって　$|w-(-1+i)|=1$

したがって，点 $w$ は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

14　次の式で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

(1)　点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき　$w=i(z+2)$

(2)　点 $z$ が点 1 を中心とする半径 2 の円上を動くとき　$w=(1+i)z$

解答　(1)　点 $2i$ を中心とする半径 1 の円　(2)　点 $1+i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円

解説

(1)　点 $z$ が満たす方程式は　$|z|=1$　……①

$w=i(z+2)$ から　$z=\frac{w}{i}-2$

① に代入して　$\left|\frac{w}{i}-2\right|=1$

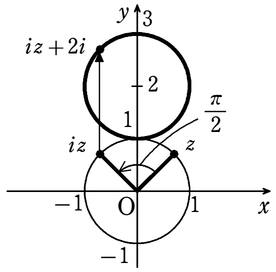
$\frac{|w-2i|}{|i|}=1$ から　$|w-2i|=1$

よって，点 $w$ は点 $2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

参考　$w=i(z+2)$ から　$w=iz+2i$

求める図形は，単位円を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し，虚軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

よって，点 $w$ は点 $2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。




(2)　点 $z$ が満たす方程式は　$|z-1|=2$　……①

$w=(1+i)z$ から　$z=\frac{w}{1+i}$　① に代入して　$\left|\frac{w}{1+i}-1\right|=2$

$\frac{|w-(1+i)|}{|1+i|}=2$ から　$|w-(1+i)|=2\sqrt{2}$

よって，点 $w$ は 点 $1+i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円を描く。

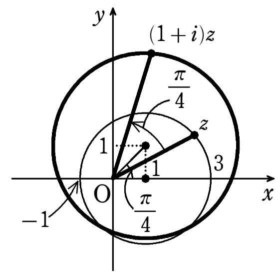
参考　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから，点

$(1+i)z$ は，点 $z$ を，原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

ゆえに，円 $|z-1|=2$ の中心である点 1 は点 $1+i$ に移り，円の半径は $2\sqrt{2}$ となる。

よって，点 $w$ が描く図形は

点 $1+i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円




15　次の式で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

(1)　点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき　$w=3-iz$

(2)　点 $z$ が点 $1-\sqrt{3}\,i$ を中心とする半径 1 の円上を動くとき　$w=(2+2\sqrt{3}\,i)z$

解答　(1)　点 3 を中心とする半径 1 の円　(2)　点 8 を中心とする半径 4 の円

解説

(1)　点 $z$ が満たす方程式は　$|z|=1$　……①

$w=3-iz$ から　$iw=3i+z$　すなわち　$z=i(w-3)$

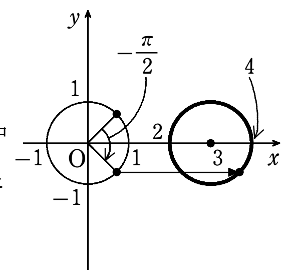
① に代入して　$|i(w-3)|=1$

$|i||w-3|=1$ から　$|w-3|=1$

よって，点 $w$ は点 3 を中心とする半径 1 の円を描く。

参考　$w=3-iz$ から，求める図形は，単位円を原点を中心に $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転し，実軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

よって，点 $w$ は点 3 を中心とする半径 1 の円を描く。




(2)　点 $z$ が満たす方程式は　$|z-(1-\sqrt{3}\,i)|=1$　……①

$w=(2+2\sqrt{3}\,i)z$ すなわち $w=2(1+\sqrt{3}\,i)z$ から

$$z=\frac{w}{2(1+\sqrt{3}\,i)}=\frac{w(1-\sqrt{3}\,i)}{2(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}=\frac{w(1-\sqrt{3}\,i)}{8}$$

① に代入して　$\left|\frac{w(1-\sqrt{3}\,i)}{8}-(1-\sqrt{3}\,i)\right|=1$

すなわち　$\left|\frac{1-\sqrt{3}\,i}{8}\right||w-8|=1$

$\left|\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{8}\right| = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ であるから　　$|w-8|=4$

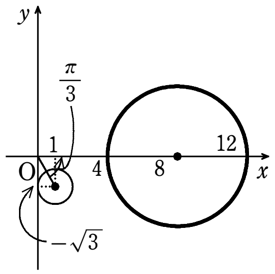
よって，点 $w$ は点 8 を中心とする半径 4 の円を描く。

参考　$2+2\sqrt{3}\,i = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから，

点 $(2+2\sqrt{3}\,i)z$ は，点 $z$ を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を 4 倍した点である。

ゆえに，円 $|z-(1-\sqrt{3}\,i)|=1$ の中心である点 $1-\sqrt{3}\,i$ は点 8 に移り，円の半径は 4 となる。

よって，点 $w$ は点 8 を中心とする半径 4 の円を描く。




16　点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=(1-i)z-2i$ で表される点 $w$ は，どのような図形を描くか。

解答　点 $-2i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

解説

点 $z$ は単位円上を動くから　　$|z|=1$　……[A]

$w=(1-i)z-2i$ から　　$z=\dfrac{w+2i}{1-i}$

[A] に代入して　　$\left|\dfrac{w+2i}{1-i}\right|=1$　すなわち　$\dfrac{|w+2i|}{|1-i|}=1$

$|1-i|=\sqrt{2}$ であるから　　$|w+2i|=\sqrt{2}$

したがって，点 $w$ が描く図形は　　点 $-2i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

17　点 P$(z)$ が，点 $-i$ を中心とする半径 1 の円から原点 O を除いた円周上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 Q$(w)$ はどのような図形を描くか。

解答　2 点 0，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解説

点 $z$ が満たす方程式は　　$|z+i|=1$　$(z\neq 0)$

$w=\dfrac{1}{z}$ から，$w\neq 0$ で　　$z=\dfrac{1}{w}$

$|z+i|=1$ に代入して　　$\left|\dfrac{1}{w}+i\right|=1$

ゆえに　　$|1+iw|=|w|$　……①

$|1+iw|=|-i^2+iw|=|i(w-i)|=|i||w-i|=|w-i|$ であるから，① は

$|w-i|=|w|$

よって，点 Q$(w)$ は 2 点 0，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

18　$-1$ と異なる複素数 $z$ に対し，複素数 $w$ を $w=\dfrac{z}{z+1}$ で定めるとき

(1)　$z$ が複素数平面の虚軸上を動くとき，$w$ が描く図形を求めよ。

(2)　$z$ が複素数平面上の円 $|z-1|=1$ 上を動くとき，$w$ が描く図形を求めよ。

解答　(1)　点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円。ただし，点 1 を除く

(2)　点 $\dfrac{1}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円

解説

(1)　$w=\dfrac{z}{z+1}$ から　　$w(z+1)=z$　　よって　　$(1-w)z=w$

ここで，$(1-w)z=w$ に $w=1$ を代入すると，$0=1$ となり，不合理である。

ゆえに　　$w\neq 1$　　よって　　$z=\dfrac{w}{1-w}$　……①

点 $z$ が虚軸上を動くとき　　$z+\overline{z}=0$

① を代入して　　$\dfrac{w}{1-w}+\overline{\left(\dfrac{w}{1-w}\right)}=0$　すなわち　$\dfrac{w}{1-w}+\dfrac{\overline{w}}{1-\overline{w}}=0$

ゆえに　　$w(1-\overline{w})+\overline{w}(1-w)=0$

展開して整理すると　　$2w\overline{w}-w-\overline{w}=0$

よって　　$w\overline{w}-\dfrac{1}{2}w-\dfrac{1}{2}\overline{w}=0$

ゆえに　　$\left(w-\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{4}=0$

したがって　　$\left(w-\dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(w-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{4}$　すなわち　$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

よって　　$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，点 $w$ の描く図形は，点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円。ただし，点 1 を除く。

(2)　① を $|z-1|=1$ に代入すると　　$\left|\dfrac{w}{1-w}-1\right|=1$

よって　　$\left|\dfrac{2w-1}{1-w}\right|=1$　　ゆえに　　$|2w-1|=|w-1|$　……(*)

両辺を 2 乗すると　　$|2w-1|^2=|w-1|^2$

したがって　　$(2w-1)\overline{(2w-1)}=(w-1)\overline{(w-1)}$

よって　　$(2w-1)(2\overline{w}-1)=(w-1)(\overline{w}-1)$

展開して整理すると　　$3w\overline{w}-w-\overline{w}=0$

ゆえに　　$w\overline{w}-\dfrac{1}{3}w-\dfrac{1}{3}\overline{w}=0$

したがって　　$\left(w-\dfrac{1}{3}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{9}=0$

よって　　$\left(w-\dfrac{1}{3}\right)\overline{\left(w-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{9}$　すなわち　$\left|w-\dfrac{1}{3}\right|^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

ゆえに　　$\left|w-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$

したがって，点 $w$ の描く図形は　　点 $\dfrac{1}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円

別解　[(*) までは同じ]

(*) から　　$2\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=|w-1|$

よって，A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，B(1)，P$(w)$ とすると　　$2\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$

ゆえに，AP : BP = 1 : 2 であるから，点 P が描く図形は，線分 AB を 1 : 2 に内分する点 C と外分する点 D を直径の両端とする円である。

C$\left(\dfrac{2}{3}\right)$，D(0) であるから，求める図形は　　点 $\dfrac{1}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円

19　(1)　複素数平面上の点 $z$ が単位円から点 $-1$ を除いた円周上を動くとき，$w=\dfrac{2z+1}{z+1}$ で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

(2)　複素数平面上の点 $z$ が点 5 を通り，実軸に垂直な直線上を動くとき，$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　(1)　2 点 1，2 を結ぶ線分の垂直二等分線

(2)　点 $-\dfrac{5}{4}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$ の円。ただし，点 $-1$ を除く

解説

(1)　点 $z$ が満たす方程式は　　$|z|=1$　$(z\neq -1)$

$w=\dfrac{2z+1}{z+1}$ から　　$(z+1)w=2z+1$

ゆえに　　$(w-2)z=-w+1$

この等式の両辺に $w=2$ を代入すると，$0=-1$ となり不合理。

したがって，$w\neq 2$ である。　　よって　　$z=-\dfrac{w-1}{w-2}$

これを $|z|=1$ に代入すると　　$\left|-\dfrac{w-1}{w-2}\right|=1$　すなわち　$|w-1|=|w-2|$

ゆえに，点 $w$ は，2 点 1，2 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

(2)　点 $z$ が満たす方程式は　　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=5$　……①

また，$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ から　　$(1-z)w=1+z$

ゆえに　　$(w+1)z=w-1$

この等式の両辺に $w=-1$ を代入すると，$0=-2$ となり不合理。

したがって，$w\neq -1$ である。　　よって　　$z=\dfrac{w-1}{w+1}$

ゆえに　　$z+\overline{z}=\dfrac{w-1}{w+1}+\dfrac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}=\dfrac{(\overline{w}+1)(w-1)+(w+1)(\overline{w}-1)}{(w+1)(\overline{w}+1)}$

$=\dfrac{w\overline{w}-\overline{w}+w-1+w\overline{w}-w+\overline{w}-1}{(w+1)(\overline{w}+1)}=\dfrac{2(w\overline{w}-1)}{(w+1)(\overline{w}+1)}$

よって，① は　　$\dfrac{w\overline{w}-1}{(w+1)(\overline{w}+1)}=5$

ゆえに　　$w\overline{w}-1=5(w+1)(\overline{w}+1)$

$4w\overline{w}+5w+5\overline{w}+6=0$

よって　　$\left(w+\dfrac{5}{4}\right)\left(\overline{w}+\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{16}$

ゆえに　　$\left|w+\dfrac{5}{4}\right|^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$　すなわち　$\left|w+\dfrac{5}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$

したがって，点 $w$ は点 $-\dfrac{5}{4}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$ の円を描く。ただし，点 $-1$ を除く。

20　点 $z$ が，原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の等式を満たす点 $w$ はどのような図形を描くか。

(1)　$w=z+i$　　　(2)　$w=\dfrac{iz+4}{2}$

解答　(1)　点 $i$ を中心とする半径 1 の円　　(2)　点 2 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

解説

点 $z$ は中心 O，半径 1 の円上にあるから　　$|z|=1$

(1)　$w=z+i$ から　　$z=w-i$

よって　　$|w-i|=1$

ゆえに，点 $w$ は，点 $i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

(2)　$w=\dfrac{iz+4}{2}$ から　　$z=\dfrac{2w-4}{i}$

よって　$\left|\dfrac{2w-4}{i}\right|=1$

すなわち　$|2(w-2)|=|i|$

ゆえに　$|w-2|=\dfrac{1}{2}$

したがって，点 $w$ は，点 2 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。

21 点 $z$ が，原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の点 $w$ はどのような図形を描くか。

(1)　$w=\dfrac{1+i}{z}$　　(2)　$w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$

解答　(1)　原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

(2)　点 $\dfrac{11}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円

解説

点 $z$ は中心 O，半径 1 の円上にあるから　$|z|=1$　……①

(1)　$w=\dfrac{1+i}{z}$ から，$w\neq 0$ で　$z=\dfrac{1+i}{w}$

①に代入して　$\left|\dfrac{1+i}{w}\right|=1$

よって　$|1+i|=|w|$　　ゆえに　$|w|=\sqrt{2}$

したがって，点 $w$ は，原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

(2)　$w=\dfrac{6z-1}{2z-1}$ から　$(2z-1)w=6z-1$　　よって　$2z(w-3)=w-1$

$w=3$ は等式を満たさないから，$w\neq 3$ で　$z=\dfrac{w-1}{2(w-3)}$

①に代入して　$\left|\dfrac{w-1}{2(w-3)}\right|=1$　　ゆえに　$|w-1|=2|w-3|$

両辺を 2 乗すると　$|w-1|^2=4|w-3|^2$

よって　$(w-1)(\overline{w}-1)=4(w-3)(\overline{w}-3)$

両辺を展開して整理すると　$w\overline{w}-\dfrac{11}{3}(w+\overline{w})+\dfrac{35}{3}=0$

ゆえに　$\left(w-\dfrac{11}{3}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{16}{9}$

すなわち　$\left|w-\dfrac{11}{3}\right|^2=\dfrac{16}{9}$　　よって　$\left|w-\dfrac{11}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$

したがって，点 $w$ は，点 $\dfrac{11}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円を描く。

参考　$|w-1|=2|w-3|$ であるから，点 $w$ の軌跡はアポロニウスの円 (2 点 1，3 からの距離の比が 2 : 1) であることがわかる。

22 点 $z$ が，原点 O を中心とする半径 1 の円から $-1$ を除いた図形上を動くとき，点 $w=\dfrac{z+i}{z+1}$ はどのような図形を描くか。

解答　2 点 $i$，1 を結ぶ線分の垂直二等分線

解説

点 $z$ が満たす方程式は　$|z|=1$　$(z\neq -1)$

$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ から　$(z+1)w=z+i$　　よって　$z(w-1)=-w+i$

$w=1$ は等式を満たさないから，$w\neq 1$ で　$z=\dfrac{-w+i}{w-1}$

$|z|=1$ に代入して　$\left|\dfrac{-w+i}{w-1}\right|=1$

ゆえに　$|-w+i|=|w-1|$　　すなわち　$|w-i|=|w-1|$

したがって，点 $w$ は，2 点 $i$，1 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

23 点 $z$ が，点 $-1$ を通り実軸に垂直な直線上を動くとき，点 $w=\dfrac{1}{z}$ はどのような図形を描くか。

解答　点 $-\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円。ただし，原点を除く。

解説

点 $z$ は 2 点 0，$-2$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるから　$|z|=|z+2|$　……①

また，$w=\dfrac{1}{z}$ から，$w\neq 0$ で　$z=\dfrac{1}{w}$

これを①に代入して　$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}+2\right|$　　よって　$\dfrac{1}{|w|}=\dfrac{|1+2w|}{|w|}$

ゆえに　$|2w+1|=1$　　したがって　$\left|w+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，点 $w$ は，点 $-\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。ただし，原点を除く。

別解　$z$ の実部は $-1$ であるから　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=-1$

すなわち　$z+\overline{z}=-2$　……①

また，$w=\dfrac{1}{z}$ から，$w\neq 0$ で　$z=\dfrac{1}{w}$　　よって　$\overline{z}=\dfrac{1}{\overline{w}}$

①に代入して　$\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{\overline{w}}=-2$　　整理すると　$2w\overline{w}+w+\overline{w}=0$

よって　$2\left(w+\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$\left|w+\dfrac{1}{2}\right|^2=\dfrac{1}{4}$

すなわち　$\left|w+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，点 $w$ は，点 $-\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。ただし，原点を除く。

24 点 $z$ が，原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 $w=\dfrac{z-2}{z+1}$ はどのような図形を描くか。

解答　点 2 を中心とする半径 2 の円

解説

$w=\dfrac{z-2}{z+1}$ から　$(z+1)w=z-2$

よって　$z(w-1)=-w-2$

$w=1$ は等式を満たさないから，$w\neq 1$ で　$z=-\dfrac{w+2}{w-1}$

$|z|=2$ であるから　$\left|\dfrac{w+2}{w-1}\right|=2$

ゆえに　$|w+2|=2|w-1|$

両辺を 2 乗すると　$|w+2|^2=4|w-1|^2$

よって　$(w+2)(\overline{w}+2)=4(w-1)(\overline{w}-1)$

整理すると　$w\overline{w}-2(w+\overline{w})+4=4$

ゆえに　$(w-2)(\overline{w}-2)=4$

すなわち　$|w-2|^2=2^2$

よって　$|w-2|=2$

したがって，点 $w$ は，点 2 を中心とする半径 2 の円を描く。

25 複素数平面上で，点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の点 $w$ はどのような図形を描くか。

(1)　$w=z+2i$　　(2)　$w=iz-3$

解答　(1)　点 $2i$ を中心とする半径 1 の円　　(2)　点 $-3$ を中心とする半径 1 の円

解説

$z$ は等式 $|z|=1$ を満たす。

(1)　$w=z+2i$ より $z=w-2i$ であるから

$|z|=|w-2i|$

よって　$|w-2i|=1$

したがって，点 $w$ は，点 $2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

参考　点 $w$ は，点 $z$ を虚軸方向に 2 だけ移動した点である。

$z$ は原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くから，$w$ は点 $2i$ を中心とする半径 1 の円上を動く。

(2)　$w=iz-3$ より $z=\dfrac{w+3}{i}$ であるから　$|z|=\left|\dfrac{w+3}{i}\right|=\dfrac{|w+3|}{|i|}=|w+3|$

よって　$|w+3|=1$

したがって，点 $w$ は，点 $-3$ を中心とする半径 1 の円を描く。

参考　点 $w$ は，点 $z$ を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，さらに実軸方向に $-3$ だけ移動した点である。

$z$ は原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くから，$w$ は点 $-3$ を中心とする半径 1 の円上を動く。

26 複素数平面上で，点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，次の点 $w$ はどのような図形を描くか。ただし，(4) においては，$z$ は $z\neq i$ を満たしながら円上を動くとする。

(1)　$w=\dfrac{3+i}{z}$　　(2)　$w=\dfrac{z+4}{z-2}$　　(3)　$w=\dfrac{2i}{2z+1}$　　(4)　$w=\dfrac{z+i}{z-i}$

解答　(1)　原点を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円

(2)　点 $-3$ を中心とする半径 2 の円

(3)　点 $-\dfrac{2}{3}i$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円

(4)　2 点 $-1$，1 を結ぶ線分の垂直二等分線（虚軸）

解説

$z$ は等式 $|z|=1$ を満たす。

(1)　$w=\dfrac{3+i}{z}$ から　$w\neq 0$

よって，$zw=3+i$ から　$z=\dfrac{3+i}{w}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{3+i}{w}\right|=1$

ゆえに　$|3+i|=|w|$

$|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ であるから　$|w|=\sqrt{10}$

したがって，点 $w$ は，原点を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円を描く。

(2)　$w=\dfrac{z+4}{z-2}$ から　$(z-2)w=z+4$

よって　$z(w-1)=2w+4$

$w=1$ とすると等式は成り立たないから，$w \fallingdotseq 1$ で　$z=\dfrac{2w+4}{w-1}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{2w+4}{w-1}\right|=1$

ゆえに　$2|w+2|=|w-1|$

両辺を 2 乗すると　$4|w+2|^2=|w-1|^2$

よって　$4(w+2)(\overline{w}+2)=(w-1)(\overline{w}-1)$

整理すると　$w\overline{w}+3w+3\overline{w}=-5$

変形すると　$(w+3)(\overline{w}+3)=4$

すなわち　$|w+3|^2=4$

ゆえに　$|w+3|=2$

したがって，点 $w$ は，点 $-3$ を中心とする半径 2 の円を描く。

(3)　$w=\dfrac{2i}{2z+1}$ から　$(2z+1)w=2i$

よって　$2zw=-w+2i$

$w=0$ とすると等式は成り立たないから，$w \fallingdotseq 0$ で　$z=\dfrac{-w+2i}{2w}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{-w+2i}{2w}\right|=1$

ゆえに　$|-w+2i|=|2w|$

すなわち　$|w-2i|=2|w|$

両辺を 2 乗すると　$|w-2i|^2=4|w|^2$

よって　$(w-2i)(\overline{w}+2i)=4w\overline{w}$

整理すると　$w\overline{w}-\dfrac{2}{3}iw+\dfrac{2}{3}i\overline{w}=\dfrac{4}{3}$

変形すると　$\left(w+\dfrac{2}{3}i\right)\left(\overline{w}-\dfrac{2}{3}i\right)=\dfrac{16}{9}$

すなわち　$\left|w+\dfrac{2}{3}i\right|^2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

ゆえに　$\left|w+\dfrac{2}{3}i\right|=\dfrac{4}{3}$

したがって，点 $w$ は，点 $-\dfrac{2}{3}i$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円を描く。

(4)　$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ から　$(z-i)w=z+i$

よって　$z(w-1)=i(w+1)$

$w=1$ とすると等式は成り立たないから，$w \fallingdotseq 1$ で　$z=\dfrac{i(w+1)}{w-1}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{i(w+1)}{w-1}\right|=1$

ゆえに　$|i(w+1)|=|w-1|$

すなわち　$|i||w+1|=|w-1|$

よって　$|w+1|=|w-1|$

したがって，点 $w$ は，2 点 $-1$，1 を結ぶ線分の垂直二等分線（虚軸）を描く。

27 複素数平面上で，点 $z$ が点 $-2$ を中心とする半径 3 の円上を動くとき，次の点 $w$ はどのような図形を描くか。

(1)　$w=\overline{z}$　　　(2)　$w=\dfrac{1}{z}$

解答　(1)　点 $-2$ を中心とする半径 3 の円

(2)　点 $\dfrac{2}{5}$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{5}$ の円

解説

$z$ は等式 $|z+2|=3$ を満たす。

(1)　$w=\overline{z}$ から　$z=\overline{w}$

これを $|z+2|=3$ に代入すると　$|\overline{w}+2|=3$

よって　$|\overline{w+2}|=3$

すなわち　$|w+2|=3$

したがって，点 $w$ は，点 $-2$ を中心とする半径 3 の円を描く。

参考　点 $w$ は点 $z$ と実軸に関して対称である。

点 $z$ の軌跡は実軸に関して対称であるから，点 $z$ の軌跡と点 $w$ の軌跡は同じ図形になる。

(2)　$w=\dfrac{1}{z}$ から　$w \fallingdotseq 0$

よって，$zw=1$ から　$z=\dfrac{1}{w}$

これを $|z+2|=3$ に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}+2\right|=3$

両辺に $|w|$ を掛けると　$|2w+1|=3|w|$

両辺を 2 乗すると　$|2w+1|^2=9|w|^2$

よって　$(2w+1)(2\overline{w}+1)=9w\overline{w}$

整理すると　$5w\overline{w}-2w-2\overline{w}=1$

すなわち　$w\overline{w}-\dfrac{2}{5}w-\dfrac{2}{5}\overline{w}=\dfrac{1}{5}$

変形すると　$\left(w-\dfrac{2}{5}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{9}{25}$

すなわち　$\left|w-\dfrac{2}{5}\right|^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

ゆえに　$\left|w-\dfrac{2}{5}\right|=\dfrac{3}{5}$

したがって，点 $w$ は，点 $\dfrac{2}{5}$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{5}$ の円を描く。

28 2 つの複素数 $w$，$z$ が $w=\dfrac{2z-i}{z+i}$ を満たす。複素数平面上で，点 $z$ が原点を中心とする半径 2 の円上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $w$ はどのような図形を描くか。　　(2)　$w$ の絶対値 $|w|$ の最大値を求めよ。

解答　(1)　点 3 を中心とする半径 2 の円　　(2)　$w=5$ のとき最大値 5

解説

(1)　$z$ は等式 $|z|=2$ を満たす。

$w=\dfrac{2z-i}{z+i}$ から　$(z+i)w=2z-i$

よって　$(w-2)z=-i(w+1)$

$w=2$ とすると等式は成り立たないから，$w \fallingdotseq 2$ で　$z=\dfrac{-i(w+1)}{w-2}$

これを $|z|=2$ に代入すると　$\left|\dfrac{-i(w+1)}{w-2}\right|=2$

よって　$|-i||w+1|=2|w-2|$

すなわち　$|w+1|=2|w-2|$

両辺を 2 乗すると　$|w+1|^2=4|w-2|^2$

ゆえに　$(w+1)(\overline{w}+1)=4(w-2)(\overline{w}-2)$

両辺を展開して整理すると　$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+5=0$

ゆえに　$(w-3)(\overline{w}-3)=4$

すなわち　$|w-3|^2=2^2$

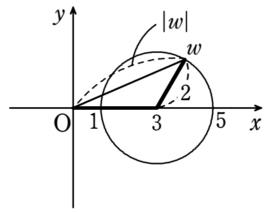
よって　$|w-3|=2$

これは，点 3 を中心とする半径 2 の円である。

(2)　右の図から　$|w| \leqq 3+2=5$

等号が成り立つのは $w=5$ のときである。

よって，$|w|$ は $w=5$ のとき最大値 5 をとる。




29 $w=\dfrac{z+2}{z-3}$ とする。複素数平面上で，点 $z$ が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答　点 $-2$ を中心とする半径 2 の円

解説

$z$ は等式 $|z|=2$ を満たす。

$w=\dfrac{z+2}{z-3}$ から　$(z-3)w=z+2$

よって　$z(w-1)=3w+2$

$w=1$ とすると等式は成り立たないから，$w \fallingdotseq 1$ で　$z=\dfrac{3w+2}{w-1}$

$|z|=2$ であるから　$\left|\dfrac{3w+2}{w-1}\right|=2$

ゆえに　$|3w+2|=2|w-1|$

両辺を 2 乗すると　$|3w+2|^2=4|w-1|^2$

よって　$(3w+2)(3\overline{w}+2)=4(w-1)(\overline{w}-1)$

両辺を展開して整理すると　$w\overline{w}+2w+2\overline{w}=0$

式を変形すると　$(w+2)(\overline{w}+2)=4$

すなわち　$|w+2|^2=4$

ゆえに　$|w+2|=2$

したがって，点 $w$ は　点 $-2$ を中心とする半径 2 の円　を描く。