# 方程式の表す図形クイズ

$\boxed{1}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z|=2$　　(2) $|z-i|=1$　　(3) $|z-1-i|=2$

解答 (1) 原点を中心とする半径 2 の円　(2) 点 $i$ を中心とする半径 1 の円
(3) 点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円

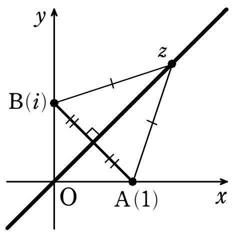
解説

(1) 原点を中心とする半径 2 の円

(2) 点 $i$ を中心とする半径 1 の円

(3) $|z-(1+i)|=2$ より
点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円

$\boxed{2}$ 方程式 $|z-1|=|z-i|$ を満たす点 $z$ 全体は，2 点 A$(1)$，B$(i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線である。




解説

$\boxed{3}$ 方程式 $|z+3|=2|z|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

解答 点 1 を中心とする半径 2 の円

解説

方程式の両辺を 2 乗すると

$|z+3|^2=4|z|^2$

よって　$(z+3)\overline{(z+3)}=4z\overline{z}$

ゆえに　$(z+3)(\overline{z}+3)=4z\overline{z}$

左辺を展開して整理すると

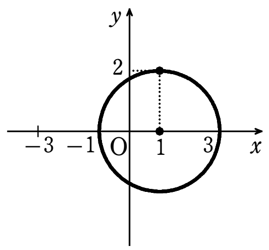
$z\overline{z}-(z+\overline{z})=3$

よって　$(z-1)(\overline{z}-1)=2^2$

すなわち　$|z-1|^2=2^2$

ゆえに　$|z-1|=2$

したがって，求める図形は
点 1 を中心とする半径 2 の円である。




$\boxed{4}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $3|z+2|=|z-6|$　　(2) $|z-4i|=2|z-i|$

解答 (1) 点 $-3$ を中心とする半径 3 の円　(2) 原点を中心とする半径 2 の円

解説

(1) 方程式の両辺を 2 乗すると　$9|z+2|^2=|z-6|^2$

よって　$9(z+2)\overline{(z+2)}=(z-6)\overline{(z-6)}$

ゆえに　$9(z+2)(\overline{z}+2)=(z-6)(\overline{z}-6)$

展開して整理すると　$z\overline{z}+3z+3\overline{z}=0$

よって　$(z+3)(\overline{z}+3)=3^2$

すなわち　$|z+3|^2=3^2$　　ゆえに　$|z+3|=3$

したがって，求める図形は，点 $-3$ を中心とする半径 3 の円である。

(2) 方程式の両辺を 2 乗すると　$|z-4i|^2=4|z-i|^2$

よって　$(z-4i)\overline{(z-4i)}=4(z-i)\overline{(z-i)}$

ゆえに　$(z-4i)(\overline{z}+4i)=4(z-i)(\overline{z}+i)$

展開して整理すると　$z\overline{z}=4$

すなわち　$|z|^2=2^2$　　ゆえに　$|z|=2$

したがって，求める図形は，原点を中心とする半径 2 の円である。

$\boxed{5}$ 方程式 $|z|=|2z-i|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。[20 点]

解答 方程式の両辺を 2 乗すると　$|z|^2=|2z-i|^2$

よって　$z\overline{z}=(2z-i)\overline{(2z-i)}$

ゆえに　$z\overline{z}=(2z-i)(2\overline{z}+i)$

展開して整理すると　$z\overline{z}+\dfrac{2}{3}i(z-\overline{z})=-\dfrac{1}{3}$

これを変形して　$\left(z-\dfrac{2}{3}i\right)\left(\overline{z}+\dfrac{2}{3}i\right)=\dfrac{1}{9}$

よって　$\left(z-\dfrac{2}{3}i\right)\overline{\left(z-\dfrac{2}{3}i\right)}=\dfrac{1}{9}$　　すなわち　$\left|z-\dfrac{2}{3}i\right|^2=\dfrac{1}{9}$

ゆえに　$\left|z-\dfrac{2}{3}i\right|=\dfrac{1}{3}$

したがって，求める図形は点 $\dfrac{2}{3}i$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{3}$ の円である。

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$|z|^2=|2z-i|^2$

よって　$z\overline{z}=(2z-i)\overline{(2z-i)}$

ゆえに　$z\overline{z}=(2z-i)(2\overline{z}+i)$

展開して整理すると　$z\overline{z}+\dfrac{2}{3}i(z-\overline{z})=-\dfrac{1}{3}$

これを変形して　$\left(z-\dfrac{2}{3}i\right)\left(\overline{z}+\dfrac{2}{3}i\right)=\dfrac{1}{9}$

よって　$\left(z-\dfrac{2}{3}i\right)\overline{\left(z-\dfrac{2}{3}i\right)}=\dfrac{1}{9}$　　すなわち　$\left|z-\dfrac{2}{3}i\right|^2=\dfrac{1}{9}$

ゆえに　$\left|z-\dfrac{2}{3}i\right|=\dfrac{1}{3}$

したがって，求める図形は点 $\dfrac{2}{3}i$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{3}$ の円である。

$\boxed{6}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z|=2$　　(2) $|z-(1+i)|=1$　　(3) $|z-2|=|z-4i|$

解答 (1) 原点を中心とする半径 2 の円　(2) 点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円
(3) 2 点 A$(2)$，B$(4i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

解説

(1) 原点を中心とする半径 2 の円

(2) 点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円

(3) 2 点 A$(2)$，B$(4i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

$\boxed{7}$ 方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

解答 点 4 を中心とする半径 2 の円

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$4|z-3|^2=|z|^2$

よって　$4(z-3)\overline{(z-3)}=z\overline{z}$

$4(z-3)(\overline{z}-3)=z\overline{z}$

左辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$

式を変形すると　$(z-4)(\overline{z}-4)=4$　すなわち　$|z-4|^2=4$

したがって　$|z-4|=2$

これは，点 4 を中心とする半径 2 の円である。

$\boxed{8}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。[5点×2=10点]

(1) $|z+2i|=3$　　(2) $|z-3|=|z-i|$

解答 (1) 点 $-2i$ を中心とする半径 3 の円
(2) 2 点 A$(3)$，B$(i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

解説

(1) 点 $-2i$ を中心とする半径 3 の円

(2) 2 点 A$(3)$，B$(i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

$\boxed{9}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z+2i|=|z-3|$　　(2) $|z+1-3i|=2$

(3) $4(z-1+i)(\overline{z}-1-i)=1$　　(4) $z+\overline{z}=3$

解答 (1) 2 点 $-2i$，3 を結ぶ線分の垂直二等分線
(2) 点 $-1+3i$ を中心とする半径 2 の円
(3) 点 $1-i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円　(4) 点 $\dfrac{3}{2}$ を通り，実軸に垂直な直線

解説

(1) 方程式を変形すると　$|z-(-2i)|=|z-3|$

よって，点 $z$ の全体は　2 点 $-2i$，3 を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 方程式を変形すると　$|z-(-1+3i)|=2$

よって，点 $z$ の全体は　点 $-1+3i$ を中心とする半径 2 の円

(3) 方程式から　$4(z-1+i)\overline{(z-1+i)}=1$

よって　$4|z-1+i|^2=1$

ゆえに　$|z-1+i|^2=\dfrac{1}{4}$　　したがって　$|z-(1-i)|=\dfrac{1}{2}$

よって，点 $z$ の全体は　点 $1-i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

(4) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とすると　$\overline{z}=x-yi$

これを方程式に代入して　$(x+yi)+(x-yi)=3$

よって，$2x=3$ から　$x=\frac{3}{2}$　ゆえに　$z=\frac{3}{2}+yi$

よって，点 $z$ の全体は　点 $\frac{3}{2}$ を通り，実軸に垂直な直線

$\boxed{10}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z-1-i|=|z-3+i|$　(2) $2|z+1+2i|=1$

(3) $(2z-3)(2\overline{z}-3)=4$　(4) $z-\overline{z}=-i$

解答 (1) 2 点 $1+i$，$3-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 点 $-1-2i$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円

(3) 点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 1 の円

(4) 点 $-\frac{1}{2}i$ を通り，虚軸に垂直な直線

解説

(1) 方程式を変形すると　$|z-(1+i)|=|z-(3-i)|$

よって，点 $z$ の全体は，2 点 $1+i$，$3-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。

(2) 方程式を変形すると　$|z-(-1-2i)|=\frac{1}{2}$

よって，点 $z$ の全体は，点 $-1-2i$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

(3) 方程式から　$(2z-3)\overline{(2z-3)}=4$　よって　$|2z-3|^2=4$

ゆえに　$|2z-3|=2$　すなわち　$\left|z-\frac{3}{2}\right|=1$

よって，点 $z$ の全体は，点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 1 の円である。

(4) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とすると　$\overline{z}=x-yi$

これらを方程式に代入して　$x+yi-(x-yi)=-i$

ゆえに　$2yi=-i$　よって　$y=-\frac{1}{2}$

したがって　$z=x-\frac{1}{2}i$

$z$ の虚部は常に $-\frac{1}{2}$ であるから，点 $z$ の全体は，点 $-\frac{1}{2}i$ を通り，虚軸に垂直な直線である。

$\boxed{11}$ 方程式 $3|z+i|=|z-3i|$ を満たす点 $z$ の全体は，どのような図形か。

解答 点 $-\frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$9|z+i|^2=|z-3i|^2$

ゆえに　$9(z+i)\overline{(z+i)}=(z-3i)\overline{(z-3i)}$

よって　$9(z+i)(\overline{z}-i)=(z-3i)(\overline{z}+3i)$

両辺を展開して整理すると　$2z\overline{z}-3iz+3i\overline{z}=0$

両辺を 2 で割ると　$z\overline{z}-\frac{3}{2}iz+\frac{3}{2}i\overline{z}=0$

ゆえに　$\left(z+\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z}-\frac{3}{2}i\right)-\frac{9}{4}=0$

よって　$\left(z+\frac{3}{2}i\right)\overline{\left(z+\frac{3}{2}i\right)}=\frac{9}{4}$

すなわち　$\left|z+\frac{3}{2}i\right|^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$　ゆえに　$\left|z-\left(-\frac{3}{2}i\right)\right|=\frac{3}{2}$

よって，点 $z$ の全体は，点 $-\frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円である。

別解 $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とすると，方程式は　$3|x+(y+1)i|=|x+(y-3)i|$

両辺を 2 乗すると　$9|x+(y+1)i|^2=|x+(y-3)i|^2$

よって　$9\{x^2+(y+1)^2\}=x^2+(y-3)^2$

整理すると　$x^2+y^2+3y=0$　すなわち　$x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

よって，点 $z$ の全体は，点 $-\frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円である。

$\boxed{12}$ 次の方程式を満たす点 $z$ の全体は，どのような図形か。

(1) $|z+1|=2|z-2|$　(2) $2|z+i|=3|z-4i|$

解答 (1) 点 3 を中心とする半径 2 の円　(2) 点 $8i$ を中心とする半径 6 の円

解説

(1) 方程式の両辺を 2 乗すると　$|z+1|^2=4|z-2|^2$

ゆえに　$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$

$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$

$z\overline{z}+z+\overline{z}+1=4(z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4)$

整理して　$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+5=0$

よって　$(z-3)(\overline{z}-3)-4=0$

ゆえに　$(z-3)\overline{(z-3)}=4$　すなわち　$|z-3|^2=2^2$

よって　$|z-3|=2$

ゆえに，点 $z$ の全体は，点 3 を中心とする半径 2 の円である。

別解 1. A$(-1)$，B$(2)$，P$(z)$ とすると，方程式は

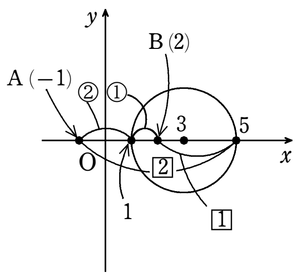
AP$=2$BP

ゆえに　AP：BP$=2:1$

線分 AB を $2:1$ に内分する点を C$(\alpha)$，外分する点を D$(\beta)$ とすると

$\alpha=\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2+1}=1$,

$\beta=\frac{-1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2-1}=5$




よって，点 $z$ の全体は，2 点 1，5 を直径の両端とする円。

別解 2. $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とする。

$|z+1|^2=4|z-2|^2$ から　$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

展開して整理すると　$x^2-6x+y^2+5=0$

したがって　$(x-3)^2+y^2=4$

よって，点 $z$ の全体は，点 3 を中心とする半径 2 の円。

(2) 方程式の両辺を 2 乗すると　$4|z+i|^2=9|z-4i|^2$

ゆえに　$4(z+i)\overline{(z+i)}=9(z-4i)\overline{(z-4i)}$

$4(z+i)(\overline{z}-i)=9(z-4i)(\overline{z}+4i)$

$4(z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1)=9(z\overline{z}+4iz-4i\overline{z}+16)$

整理して　$z\overline{z}+8iz-8i\overline{z}+28=0$

よって　$(z-8i)(\overline{z}+8i)-36=0$

ゆえに　$(z-8i)\overline{(z-8i)}=36$　すなわち　$|z-8i|^2=6^2$

よって　$|z-8i|=6$

ゆえに，点 $z$ の全体は，点 $8i$ を中心とする半径 6 の円である。

別解 1. A$(-i)$，B$(4i)$，P$(z)$ とすると，方程式は

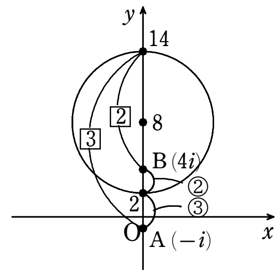
2AP$=3$BP

ゆえに　AP：BP$=3:2$

線分 AB を $3:2$ に内分する点を C$(\alpha)$，外分する点を D$(\beta)$ とすると

$\alpha=\frac{2\cdot(-i)+3\cdot 4i}{3+2}=2i$,

$\beta=\frac{-2\cdot(-i)+3\cdot 4i}{3-2}=14i$




よって，点 $z$ の全体は，2 点 $2i$，$14i$ を直径の両端とする円。

別解 2. $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とする。

$4|z+i|^2=9|z-4i|^2$ から　$4\{x^2+(y+1)^2\}=9\{x^2+(y-4)^2\}$

展開して整理すると　$x^2+y^2-16y+28=0$

したがって　$x^2+(y-8)^2=6^2$

よって，点 $z$ の全体は，点 $8i$ を中心とする半径 6 の円である。

$\boxed{13}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z+2i|=3$　(2) $|z+3-2i|=1$　(3) $|\overline{z}-i|=1$

解答 (1) 点 $-2i$ を中心とする半径 3 の円

(2) 点 $-3+2i$ を中心とする半径 1 の円

(3) 点 $-i$ を中心とする半径 1 の円

解説

(1) 点 $-2i$ を中心とする半径 3 の円

(2) 点 $-3+2i$ を中心とする半径 1 の円

(3) $|\overline{z}-i|=1$ から　$|\overline{\overline{z}-i}|=1$　よって　$|z+i|=1$

ゆえに，求める図形は，点 $-i$ を中心とする半径1の円である。

$\boxed{14}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z-3|=|z-i|$　(2) $|z|=|z+4|$　(3) $|z-3+i|=|z+1|$

解答 (1) 2 点 3，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 2 点 0，$-4$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(3) 2 点 $3-i$，$-1$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解説

(1) 2 点 3，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 2 点 0，$-4$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(3) 2 点 $3-i$，$-1$ を結ぶ線分の垂直二等分線

$\boxed{15}$ 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z+1|=2|z-2|$　(2) $3|z|=|z-8i|$　(3) $|z-i|=2|z-1|$

解答 (1) 点 3 を中心とする半径 2 の円

(2) 点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(3) 点 $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}i$ を中心とする半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の円

解説

(1) 方程式の両辺を 2 乗すると　$|z+1|^2=4|z-2|^2$

よって　$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-3(z+\overline{z})=-5$

ゆえに　$(z-3)(\overline{z}-3)=4$　すなわち　$|z-3|^2=2^2$

よって　$|z-3|=2$

したがって，求める図形は，点 3 を中心とする半径 2 の円である。

参考　この円は，2 点 $-1$，2 からの距離の比が 2：1 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

(2) 方程式の両辺を 2 乗すると　$9|z|^2=|z-8i|^2$

よって　$9z\overline{z}=(z-8i)(\overline{z}+8i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-i(z-\overline{z})=8$

ゆえに　$(z+i)(\overline{z}-i)=9$　すなわち　$(z+i)\overline{(z+i)}=9$

よって　$|z+i|^2=3^2$　ゆえに　$|z+i|=3$

したがって，求める図形は，点 $-i$ を中心とする半径 3 の円である。

参考　この円は，2 点 0，$8i$ からの距離の比が 1：3 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

(3) 方程式の両辺を 2 乗すると　$|z-i|^2=4|z-1|^2$

よって　$(z-i)(\overline{z}+i)=4(z-1)(\overline{z}-1)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-\frac{4+i}{3}z-\frac{4-i}{3}\overline{z}=-1$

ゆえに　$\left(z-\frac{4-i}{3}\right)\left(\overline{z}-\frac{4+i}{3}\right)=\frac{8}{9}$

すなわち　$\left(z-\frac{4-i}{3}\right)\overline{\left(z-\frac{4-i}{3}\right)}=\frac{8}{9}$

よって　$\left|z-\frac{4-i}{3}\right|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$　ゆえに　$\left|z-\frac{4-i}{3}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって，求める図形は，点 $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}i$ を中心とする半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の円である。

参考　この円は，2 点 $i$，1 からの距離の比が 2：1 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

16 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $z+\overline{z}=2$　　(2) $z-\overline{z}=2i$

解答　(1) 点 1 を通り実軸に垂直な直線　(2) 点 $i$ を通り虚軸に垂直な直線

解説

(1) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

よって，$z+\overline{z}=2$ から　$(x+yi)+(x-yi)=2$

ゆえに　$x=1$

したがって，求める図形は，点 1 を通り実軸に垂直な直線である。

別解　与式から　$\frac{z+\overline{z}}{2}=1$

また，2 点 $z$，$\overline{z}$ は実軸に関して対称である。

よって，2 点 $z$，$\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が常に点 1 であるから，求める図形は，点 1 を通り実軸に垂直な直線である。

(2) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

よって，$z-\overline{z}=2i$ から　$(x+yi)-(x-yi)=2i$

ゆえに　$yi=i$　よって　$y=1$

したがって，求める図形は，点 $i$ を通り虚軸に垂直な直線である。

別解　与式から　$\frac{z+(-\overline{z})}{2}=i$

また，2 点 $z$，$-\overline{z}$ は虚軸に関して対称である。

よって，2 点 $z$，$-\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が常に点 $i$ であるから，求める図形は，点 $i$ を通り虚軸に垂直な直線である。

17 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $3|z|=|z+8|$　　(2) $|z-2i|=2|z+i|$

解答　(1) 点 1 を中心とする半径 3 の円　(2) 点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円

解説

(1) 方程式の両辺を 2 乗すると

$9|z|^2=|z+8|^2$

よって　$9z\overline{z}=(z+8)\overline{(z+8)}$

$9z\overline{z}=(z+8)(\overline{z}+8)$

右辺を展開して整理すると

$z\overline{z}-z-\overline{z}=8$

式を変形すると　$(z-1)(\overline{z}-1)=9$

すなわち　$|z-1|^2=3^2$

したがって　$|z-1|=3$

これは，点 1 を中心とする半径 3 の円である。

参考　この円は，2 点 0，$-8$ からの距離の比が 1：3 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

(2) 方程式の両辺を 2 乗すると

$|z-2i|^2=4|z+i|^2$

よって　$(z-2i)\overline{(z-2i)}=4(z+i)\overline{(z+i)}$

$(z-2i)(\overline{z}+2i)=4(z+i)(\overline{z}-i)$

両辺を展開して整理すると

$z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}=0$

式を変形すると　$(z+2i)(\overline{z}-2i)=4$

すなわち　$|z+2i|^2=2^2$

したがって　$|z+2i|=2$

これは，点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円である。

参考　この円は，2 点 $2i$，$-i$ からの距離の比が 2：1 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

18 方程式 $|z-1|=2|z-i|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

解答　点 $\frac{4i-1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の円

解説

方程式の両辺を 2 乗すると　$|z-1|^2=4|z-i|^2$

よって　$(z-1)\overline{(z-1)}=4(z-i)\overline{(z-i)}$

$(z-1)(\overline{z}-1)=4(z-i)(\overline{z}+i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+\frac{4i+1}{3}z-\frac{4i-1}{3}\overline{z}=-1$

式を変形すると　$\left(z-\frac{4i-1}{3}\right)\left(\overline{z}+\frac{4i+1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

すなわち　$\left(z-\frac{4i-1}{3}\right)\overline{\left(z-\frac{4i-1}{3}\right)}=\frac{8}{9}$

ゆえに　$\left|z-\frac{4i-1}{3}\right|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

したがって　$\left|z-\frac{4i-1}{3}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

これは，点 $\frac{4i-1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の円である。

参考　この円は，2 点 1，$i$ からの距離の比が 2：1 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

19 次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $z+\overline{z}=4$　　(2) $z-\overline{z}=6i$

解答　(1) 点 2 を通り実軸に垂直な直線　(2) 点 $3i$ を通り虚軸に垂直な直線

解説

(1) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

よって，$z+\overline{z}=4$ から　$(x+yi)+(x-yi)=4$

ゆえに　$x=2$

したがって，求める図形は，点 2 を通り実軸に垂直な直線である。

別解　与式から　$\frac{z+\overline{z}}{2}=2$

また，2 点 $z$，$\overline{z}$ は実軸に関して対称である。

よって，2 点 $z$，$\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が常に点 2 であるから，求める図形は，点 2 を通り実軸に垂直な直線である。

(2) $z=x+yi$ ($x$，$y$ は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

よって，$z-\overline{z}=6i$ から　$(x+yi)-(x-yi)=6i$

ゆえに　$yi=3i$

よって　$y=3$

したがって，求める図形は，点 $3i$ を通り虚軸に垂直な直線である。

別解　与式から　$\frac{z+(-\overline{z})}{2}=3i$

また，2 点 $z$，$-\overline{z}$ は虚軸に関して対称である。

よって，2 点 $z$，$-\overline{z}$ を結ぶ線分の中点が常に点 $3i$ であるから，求める図形は，点 $3i$ を通り虚軸に垂直な直線である。