

内分・外分・重心クイズ

1 次の α , β について、2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分する点、外分する点を表す複素数を、それぞれ求めよ。

(1) $\alpha = 1 - 5i$, $\beta = 6$ (2) $\alpha = 3 - i$, $\beta = -2(1 - 2i)$

解答 内分点、外分点の順に (1) $4 - 2i$, $16 + 10i$ (2) $2i$, $-12 + 14i$

解説

内分点を表す複素数を γ 、外分点を表す複素数を δ とする。

(1) $\gamma = \frac{2(1 - 5i) + 3 \cdot 6}{3 + 2} = \frac{20 - 10i}{5} = 4 - 2i$

$\delta = \frac{-2(1 - 5i) + 3 \cdot 6}{3 - 2} = 16 + 10i$

(2) $\gamma = \frac{2(3 - i) + 3(-2(1 - 2i))}{3 + 2} = \frac{10i}{5} = 2i$

$\delta = \frac{-2(3 - i) + 3(-2(1 - 2i))}{3 - 2} = -12 + 14i$

2 $A(1 + 5i)$, $B(7 - i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 C (2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 D

解答 (1) $3 + 3i$ (2) $4 + 2i$ (3) $19 - 13i$

解説

(1) $\frac{2(1 + 5i) + 1 \cdot (7 - i)}{1 + 2} = \frac{9 + 9i}{3} = 3 + 3i$

(2) $\frac{(1 + 5i) + (7 - i)}{2} = \frac{8 + 4i}{2} = 4 + 2i$

(3) $\frac{-2(1 + 5i) + 3(7 - i)}{3 - 2} = 19 - 13i$

3 $A(-2 - 3i)$, $B(5 - 2i)$, $C(1 + i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。[5点×3=15点]

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点 (2) 線分 AC を $4:3$ に外分する点

(3) $\triangle ABC$ の重心

解答 (1) $\frac{(-2 - 3i) + 2(5 - 2i)}{2 + 1} = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}i$ (2) $\frac{-3(-2 - 3i) + 4(1 + i)}{4 - 3} = 10 + 13i$

(3) $\frac{(-2 - 3i) + (5 - 2i) + (1 + i)}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}i$

解説

(1) $\frac{(-2 - 3i) + 2(5 - 2i)}{2 + 1} = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}i$ (2) $\frac{-3(-2 - 3i) + 4(1 + i)}{4 - 3} = 10 + 13i$

(3) $\frac{(-2 - 3i) + (5 - 2i) + (1 + i)}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}i$

4 2点 $A(-1 + i)$, $B(5 - 2i)$ を結ぶ線分 AB について、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) $2:1$ に内分する点 (2) $1:4$ に外分する点 (3) 中点

解答 (1) $3 - i$ (2) $-3 + 2i$ (3) $2 - \frac{1}{2}i$

解説

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点は

$$\frac{1 \cdot (-1 + i) + 2(5 - 2i)}{2 + 1} = \frac{9 - 3i}{3} = 3 - i$$

(2) 線分 AB を $1:4$ に外分する点は

$$\frac{-4(-1 + i) + 1 \cdot (5 - 2i)}{1 - 4} = \frac{9 - 6i}{-3} = -3 + 2i$$

(3) 線分 AB の中点は

$$\frac{(-1 + i) + (5 - 2i)}{2} = \frac{4 - i}{2} = 2 - \frac{1}{2}i$$

5 2点 $A(4 - i)$, $B(5 + 3i)$ について、次のものを求めよ。

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点、外分する点を表す複素数

(2) 線分 AB の長さ

解答 (1) 内分: $\frac{14}{3} + \frac{5}{3}i$, 外分: $6 + 7i$ (2) $\sqrt{17}$

解説

$\alpha = 4 - i$, $\beta = 5 + 3i$ とする。

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点を表す複素数は

$$\frac{1 \cdot \alpha + 2\beta}{2 + 1} = \frac{(4 - i) + 2(5 + 3i)}{3} = \frac{14 + 5i}{3} = \frac{14}{3} + \frac{5}{3}i$$

線分 AB を $2:1$ に外分する点を表す複素数は

$$\frac{-1 \cdot \alpha + 2\beta}{2 - 1} = -(4 - i) + 2(5 + 3i) = 6 + 7i$$

(2) $AB = |\beta - \alpha| = |(5 + 3i) - (4 - i)| = |1 + 4i|$

$$= \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

6 3点 $A(-1 + 4i)$, $B(-3 - 2i)$, $C(5 + i)$ について、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を $2:3$ に内分する点 P

(2) 線分 AC を $1:3$ に外分する点 Q

(3) 線分 BC の中点 M

(4) $\triangle ABC$ の重心 G

解答 (1) $-\frac{9}{5} + \frac{8}{5}i$ (2) $-4 + \frac{11}{2}i$ (3) $1 - \frac{1}{2}i$ (4) $\frac{1}{3} + i$

解説

(1) 点 P を表す複素数は

$$\frac{3(-1 + 4i) + 2(-3 - 2i)}{2 + 3} = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}i$$

(2) 点 Q を表す複素数は

$$\frac{-3(-1 + 4i) + 1 \cdot (5 + i)}{1 - 3} = -4 + \frac{11}{2}i$$

(3) 点 M を表す複素数は $\frac{(-3 - 2i) + (5 + i)}{2} = 1 - \frac{1}{2}i$

(4) 点 G を表す複素数は $\frac{(-1 + 4i) + (-3 - 2i) + (5 + i)}{3} = \frac{1}{3} + i$

(3) 線分 BC の中点 M

(4) $\triangle ABQ$ の重心 G

解答 (1) $-1 + \frac{14}{5}i$ (2) $\frac{7}{4} + \frac{13}{2}i$ (3) $-2i$ (4) $\frac{1}{4} + \frac{25}{6}i$

解説

(1) 点 P を表す複素数は $\frac{2(2 + 4i) + 3(-3 + 2i)}{3 + 2} = -1 + \frac{14}{5}i$

(2) 点 Q を表す複素数は $\frac{-5(2 + 4i) + 1 \cdot (3 - 6i)}{1 - 5} = \frac{7}{4} + \frac{13}{2}i$

(3) 点 M を表す複素数は $\frac{(-3 + 2i) + (3 - 6i)}{2} = -2i$

(4) 点 G を表す複素数は $\frac{(2 + 4i) + (-3 + 2i) + \left(\frac{7}{4} + \frac{13}{2}i\right)}{3} = \frac{1}{4} + \frac{25}{6}i$

8 3点 $A(-1 + 4i)$, $B(2 - i)$, $C(4 + 3i)$ について、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を $3:2$ に内分する点 P (2) 線分 AC を $2:1$ に外分する点 Q

(3) 線分 AC の中点 M

(4) 平行四辺形 $ABCD$ の頂点 D

(5) $\triangle ABC$ の重心 G

解答 (1) $\frac{4}{5} + i$ (2) $9 + 2i$ (3) $\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$ (4) $1 + 8i$ (5) $\frac{5}{3} + 2i$

解説

(1) 点 P を表す複素数は $\frac{2(-1 + 4i) + 3(2 - i)}{3 + 2} = \frac{4 + 5i}{5} = \frac{4}{5} + i$

(2) 点 Q を表す複素数は $\frac{-1 \cdot (-1 + 4i) + 2(4 + 3i)}{2 - 1} = 9 + 2i$

(3) 点 M を表す複素数は $\frac{(-1 + 4i) + (4 + 3i)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$

(4) 点 $D(\alpha)$ とすると、線分 AC の中点 M と線分 BD の中点が一致するから

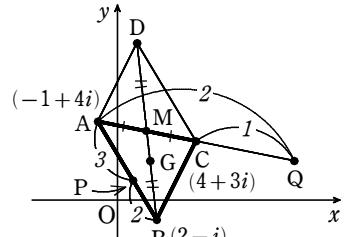
$$\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i = \frac{(2 - i) + \alpha}{2}$$

ゆえに $3 + 7i = 2 - i + \alpha$

よって $\alpha = 1 + 8i$

(5) 点 G を表す複素数は

$$\frac{(-1 + 4i) + (2 - i) + (4 + 3i)}{3} = \frac{5 + 6i}{3} = \frac{5}{3} + 2i$$



9 3点 $A(1 + 2i)$, $B(-3 - 2i)$, $C(6 + i)$ について、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 P (2) 線分 CA を $2:3$ に外分する点 Q

(3) 線分 BC の中点 M

(4) 平行四辺形 $ADBC$ の頂点 D

(5) $\triangle ABQ$ の重心 G

解答 (1) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ (2) $16 - i$ (3) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ (4) $-8 - i$ (5) $\frac{14}{3} - \frac{i}{3}$

解説

(1) 点 P を表す複素数は $\frac{2(1 + 2i) + 1 \cdot (-3 - 2i)}{1 + 2} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

(2) 点 Q を表す複素数は $\frac{-3(6+i)+2(1+2i)}{2-3} = 16-i$

(3) 点 M を表す複素数は $\frac{(-3-2i)+(6+i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

(4) 点 D(α) とすると、線分 AB の中点と線分 CD の中点は一致するから

$$\frac{(1+2i)+(-3-2i)}{2} = \frac{(6+i)+\alpha}{2}$$

ゆえに $-2 = 6+i+\alpha$ よって $\alpha = -8-i$

(5) 点 G を表す複素数は

$$\frac{(1+2i)+(-3-2i)+(16-i)}{3} = \frac{14}{3} - \frac{i}{3}$$

10 2点 A($-3+2i$), B($4-8i$) を結ぶ線分 AB に対して、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 中点

(2) 3:1 および 1:3 に内分する点

(3) 3:1 および 1:3 に外分する点

解答 (1) $\frac{1}{2}-3i$ (2) 順に $\frac{9}{4}-\frac{11}{2}i, -\frac{5}{4}-\frac{1}{2}i$

(3) 順に $\frac{15}{2}-13i, -\frac{13}{2}+7i$

解説

(1) $\frac{(-3+2i)+(4-8i)}{2} = \frac{1}{2}-3i$

(2) 3:1 に内分する点を表す複素数は

$$\frac{1 \cdot (-3+2i) + 3(4-8i)}{3+1} = \frac{9}{4} - \frac{11}{2}i$$

1:3 に内分する点を表す複素数は

$$\frac{3(-3+2i)+1 \cdot (4-8i)}{1+3} = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}i$$

(3) 3:1 に外分する点を表す複素数は

$$\frac{-1 \cdot (-3+2i)+3(4-8i)}{3-1} = \frac{15}{2}-13i$$

1:3 に外分する点を表す複素数は

$$\frac{-3(-3+2i)+1 \cdot (4-8i)}{1-3} = -\frac{13}{2}+7i$$

11 A($3-4i$), B($-2+3i$) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2:3 に内分する点 C (2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を 5:4 に外分する点 D

解答 (1) $\frac{5-6i}{5}$ (2) $\frac{1-i}{2}$ (3) $-22+31i$

解説

(1) $\frac{3(3-4i)+2(-2+3i)}{2+3} = \frac{5-6i}{5}$

(2) $\frac{(3-4i)+(-2+3i)}{2} = \frac{1-i}{2}$

(3) $\frac{-4(3-4i)+5(-2+3i)}{5-4} = -22+31i$

12 A($6-2i$), B($4+i$), C($5+6i$) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 4:3 に内分する点と、4:3 に外分する点

(2) $\triangle ABC$ の重心

解答 (1) 内分 $\frac{34-2i}{7}$, 外分 $-2+10i$ (2) $\frac{15+5i}{3}$

解説

(1) 内分する点を表す複素数は

$$\frac{3(6-2i)+4(4+i)}{4+3} = \frac{34-2i}{7}$$

外分する点を表す複素数は

$$\frac{-3(6-2i)+4(4+i)}{4-3} = -2+10i$$

(2) $\frac{(6-2i)+(4+i)+(5+6i)}{3} = \frac{15+5i}{3}$

13 O(0), A($-3+2i$), B($1-5i$) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2:1 に内分する点と、2:1 に外分する点

(2) $\triangle OAB$ の重心

解答 (1) 順に $-\frac{1+8i}{3}, 5-12i$ (2) $-\frac{2+3i}{3}$

解説

(1) 内分する点を表す複素数は

$$\frac{1 \cdot (-3+2i)+2(1-5i)}{2+1} = \frac{-1-8i}{3} = -\frac{1+8i}{3}$$

外分する点を表す複素数は

$$\frac{-1 \cdot (-3+2i)+2(1-5i)}{2-1} = 5-12i$$

(2) $\frac{0+(-3+2i)+(1-5i)}{3} = \frac{-2-3i}{3} = -\frac{2+3i}{3}$