極形式クイズ

1 複素数 $1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表せ。

解答 $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

解説

$1+\sqrt{3}\,i$ の絶対値を r，偏角を θ とすると

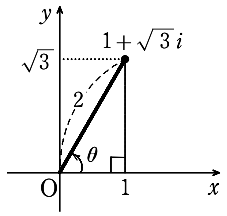
$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

よって　$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$



2 複素数 $\sqrt{3}-i$ を極形式で表せ。

解答 $2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

解説

$\sqrt{3}-i$ の絶対値を r，偏角を θ とすると

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\theta=-\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$\theta=\dfrac{11}{6}\pi$

よって　$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

3 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $1+i$　(2) $1-i$　(3) $-1-\sqrt{3}\,i$　(4) $-2\sqrt{3}+2i$

(5) 1　(6) -1　(7) i　(8) $-i$

解答 (1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$　(4) $4\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$　(5) $\cos 0+i\sin 0$

(6) $\cos\pi+i\sin\pi$　(7) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$　(8) $\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

解説

複素数の絶対値を r，偏角を $\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とする。

(1) $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

よって　$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3) $r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

よって　$-1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

(4) $r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=4$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$-2\sqrt{3}+2i=4\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

(5) $1=\cos 0+i\sin 0$

(6) $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

(7) $i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

(8) $-i=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

4 $\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

解説

5 $\alpha=2+2i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。

解答 $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

解説

$$\alpha=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\beta=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって

$$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

6 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $2i$　(2) -5　(3) $-\sqrt{3}+i$　(4) $\dfrac{3\sqrt{3}+3i}{2}$

解答 (1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$　(3) $2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

(4) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

解説

(1) $2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $-5=5(\cos\pi+i\sin\pi)$

(3) $-\sqrt{3}+i=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

(4) $\dfrac{3\sqrt{3}+3i}{2}=3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

7 次の問いに答えよ。[(1) 各 10 点　(2) 10 点　(3) 10 点]

(1) 次の複素数を極形式で表せ。

① $-1+i$　② $-\sqrt{3}-i$

(2) $\alpha=2+2\sqrt{3}\,i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha\beta$ と $\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。

(3) 点 $(-1-\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z をどのように移動した点であるか。

解答 (1) 複素数の絶対値を r，偏角を θ とする。

① $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

② $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$

よって　$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

(2) $\alpha=4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

(3) $-1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

よって，点 z を原点を中心として $\dfrac{4}{3}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点である。

解説

(1) 複素数の絶対値を r，偏角を θ とする。

① $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

②　$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

よって　$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

(2)　$\alpha=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

(3)　$-1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

よって，点 z を原点を中心として $\frac{4}{3}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点である。

$\boxed{8}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角を $\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とする。

(1)　$1+i$　　(2)　i　　(3)　-2

解答　(1)　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$　　(2)　$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$　　(3)　$2(\cos\pi+i\sin\pi)$

解説

(1)　絶対値 r は　$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

偏角 θ について　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{4}$

したがって　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(2)　絶対値 r は　$r=\sqrt{0^2+1^2}=1$

偏角 θ について　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{2}$

したがって　$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

(3)　絶対値 r は　$r=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

偏角 θ について　$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\pi$

したがって　$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\boxed{9}$ 次の複素数 z を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　(2)　$z=2+2\sqrt{3}\,i$　　(3)　$z=\cos\frac{3}{4}\pi-i\sin\frac{3}{4}\pi$

解答　(1)　$z=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$　　(2)　$z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(3)　$z=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi$

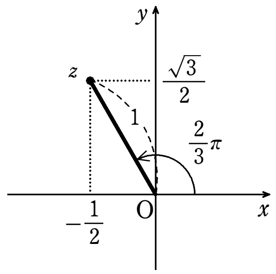
解説

(1)　絶対値 r は　$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

偏角 θ について　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

よって　$z=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$



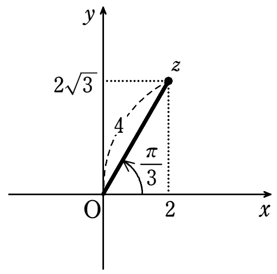
(2)　絶対値 r は　$r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

偏角 θ について

$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$

よって　$z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



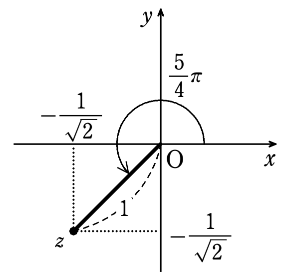
(3)　$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ であるから，絶対値 r は

$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

偏角 θ について　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{5}{4}\pi$

よって　$z=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi$



$\boxed{10}$ 次の複素数 z を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$　　(2)　$z=2+2i$　　(3)　$z=-\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

解答　(1)　$z=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$　　(2)　$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(3)　$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

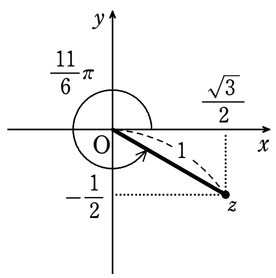
解説

(1)　絶対値 r は　$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$

偏角 θ について　$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{11}{6}\pi$

したがって　$z=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$



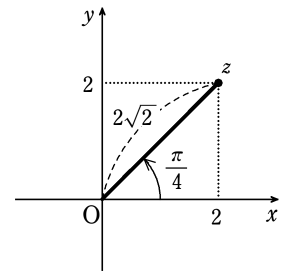
(2)　絶対値 r は　$r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

偏角 θ について

$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{4}$

したがって　$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



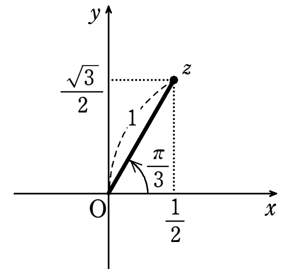
(3)　$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから

絶対値 r は　$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

偏角 θ について　$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$

したがって　$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$



別解　$z=-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$\boxed{11}$ $\alpha=\sqrt{3}+i$，$\beta=2-2i$ のとき，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

解説

α の絶対値 r_1 は　$r_1=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

α の偏角 $\theta_1\ (0\leqq\theta_1<2\pi)$ は，$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta_1=\frac{1}{2}$ から　$\theta_1=\frac{\pi}{6}$

よって　$\alpha=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

また，β の絶対値 r_2 は　$r_2=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

β の偏角 $\theta_2\ (0\leqq\theta_2<2\pi)$ は，$\cos\theta_2=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta_2=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ から　$\theta_2=\frac{7}{4}\pi$

ゆえに　$\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

よって　$\alpha\beta=2\cdot2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{7}{4}\pi\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7}{4}\pi\right)\right\}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{19}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{19}{12}\pi\right)\right\}$

$-\frac{19}{12}\pi=\frac{5}{12}\pi+2\pi\times(-1)$ から　$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

12 次の2つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$ と $\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\alpha=-1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=2+2i$　　(2) $\alpha=2+2\sqrt{3}\,i$，$\beta=-1+i$

解答 (1) $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11}{12}\pi+i\sin\dfrac{11}{12}\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

(2) $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19}{12}\pi+i\sin\dfrac{19}{12}\pi\right)$

解説

(1) α の絶対値 r_1 は　$r_1=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

α の偏角 θ_1 $(0\leqq\theta_1<2\pi)$ は $\cos\theta_1=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\theta_1=\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\alpha=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

また，β の絶対値 r_2 は　$r_2=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

β の偏角 θ_2 $(0\leqq\theta_2<2\pi)$ は

$\cos\theta_2=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta_2=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに　$\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって

$$\alpha\beta=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\cdot2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

(2) α の絶対値 r_1 は　$r_1=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

α の偏角 θ_1 $(0\leqq\theta_1<2\pi)$ は $\cos\theta_1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\alpha=4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

また，β の絶対値 r_2 は　$r_2=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

β の偏角 θ_2 $(0\leqq\theta_2<2\pi)$ は $\cos\theta_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$\theta_2=\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに　$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって

$$\alpha\beta=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=4\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=\frac{4}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right\}$$

$-\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{19}{12}\pi+2\pi\times(-1)$ であるから　$\dfrac{\alpha}{\beta}=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19}{12}\pi+i\sin\dfrac{19}{12}\pi\right)$

13 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $-1+\sqrt{3}\,i$　　(2) $-2i$　　(3) $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$2\bar{z}$

解答 (1) $2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$　(2) $2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\dfrac{9}{5}\pi+i\sin\dfrac{9}{5}\pi\right)$

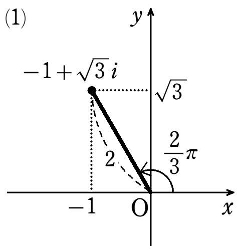
解説

(1) 絶対値は　$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

偏角 θ は　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

したがって　$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

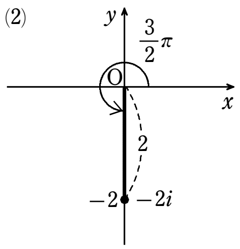
(1)


(2) 絶対値は　$\sqrt{(-2)^2}=2$

偏角 θ は　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

したがって　$-2i=2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

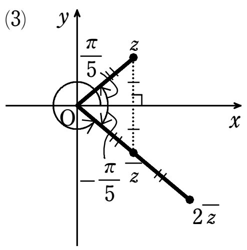
(2)


(3) z の絶対値は　$\sqrt{\cos^2\dfrac{\pi}{5}+\sin^2\dfrac{\pi}{5}}=1$，　偏角は $\dfrac{\pi}{5}$

点 $2\bar{z}$ は，点 z を実軸に関して対称移動し，原点からの距離を2倍した点である。

よって，$2\bar{z}$ の　絶対値は　2，偏角は　$2\pi-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{9}{5}\pi$

したがって　$2\bar{z}=2\left(\cos\dfrac{9}{5}\pi+i\sin\dfrac{9}{5}\pi\right)$

(3)


14 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $2-2i$　　(2) -3　　(3) $\cos\dfrac{2}{3}\pi-i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

解答 (1) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$　(2) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$

(3) $\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

解説

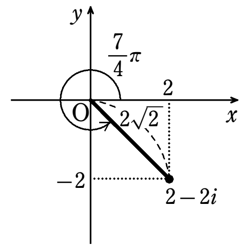
(1) 絶対値は　$\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

偏角 θ は　$\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

したがって　$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

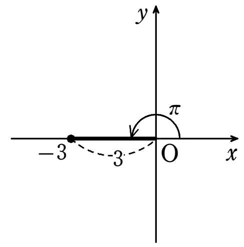


(2) 絶対値は　$\sqrt{(-3)^2}=3$

偏角 θ は　$\cos\theta=\dfrac{-3}{3}=-1$，$\sin\theta=\dfrac{0}{3}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\pi$

したがって　$-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$



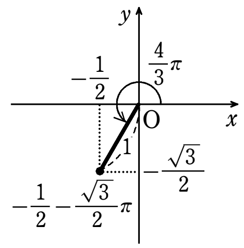
(3) $\cos\dfrac{2}{3}\pi-i\sin\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

絶対値は　$\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

偏角 θ は　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

したがって　$\cos\dfrac{2}{3}\pi-i\sin\dfrac{2}{3}\pi=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$



別解 等式 $\cos(\pi-\theta)=\cos(\pi+\theta)$，$\sin(\pi-\theta)=-\sin(\pi+\theta)$ において，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とすると　$\cos\dfrac{2}{3}\pi=\cos\dfrac{4}{3}\pi$，$\sin\dfrac{2}{3}\pi=-\sin\dfrac{4}{3}\pi$

したがって　$\cos\dfrac{2}{3}\pi-i\sin\dfrac{2}{3}\pi=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

15 $\alpha=2+2i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答 $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23}{12}\pi+i\sin\dfrac{23}{12}\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

解説

$\alpha=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$\beta=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$　と表される。

よって

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$$
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17}{12}\pi\right)\right\}$$

$-\frac{17}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi+2\pi\times(-1)$ から　　$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

16 次の2つの複素数 α，β について，積 $\alpha\beta$ と商 $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\alpha=-1+i$，$\beta=3+\sqrt{3}i$　　　(2) $\alpha=-2+2i$，$\beta=-1-\sqrt{3}i$

解答　(1) $\alpha\beta=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

(2) $\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$

解説

(1) α，β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$\beta=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって　$\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$$=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

(2) α，β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$\beta=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

よって　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25}{12}\pi+i\sin\frac{25}{12}\pi\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

17 (1) $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とするとき，$\alpha+i$ の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を求めよ。

(2) $\alpha+i$ の絶対値に注目することにより，$\cos\frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

解答　(1) $\theta=\frac{3}{8}\pi$　　(2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

解説

(1) $\alpha=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ から

$$\alpha+i=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\cos\frac{3}{8}\pi\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}=2\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\sin\frac{3}{8}\pi\cos\frac{\pi}{8}$$

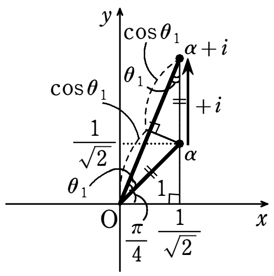
であるから　　$\alpha+i=2\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$　……①

$2\cos\frac{\pi}{8}>0$ から，① が $\alpha+i$ の極形式で，偏角は　　$\theta=\frac{3}{8}\pi$

別解　図で考える。

$2\theta_1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ から　　$\theta_1=\frac{\pi}{8}$

求める偏角は　　$\frac{\pi}{4}+\theta_1=\frac{3}{8}\pi$



(2) $\alpha+i=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)+i=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1+(1+\sqrt{2})i\}$ であるから

$$|\alpha+i|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1^2+(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(1) から　　$|\alpha+i|=2\cos\frac{\pi}{8}$

よって，$2\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ から　　$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

18 (1) $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ とするとき，$\alpha-1$ を極形式で表せ。

(2) (1) の結果を利用して，$\cos\frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

解答　(1) $2\cos\frac{5}{12}\pi\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$　　(2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

(1) $\alpha=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，$-1=\cos\pi+i\sin\pi$ であるから

$$\alpha-1=\left(\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right)+i\left(\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

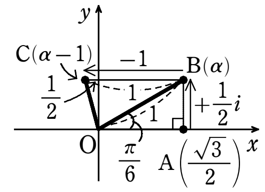
$$=2\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+i\cdot2\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{7}{12}\pi\cos\frac{5}{12}\pi+2i\sin\frac{7}{12}\pi\cos\frac{5}{12}\pi$$

$$=2\cos\frac{5}{12}\pi\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)\quad\cdots\cdots①$$

$\cos\frac{5}{12}\pi>0$ であるから，① が α の極形式である。

別解　図のように，$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(\alpha)$，$C(\alpha-1)$ とすると



$$BO=BC=1,\ \angle OBC=\angle AOB=\frac{\pi}{6}$$

よって　　$\angle BOC=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{12}\pi$

ゆえに　　$\angle AOC=\frac{\pi}{6}+\frac{5}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi$

また　　$OC=2\cdot OB\cos\angle BOC=2\cos\frac{5}{12}\pi$

よって　　$\alpha-1=2\cos\frac{5}{12}\pi\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

(2) $\alpha-1=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)-1=\frac{\sqrt{3}-2}{2}+\frac{1}{2}i$

よって　　$|\alpha-1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot2}}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

(1) より，　$|\alpha-1|=2\cos\frac{5}{12}\pi$ であるから　　$2\cos\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

したがって　　$\cos\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

19 (1) 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(ア) $\frac{7-i}{-3+4i}$　　　　(イ) $\sin\alpha+i\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

(2) z を虚数とする。$z+\frac{1}{z}$ が実数となるとき，$|z|=1$ であることを示せ。また，$z+\frac{1}{z}$ が自然数となる z をすべて求めよ。

解答　(1) (ア) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$　　(イ) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

(2) 証明略，$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) (ア) $\frac{7-i}{-3+4i}=\frac{(7-i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-25-25i}{25}=-1-i$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

(イ) $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ であり，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から

$$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$$

よって　　$\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

(2) $z+\frac{1}{z}$ が実数となるとき　　$\overline{z+\frac{1}{z}}=z+\frac{1}{z}$　すなわち　$\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}=z+\frac{1}{z}$

両辺に $z\overline{z}$ を掛けて　　$z(\overline{z})^2+z=z^2\overline{z}+\overline{z}$

したがって　　$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

z は虚数であるから　　$z\neq\overline{z}$

よって，$|z|^2-1=0$ から　　$|z|^2=1$　　　$|z|>0$ であるから　　$|z|=1$

また，$z+\frac{1}{z}$ が自然数となるとき，$|z|=1$ から，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表される。

ここで，z は虚数であるから　$\sin\theta \neq 0$

$\dfrac{1}{z}=\cos\theta - i\sin\theta$ であるから　$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$　……①

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，①が自然数となるための条件は，$2\cos\theta=1$，2 より

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ 1$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=1$ のとき　$\sin\theta=0$　これは不適。

したがって，求める z の値は　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

20 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $-1+i$　(2) $2-2i$　(3) $-\sqrt{3}-i$

(4) $2+2\sqrt{3}\,i$　(5) -3　(6) $4i$

解答 (1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$　(2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$　(4) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(5) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$　(6) $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

解説

与えられた複素数の絶対値を r とする。

(1) $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$　よって　$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

(2) $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$　よって　$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3) $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$　よって　$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

(4) $r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，$\cos\theta=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$　よって　$2+2\sqrt{3}\,i=4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

(5) $r=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{3}=-1$，$\sin\theta=\dfrac{0}{3}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\pi$　よって　$-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$

(6) $r=\sqrt{0^2+2^2}=2$，$\cos\theta=\dfrac{0}{2}=0$，$\sin\theta=\dfrac{2}{2}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　よって　$2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

21 次の 2 つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=2+2i$　(2) $\alpha=-2\sqrt{3}+2i$，$\beta=-1+i$

解答 $\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に

(1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

(2) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$，$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

解説

(1) $\alpha=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\beta=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって

$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

(2) $\alpha=4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって

$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19}{12}\pi+i\sin\dfrac{19}{12}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

22 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\dfrac{4+3i}{1+7i}$　(2) $\sqrt{3}+\dfrac{1-i}{1+i}$　(3) $-4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(4) $\cos\dfrac{2}{3}\pi-i\sin\dfrac{2}{3}\pi$　(5) $2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$　(2) $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

(3) $4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$　(4) $\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

(5) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

解説

(1) 与式$=\dfrac{(4+3i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)}=\dfrac{4+(-28+3)i-21i^2}{1^2+7^2}=\dfrac{1-i}{2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(2) 与式$=\sqrt{3}+\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\sqrt{3}+\dfrac{1^2-2i+i^2}{1^2+1^2}=\sqrt{3}-i$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

(3) 与式$=4(\cos\pi+i\sin\pi)\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=4\left\{\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=4\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

別解 与式$=4\left(-\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=4\left\{\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=4\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

(4) 与式$=\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

(5) 与式$=2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

23 $\alpha=-1+i$，$\beta=2\sqrt{3}+2i$ のとき，次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) α　(2) β　(3) $\alpha\beta$　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

解答 (1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$　(2) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(3) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$　(4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

解説

(1) α の絶対値は　$|\alpha|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

また　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

(2) β の絶対値は　$|\beta|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$

また　$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\beta=4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(3) $\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot4\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11}{12}\pi+i\sin\dfrac{11}{12}\pi\right)$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

24 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $-1+\sqrt{3}\,i$　(2) $3-3i$　(3) $-\sqrt{3}-i$

(4) $\sqrt{6}+\sqrt{6}\,i$　(5) $\sqrt{5}$　(6) $-3i$

解答 (1) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$　(2) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$　(4) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(5) $\sqrt{5}(\cos0+i\sin0)$　(6) $3\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

解説

絶対値を r とする。

(1) $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

(2) $r=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\theta=-\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

よって　$3-3i=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3) $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$

よって　$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

(4) $r=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\sqrt{6}+\sqrt{6}\,i=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(5) $r=\sqrt{5}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$，$\sin\theta=\dfrac{0}{\sqrt{5}}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=0$

よって　$\sqrt{5}=\sqrt{5}(\cos 0+i\sin 0)$

(6) $r=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$

$\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$，　$\sin\theta=-\dfrac{3}{3}=-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$-3i=3\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

25 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は，(1)～(4)では $0\leqq\theta<2\pi$，(5)，(6)では $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $3+3i$　　(2) $\sqrt{3}-i$　　(3) $5i$

(4) -4　　(5) $-1-i$　　(6) $\sqrt{3}-3i$

解答 (1) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(2) $2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

(3) $5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(4) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$

(5) $\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$　　(6) $2\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

解説

(1) $3+3i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$3+3i=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\sqrt{3}-i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{11}{6}\pi$

よって　$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

(3) $5i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{0^2+5^2}=5$

$\cos\theta=\dfrac{0}{5}=0$，$\sin\theta=\dfrac{5}{5}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって　$5i=5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4) -4 の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$

$\cos\theta=-\dfrac{4}{4}=-1$，$\sin\theta=\dfrac{0}{4}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\pi$

よって　$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

(5) $-1-i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\pi<\theta\leqq\pi$ では　$\theta=-\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

(6) $\sqrt{3}-3i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$-\pi<\theta\leqq\pi$ では　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

26 次の2つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\alpha=6+6i$，$\beta=\sqrt{3}+i$　　(2) $\alpha=-2-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=-1+i$

解答 $\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に

(1) $12\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$，$3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

(2) $4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

解説

(1) $\alpha=6\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=6\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\beta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって　$\alpha\beta=12\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=12\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

(2) $\alpha=4\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{25}{12}\pi+i\sin\dfrac{25}{12}\pi\right)$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

27 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\dfrac{3+2i}{1+5i}$　　(2) $-\dfrac{i}{1+\sqrt{3}\,i}$　　(3) $\cos\dfrac{4}{3}\pi-i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

解答 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$　　(2) $\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

(3) $\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1) $\dfrac{3+2i}{1+5i}=\dfrac{(3+2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}=\dfrac{3-15i+2i-10i^2}{1^2+5^2}$

$=\dfrac{13-13i}{26}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

(2) $-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$，$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$-\frac{i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

別解 $-\frac{i}{1+\sqrt{3}\,i}=-\frac{i(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}=-\frac{i-\sqrt{3}\,i^2}{1^2+(\sqrt{3})^2}$

$$=-\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

(3) $\cos\frac{4}{3}\pi-i\sin\frac{4}{3}\pi=\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

28 複素数 $-1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答 $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

解説

$-1+\sqrt{3}\,i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,\ \cos\theta=-\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

よって　$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

29 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は，(1)〜(5) では $0\leqq\theta<2\pi$，(6)，(7) では $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $-1+i$　(2) $-3-\sqrt{3}\,i$　(3) $\sqrt{5}(1-i)$　(4) -4

(5) $3i$　(6) $2\sqrt{3}-2i$　(7) $-3-3i$

解答 (1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$　(2) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

(3) $\sqrt{10}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$　(4) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$

(5) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$　(6) $4\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

(7) $3\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$

解説

与えられた複素数の絶対値を r とする。

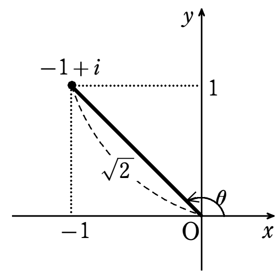
(1) $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{3}{4}\pi$

よって　$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$



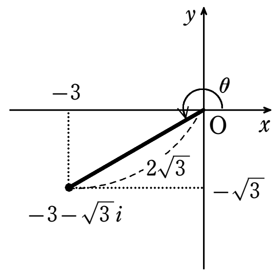
(2) $r=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

よって　$-3-\sqrt{3}\,i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$



(3) $\sqrt{5}(1-i)=\sqrt{5}-\sqrt{5}\,i$ であるから

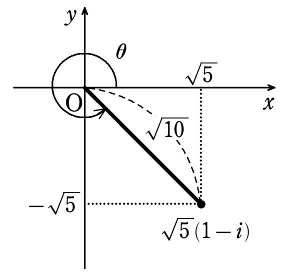
$r=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-\sqrt{5})^2}=\sqrt{10}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta=\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{7}{4}\pi$

よって　$\sqrt{5}(1-i)=\sqrt{10}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$



別解 $1-i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{7}{4}\pi$

したがって　$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

よって　$\sqrt{5}(1-i)=\sqrt{10}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

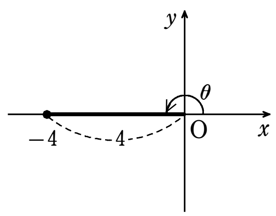
(4) $r=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$

$\cos\theta=\frac{-4}{4}=-1$，

$\sin\theta=\frac{0}{4}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\pi$

よって　$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$



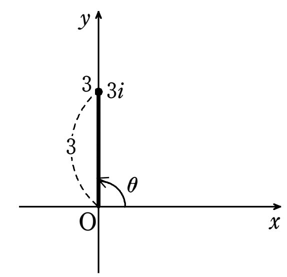
(5) $r=\sqrt{0^2+3^2}=3$

$\cos\theta=\frac{0}{3}=0$，

$\sin\theta=\frac{3}{3}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{\pi}{2}$

よって　$3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$



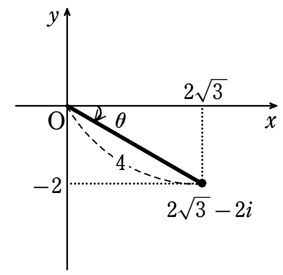
(6) $r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{16}=4$

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin\theta=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

$-\pi<\theta\leqq\pi$ では　$\theta=-\frac{\pi}{6}$

よって　$2\sqrt{3}-2i=4\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$



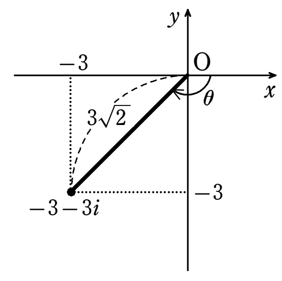
(7) $r=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\pi<\theta\leqq\pi$ では　$\theta=-\frac{3}{4}\pi$

よって　$-3-3i=3\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$



30 次の複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\alpha=\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi$，$\beta=\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi$

(2) $\alpha=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$，$\beta=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

解答 $\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ の順に

(1) $\cos\pi+i\sin\pi$，$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

(2) $8\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$，$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

解説

(1) $\alpha\beta=\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{5}{12}\pi\right)=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\cos\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{5}{12}\pi\right)=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

(2) $\alpha\beta=8\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=8\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{4}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

31 次の複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\alpha=-4+4i$，$\beta=-1+\sqrt{3}\,i$　　(2) $\alpha=-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$，$\beta=1+i$

解答　$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に

(1) $8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{17}{12}\pi+i\sin\dfrac{17}{12}\pi\right)$，$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

(2) $4\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$，$2\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

解説

(1) $\alpha=4\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$\beta=2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

よって

$$\alpha\beta=8\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

(2) $\alpha=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって

$$\alpha\beta=4\left\{\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=4\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

32 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\dfrac{1+i}{1-i}$　　(2) $1+\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}$　　(3) $-4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

解答　(1) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$　　(2) $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(3) $4\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

解説

(1) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1^2+1^2}=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

(2)
$$1+\frac{2}{1-\sqrt{3}\,i}=1+\frac{2(1+\sqrt{3}\,i)}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}$$
$$=1+\frac{2(1+\sqrt{3}\,i)}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{3+\sqrt{3}\,i}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(3)
$$-4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=4\left\{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

別解1
$$-4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4(\cos\pi+i\sin\pi)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=4\left\{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

別解2
$$-4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$