角の大きさクイズ

1 3点A(1)，B$(-2+2i)$，C$(2-5i)$ に対して，半直線ABから半直線ACまでの回転角 θ を求める。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\alpha=1$，$\beta=-2+2i$，$\gamma=2-5i$ とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1-5i}{-3+2i}=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=-1+i$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{3}{4}\pi$

解説

2 3点A$(1-i)$，B$(2+i)$，C$(2i)$ に対して，半直線ABから半直線ACまでの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

解答　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

$\alpha=1-i$，$\beta=2+i$，$\gamma=2i$ とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1+i$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$

3 複素数平面上の3点A$(1+i)$，B$(-2-3i)$，C$(5-2i)$ を頂点とする△ABCについて，次のものを求めよ。

(1)　∠Aの大きさ　　(2)　外接円の中心を表す複素数 δ

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}$　　(2)　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$

解説

$\alpha=1+i$，$\beta=-2-3i$，$\gamma=5-2i$ とする。

(1) $$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{4-3i}{-3-4i}=-\frac{(4-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=i$$

$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$ より，△ABCの外接円の中心は，辺BCの中点である。

よって，求める複素数 δ は

$$\delta=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{(-2-3i)+(5-2i)}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

4 3点A$(-2-3i)$，B$(-5-7i)$，C$(5-2i)$ を頂点とする△ABCについて，∠BACの大きさを求めよ。　[15点]

解答　$\alpha=-2-3i$，$\beta=-5-7i$，$\gamma=5-2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{7+i}{-3-4i}=\frac{(7+i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=-1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1+i$ を極形式で表すと

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}\pi$

解説

$\alpha=-2-3i$，$\beta=-5-7i$，$\gamma=5-2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{7+i}{-3-4i}=\frac{(7+i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=-1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1+i$ を極形式で表すと

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}\pi$

5 $\alpha=2+i$，$\beta=1+3i$ とする。3点O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする△OABについて，∠AOBの大きさを求めよ。

解答　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

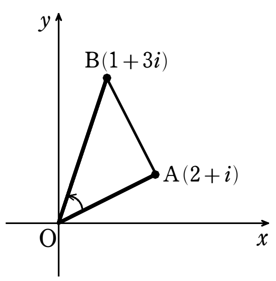
$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$1+i$ を極形式で表すと

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$ から　　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$



6 複素数平面上の次の3点A，B，Cについて，∠BACの大きさと△ABCの面積を求めよ。

(1)　A(0)，B$(2+i)$，C$(1+3i)$　　(2)　A(i)，B$(2\sqrt{3}+3i)$，C$(\sqrt{3}+4i)$

解答　順に　(1)　$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{2}$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}$，$2\sqrt{3}$

解説

(1)　$\alpha=0$，$\beta=2+i$，$\gamma=1+3i$ とする。

$-\pi<\angle\beta\alpha\gamma\leqq\pi$ の範囲で考えると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5+5i}{5}$$

$$=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{4}$

また　$\mathrm{AB}=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\mathrm{AC}=|1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

ゆえに，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}$$

(2)　$\alpha=i$，$\beta=2\sqrt{3}+3i$，$\gamma=\sqrt{3}+4i$ とする。

$-\pi<\angle\beta\alpha\gamma\leqq\pi$ の範囲で考えると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\sqrt{3}+3i}{2\sqrt{3}+2i}=\frac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-i)}{2(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{3}\,i}{8}=\frac{3+\sqrt{3}\,i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{6}$

また　$\mathrm{AB}=|(2\sqrt{3}+3i)-i|=|2\sqrt{3}+2i|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$\mathrm{AC}=|(\sqrt{3}+4i)-i|=|\sqrt{3}+3i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$

ゆえに，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$

7 複素数平面上の次の3点A，B，Cを頂点とする△ABCについて，∠BACの大きさを求めよ。

(1)　A$(3+2i)$，B$(5+3i)$，C$(4+5i)$

(2)　A$(3-2\sqrt{3}\,i)$，B$(5-\sqrt{3}\,i)$，C$(4-5\sqrt{3}\,i)$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$\alpha=3+2i$，$\beta=5+3i$，$\gamma=4+5i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$1+i$ を極形式で表すと

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{4}$

(2)　$\alpha=3-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=5-\sqrt{3}\,i$，$\gamma=4-5\sqrt{3}\,i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1-3\sqrt{3}\,i}{2+\sqrt{3}\,i}=\frac{(1-3\sqrt{3}\,i)(2-\sqrt{3}\,i)}{(2+\sqrt{3}\,i)(2-\sqrt{3}\,i)}$$

$$=\frac{-7-7\sqrt{3}\,i}{7}=-1-\sqrt{3}\,i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1-\sqrt{3}\,i$ を極形式で表すと

$$-1-\sqrt{3}\,i=2\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$

8 3点A$(1+3i)$，B$(-2+5i)$，C$(2-2i)$ を頂点とする△ABCについて，∠BACの大きさを求めよ。

解答　$\angle \mathrm{BAC}=\frac{3}{4}\pi$

解説

$\alpha=1+3i$，$\beta=-2+5i$，$\gamma=2-2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1-5i}{-3+2i}=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$
$$=\frac{-13+13i}{13}=-1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1+i$ を極形式で表すと

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　$\angle \mathrm{BAC}=\frac{3}{4}\pi$

9 3点O，A$(2+\sqrt{3}i)$，B$(-1+3\sqrt{3}i)$ について，半直線OAから半直線OBまでの回転角 θ を求める。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\alpha=2+\sqrt{3}i$，$\beta=-1+3\sqrt{3}i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1+3\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}=\frac{(-1+3\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}=1+\sqrt{3}i$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって　$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{3}$

解説

10 3点O，A$(-1+2i)$，B$(1+3i)$ について，半直線OAから半直線OBまでの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

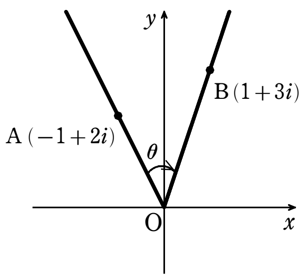
解答　$\theta=-\frac{\pi}{4}$

解説

$\alpha=-1+2i$，$\beta=1+3i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1+3i}{-1+2i}=\frac{(1+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$
$$=1-i$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

よって　$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\pi}{4}$



11 3点A$(1+2i)$，B$(3+i)$，C$(4+3i)$ に対して，半直線ABから半直線ACまでの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

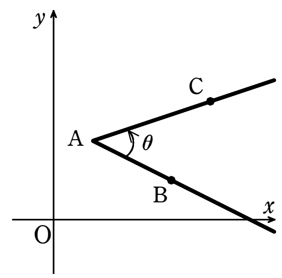
解答　$\theta=\frac{\pi}{4}$

解説

$\alpha=1+2i$，$\beta=3+i$，$\gamma=4+3i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=1+i$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{4}$



12 3点O，A$(2+3i)$，B$(-6+4i)$ について，半直線OAから半直線OBまでの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。　[10点]

解答　$\alpha=2+3i$，$\beta=-6+4i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-6+4i}{2+3i}=\frac{(-6+4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

よって　$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$

解説

$\alpha=2+3i$，$\beta=-6+4i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-6+4i}{2+3i}=\frac{(-6+4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

よって　$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$

13 3点A$(3+4i)$，B$(7+i)$，C$(4\sqrt{3}-3\sqrt{3}i)$ に対して，半直線ABから半直線ACまでの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。　[15点]

解答　$\alpha=3+4i$，$\beta=7+i$，$\gamma=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$ とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(4\sqrt{3}-3)+(-3\sqrt{3}-4)i}{4-3i}=\frac{\{(4\sqrt{3}-3)+(-3\sqrt{3}-4)i\}(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$$
$$=\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

よって　$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\frac{\pi}{6}$

解説

$\alpha=3+4i$，$\beta=7+i$，$\gamma=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$ とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(4\sqrt{3}-3)+(-3\sqrt{3}-4)i}{4-3i}=\frac{\{(4\sqrt{3}-3)+(-3\sqrt{3}-4)i\}(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$$
$$=\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

よって　$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\frac{\pi}{6}$

14 (1)　2点 $z=3+i$，$w=2-i$ に対して，点 z を点 w を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(2)　点 $3-2i$ を点 $1+i$ を中心として角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ だけ回転した点を表す複素数が $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$ であるとき，θ の値を求めよ。

解答　(1)　$\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$　　(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　求める複素数を z' とすると

$$z'=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{3+i-(2-i)\}+2-i$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1+2i)+2-i$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　点 $3-2i$ を点 $1+i$ を中心として角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ だけ回転した点を表す複素数を z' とすると

$$z'=(\cos\theta+i\sin\theta)\{3-2i-(1+i)\}+1+i$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)(2-3i)+1+i$$
$$=2\cos\theta+3\sin\theta+1+(-3\cos\theta+2\sin\theta+1)i$$

ゆえに　$2\cos\theta+3\sin\theta+1=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$，$-3\cos\theta+2\sin\theta+1=\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$

よって　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$

15 3点O，A$(3+\sqrt{3}i)$，B$(6-2\sqrt{3}i)$ について，半直線OAから半直線OBまでの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

解答　$-\frac{\pi}{3}$

解説

$\alpha=3+\sqrt{3}i$，$\beta=6-2\sqrt{3}i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{6-2\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{(6-2\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}$$
$$=1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

よって　$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\pi}{3}$

16 次の3点A，B，Cに対して，半直線ABから半直線ACまでの回転角 θ を求めよ。

(1)　A$(-2-3i)$，B$(5-2i)$，C$(1+i)$　　(2)　A$(3+2i)$，B$(-3-4i)$，C$(6-i)$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{4}$　　(2)　$\theta=\frac{\pi}{2}$

解説

(1)　$\alpha=-2-3i$，$\beta=5-2i$，$\gamma=1+i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3+4i}{7+i}=\frac{(3+4i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\frac{25+25i}{50}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{4}$

(2)　$\alpha=3+2i$，$\beta=-3-4i$，$\gamma=6-i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3-3i}{-6-6i}=\frac{1-i}{-2(1+i)}$$

$$=\frac{(1-i)^2}{-2(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{-4}=\frac{i}{2}$$

$\frac{i}{2}$ は純虚数であるから　　$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{17}$ 3 点 O，A $(2\sqrt{3}-i)$，B $(7+\sqrt{3}\,i)$ について，半直線 OA から半直線 OB までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

解答　$\theta=\frac{\pi}{6}$

解説

$\alpha=2\sqrt{3}-i$，$\beta=7+\sqrt{3}\,i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{7+\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}-i}=\frac{(7+\sqrt{3}\,i)(2\sqrt{3}+i)}{(2\sqrt{3}-i)(2\sqrt{3}+i)}$$

$$=\frac{13\sqrt{3}+13i}{13}=\sqrt{3}+i$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって　　$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{6}$