回転クイズ

$\boxed{1}$ 複素数平面上の 3 点 O (0)，A $(3+i)$，B について，△OAB が正三角形となるとき，点 B を表す複素数を求めよ。

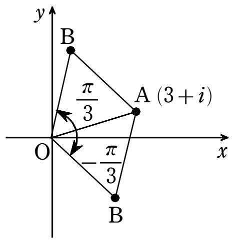
解答　$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}i$　または　$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}i$

解説

点 B は，点 A を原点を中心として

$\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$

だけ回転した点である。



点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(3+i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+i)$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+3\sqrt{3}}{2}i$$

点 A を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(3+i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+i)$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-3\sqrt{3}}{2}i$$

したがって，点 B を表す複素数は

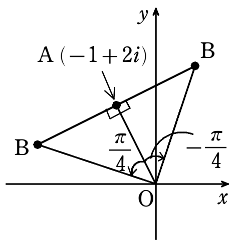
$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}i$　または　$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{2}$ 複素数平面上の 3 点 O(0)，A$(-1+2i)$，B について，△OAB が A を直角の頂点とする直角二等辺三角形となるとき，点 B を表す複素数を求めよ。

解答　$-3+i$　または　$1+3i$

解説

点 B は，点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ または $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。



点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点を表す複素数は

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(-1+2i)$$
$$=(1+i)(-1+2i)=-3+i$$

点 A を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点を表す複素数は

$$\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(-1+2i)$$
$$=(1-i)(-1+2i)=1+3i$$

したがって，点 B を表す複素数は

$-3+i$　または　$1+3i$

$\boxed{3}$ $\alpha=2+3i$，$\beta=4+i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めてみよう。

$$\gamma-(2+3i)=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{(4+i)-(2+3i)\}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)$$
$$=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

よって　$\gamma=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i+(2+3i)$
$=(3+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})i$

解説

$\boxed{4}$ $\alpha=-2+i$，$\beta=1-3i$ とする。次の複素数を求めよ。

(1)　点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を表す複素数 γ

(2)　点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 δ

解答　(1)　$\gamma=2+4i$　　(2)　$\delta=-\dfrac{1-4\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}i$

解説

(1)　$\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)(\beta-\alpha)$ から

$$\gamma-(-2+i)=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\{(1-3i)-(-2+i)\}$$
$$=i(3-4i)=4+3i$$

よって　$\gamma=(4+3i)+(-2+i)=2+4i$

(2)　$\delta-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$ から

$$\delta-(-2+i)=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(1-3i)-(-2+i)\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-4i)$$
$$=\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)+\left(-2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

よって　$\delta=\left(\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)+\left(-2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i+(-2+i)$

$=\left(2\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-1\right)i$　より　$\delta=-\dfrac{1-4\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{5}$ 複素数平面上で，$1+2i$，5 を表す点をそれぞれ B，C とする。このとき，BC を 1 辺とする正三角形 ABC の，頂点 A を表す複素数を求めよ。

解答　$(3+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$，$(3-\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$

解説

A(α)，$\beta=1+2i$，$\gamma=5$ とする。

点 A は，点 B を中心として点 C を $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

点 B を中心として点 C を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 α について

$\alpha-\beta=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\gamma-\beta)$ から

$$\alpha-(1+2i)=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{5-(1+2i)\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(2+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})i$$

よって　$\alpha=(2+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})i+(1+2i)$
$=(3+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$

点 B を中心として点 C を $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 α について

$\alpha-\beta=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(\gamma-\beta)$ から

$$\alpha-(1+2i)=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{5-(1+2i)\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(2-\sqrt{3})+(-1-2\sqrt{3})i$$

よって　$\alpha=(2-\sqrt{3})+(-1-2\sqrt{3})i+(1+2i)$
$=(3-\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$

したがって　$\alpha=(3+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$，$(3-\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$

$\boxed{6}$ 点 $2-i$ を原点を中心として $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。[10 点]

解答　$(2-i)\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)=(2-i)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}+\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}i=-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}i$

解説

$$(2-i)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=(2-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}-2}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i=-\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i$$

$\boxed{7}$ $\alpha=2-i$，$\beta=3+2i$ とする。点 α を中心に点 β を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。[15 点]

解答　$\gamma-(2-i)=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\{(3+2i)-(2-i)\}$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)(1+3i)=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$

よって　$\gamma=(2-i)+(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)=(2-\sqrt{2})+(-1+2\sqrt{2})i=(2-\sqrt{2})-(1-2\sqrt{2})i$

解説

$$\gamma-(2-i)=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\{(3+2i)-(2-i)\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(1+3i)=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$$

よって　$\gamma=(2-i)+(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)=(2-\sqrt{2})+(-1+2\sqrt{2})i=(2-\sqrt{2})-(1-2\sqrt{2})i$

8 複素数平面上で，$2+i$，$1-2i$ を表す点をそれぞれ B，C とする。このとき，BC を 1 辺とする $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC の，頂点 A を表す複素数を求めよ。[20 点]

解答　$\mathrm{A}(\alpha)$，$\beta=2+i$，$\gamma=1-2i$ とする。

点 A は，点 B を中心として点 C を $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 B からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である。

点 B を中心として点 C を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 B からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点を表す複素数 α について

$$\alpha-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\gamma-\beta) \text{ から}$$

$$\alpha-(2+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\{(1-2i)-(2+i)\}=\frac{1}{2}(1+i)(-1-3i)$$

$$=1-2i$$

よって　　$\alpha=(1-2i)+(2+i)=3-i$

点 B を中心として点 C を $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 B からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点を表す複素数 α について

$$\alpha-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(\gamma-\beta) \text{ から}$$

$$\alpha-(2+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\{(1-2i)-(2+i)\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-i)(-1-3i)=-2-i$$

よって　　$\alpha=(-2-i)+(2+i)=0$

したがって　　$\alpha=3-i$，0

解説

$\mathrm{A}(\alpha)$，$\beta=2+i$，$\gamma=1-2i$ とする。

点 A は，点 B を中心として点 C を $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 B からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である。

点 B を中心として点 C を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 B からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点を表す複素数 α について

$$\alpha-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\gamma-\beta) \text{ から}$$

$$\alpha-(2+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\{(1-2i)-(2+i)\}=\frac{1}{2}(1+i)(-1-3i)$$

$$=1-2i$$

よって　　$\alpha=(1-2i)+(2+i)=3-i$

点 B を中心として点 C を $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 B からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点を表す複素数 α について

$$\alpha-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(\gamma-\beta) \text{ から}$$

$$\alpha-(2+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\{(1-2i)-(2+i)\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-i)(-1-3i)=-2-i$$

よって　　$\alpha=(-2-i)+(2+i)=0$

したがって　　$\alpha=3-i$，0

9 (1)　$z=4-2i$ とする。点 z を，原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

（ア）　$\frac{\pi}{3}$　　　　（イ）　$-\frac{\pi}{2}$

(2)　点 $(1+i)z$ は，点 z をどのように移動した点であるか。

解答　(1)　（ア）　$2+\sqrt{3}-(1-2\sqrt{3})i$　　（イ）　$-2-4i$

(2)　原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $\sqrt{2}$ 倍した点

解説

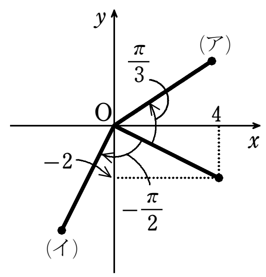
(1)　求める点を表す複素数は

（ア）　$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$

$$=(1+\sqrt{3}\,i)(2-i)$$
$$=2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i$$
$$=2+\sqrt{3}-(1-2\sqrt{3})i$$

（イ）　$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}z$

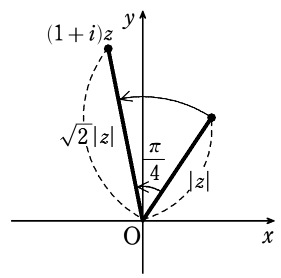
$$=-i(4-2i)$$
$$=-2-4i$$



(2)　$(1+i)z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)z$$

よって，点 $(1+i)z$ は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $\sqrt{2}$ 倍した点である。



10 (1)　$z=2+\sqrt{2}\,i$ とする。点 z を，原点を中心として $-\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(2)　次の複素数で表される点は，点 z をどのように移動した点であるか。

（ア）　$\frac{1}{2}(-1+i)z$　　（イ）　$\frac{z}{\sqrt{3}-i}$　　（ウ）　$\overline{iz}$

解答　(1)　$1-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})i$

(2)　（ア）　原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点

（イ）　原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を $\frac{1}{2}$ 倍した点

（ウ）　実軸に関して対称移動し，原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点

解説

(1)　求める点を表す複素数は

$$\left\{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2+\sqrt{2}\,i)$$

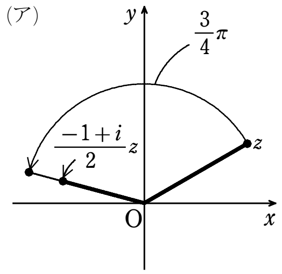
$$=-\sqrt{2}-i-\sqrt{2}\,i+1=1-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})i$$

(2)　（ア）　$\frac{1}{2}(-1+i)z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)z$$

よって，点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点である。

（ア）

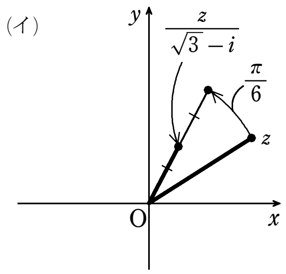


（イ）　$\frac{z}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}+i}{4}z=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$$

よって，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を $\frac{1}{2}$ 倍した点である。

（イ）

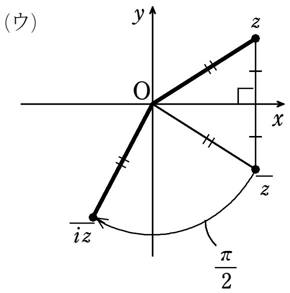


（ウ）　点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称である。

また　　$\overline{iz}=-i\overline{z}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\overline{z}$

よって，点 z を実軸に関して対称移動し，原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

（ウ）



11 (1)　2 点 $z=3+i$，$w=2-i$ に対して，点 z を点 w を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(2)　点 $3-2i$ を点 $1+i$ を中心として角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ だけ回転した点を表す複素数が $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$ であるとき，θ の値を求めよ。

解答　(1)　$\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i$　　(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　求める複素数を z' とすると

$$z'=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{3+i-(2-i)\}+2-i$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1+2i)+2-i$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　点 $3-2i$ を点 $1+i$ を中心として角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ だけ回転した点を表す複素数を z'

とすると

$$z'=(\cos\theta+i\sin\theta)\{3-2i-(1+i)\}+1+i$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)(2-3i)+1+i$$
$$=2\cos\theta+3\sin\theta+1+(-3\cos\theta+2\sin\theta+1)i$$

ゆえに　$2\cos\theta+3\sin\theta+1=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$，$-3\cos\theta+2\sin\theta+1=\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{2}$

よって　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

12 (1)　$w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。点 w を点 z を中心として $-\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(2)　点 A$(2+i)$ を点 P を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数が

$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ であった。点 P を表す複素数を求めよ。

解答　(1)　$-\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i$　　(2)　$1-2i$

解説

(1)　$\left\{\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}\left\{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\sqrt{3}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$=\frac{\sqrt{6}-1}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1-\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　点 P を表す複素数を z とすると

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2+i-z)+z=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

(左辺)$=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}(2+i-z)+z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(2+i)}{2}+\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+1\right)z$

$=\dfrac{2-\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}z$ であるから

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}z=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i-\frac{2-\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}{2}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i}{2}$$

ゆえに　$z=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1-2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i}{2}$

$$=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i}{2}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-6)i}{4}$$
$$=\frac{4-8i}{4}=1-2i$$

13 複素数平面上の 3 点 O(0)，A$(2-i)$，B について，次の条件を満たしているとき，点 B を表す複素数を求めよ。

(1)　△OAB が正三角形となる。

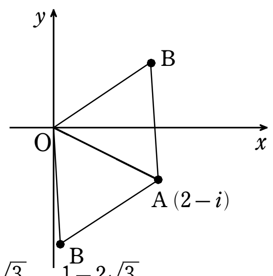
(2)　△OAB が B を直角の頂点とする直角二等辺三角形となる。

解答　(1)　$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}i$ または $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}i$

(2)　$\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$　または　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

解説

(1)　点 B は，点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。



点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2-i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-i)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{2}i=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i$$

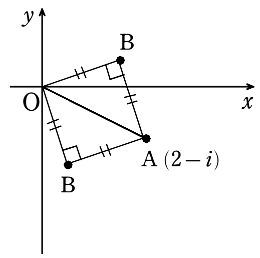
点 A を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(2-i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-i)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i$$

したがって，点 B を表す複素数は

$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}i$　または　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}i$

(2)　点 B は，点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ または $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である。



点 A を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点を表す複素数は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2-i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2-i)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

点 A を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点を表す複素数は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(2-i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2-i)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

したがって，点 B を表す複素数は　$\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$　または　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

14 次の複素数 α，β と角 θ について，点 β を，点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(1)　$\alpha=3-i$，$\beta=2+3i$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　　(2)　$\alpha=4+i$，$\beta=-1+2i$，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

解答　(1)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}i$　　(2)　$(4+2\sqrt{2})+(1-3\sqrt{2})i$

解説

(1)　$\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(\beta-\alpha)$ であるから

$$\gamma-(3-i)=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{(2+3i)-(3-i)\}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(-1+4i)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right)+\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i$$

よって　$\gamma=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\right)+\left(2\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)i+(3-i)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}i$

(2)　$\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$ であるから

$$\gamma-(4+i)=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\times\{(-1+2i)-(4+i)\}$$
$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(-5+i)=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$$

よって　$\gamma=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}i+(4+i)=(4+2\sqrt{2})+(1-3\sqrt{2})i$

15 (1)　点 $(1+\sqrt{3}i)z$ は，点 z をどのように移動した点であるか。

(2)　複素数平面上の 3 点 O(0)，A$(3+2i)$，B について，△OAB が正三角形となるとき，点 B を表す複素数を求めよ。

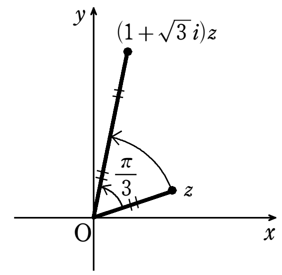
解答　(1)　原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点

(2)　$\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}i$　または　$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}i$

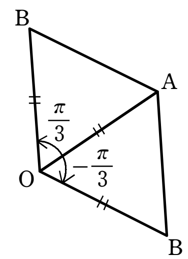
解説

(1)　$1+\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって，点 $(1+\sqrt{3}i)z$ は，点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点である。



(2)　点 B は，点 A を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。



よって，点 B を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(3+2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+2i)=\frac{3-2\sqrt{3}}{2}+\frac{2+3\sqrt{3}}{2}i$$

または

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(3+2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+2i)=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-3\sqrt{3}}{2}i$$

16 $\alpha=2+3i$，$\beta=6+i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

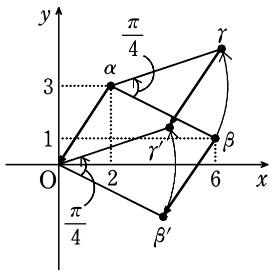
解答　$(2+3\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i$

解説

点 α が原点 O に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ点 β'，γ' に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha=(6+i)-(2+3i)=4-2i$$
$$\gamma'=\gamma-\alpha$$

点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点であるから



$$\gamma'=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\beta'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(4-2i)$$
$$=3\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$$

よって　$\gamma=\gamma'+\alpha=(3\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)+(2+3i)$
$$=(2+3\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i$$

参考　点 β が，点 α を中心として角 θ だけ回転して点 γ に移るとき，次の式が成り立つ。
$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$
これを利用して求めてもよい。

17 複素数平面上の 3 点 O(0)，A$(3-i)$，B について，次の条件を満たしているとき，点 B を表す複素数を求めよ。

(1) △OAB が正三角形　(2) $2\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{3}\pi$

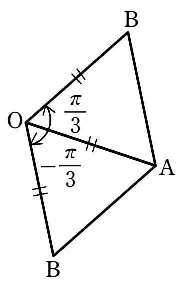
解答 (1) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-3\sqrt{3}}{2}i$ または $\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+3\sqrt{3}}{2}i$

(2) $-(3-\sqrt{3})+(1+3\sqrt{3})i$ または $-(3+\sqrt{3})+(1-3\sqrt{3})i$

解説

(1) 点 B は，点 A を原点 O を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

よって，点 B を表す複素数は



$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(3-i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-i)$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-3\sqrt{3}}{2}i$$

または

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(3-i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-i)$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+3\sqrt{3}}{2}i$$

(2) 点 B は，点 A を原点を中心として $\frac{2}{3}\pi$ または $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍に拡大した点である。

よって，点 B を表す複素数は

$$2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(3-i)=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-i)$$
$$=(\sqrt{3}-3)+(1+3\sqrt{3})i=-(3-\sqrt{3})+(1+3\sqrt{3})i$$

または

$$2\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}(3-i)=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-i)$$
$$=-(3+\sqrt{3})+(1-3\sqrt{3})i$$

18 $\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=\sqrt{3}-i$ とする。点 β を，点 α を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{3}{4}\pi$

解答 (1) $3-(2-\sqrt{3})i$　(2) $(1+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{3})i$

解説

点 α が原点 O に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ点 β'，γ' に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha=(\sqrt{3}-i)-(1+\sqrt{3}\,i)=(\sqrt{3}-1)-(1+\sqrt{3})i$$
$$\gamma'=\gamma-\alpha$$

(1) 点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから

$$\gamma'=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\beta'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\{(\sqrt{3}-1)-(1+\sqrt{3})i\}$$
$$=2-2i$$

よって　$\gamma=\gamma'+\alpha=(2-2i)+(1+\sqrt{3}\,i)=3-(2-\sqrt{3})i$

(2) 点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点であるから

$$\gamma'=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\beta'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\{(\sqrt{3}-1)-(1+\sqrt{3})i\}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$$

よって　$\gamma=\gamma'+\alpha=(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)+(1+\sqrt{3}\,i)=(1+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{3})i$

19 $z=6-8i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{3}$　(2) $\frac{5}{6}\pi$　(3) $-\frac{\pi}{2}$　(4) $-\frac{\pi}{6}$

解答 (1) $(3+4\sqrt{3})-(4-3\sqrt{3})i$　(2) $(4-3\sqrt{3})+(3+4\sqrt{3})i$　(3) $-8-6i$
(4) $-(4-3\sqrt{3})-(3+4\sqrt{3})i$

解説

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6-8i)=(3+4\sqrt{3})-(4-3\sqrt{3})i$

(2) $\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(6-8i)=(4-3\sqrt{3})+(3+4\sqrt{3})i$

(3) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}z=-i(6-8i)=-8-6i$

(4) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(6-8i)=-(4-3\sqrt{3})-(3+4\sqrt{3})i$

20 複素数平面上の 3 点 O(0)，A$(4-2i)$，B(β) が，次の条件を満たすとき，β の値を求めよ。

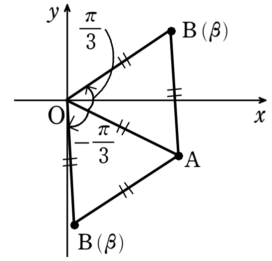
(1) △OAB は正三角形　(2) $\frac{1}{2}\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$

解答 (1) $\beta=(2+\sqrt{3})-(1-2\sqrt{3})i$ または $\beta=(2-\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})i$

(2) $\beta=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$ または $\beta=-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$

解説

(1) 点 β は，点 $4-2i$ を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから



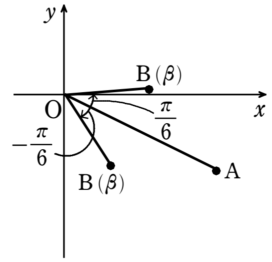
$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(4-2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(1+\sqrt{3}\,i)(2-i)$$
$$=(2+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})i$$

または

$$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(4-2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(1-\sqrt{3}\,i)(2-i)$$
$$=(2-\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})i=(2+\sqrt{3})-(1-2\sqrt{3})i$$

よって　$\beta=(2+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})i$　または
$\beta=(2-\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})i$

(2) 点 β は，点 $4-2i$ を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ または $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転し，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点であるから



$$\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(4-2i)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4-2i)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(2-i)$$
$$=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$$

または

$$\beta=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}(4-2i)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(4-2i)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)(2-i)$$
$$=-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$$

よって　$\beta=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$　または
$\beta=-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$

21 $\alpha=3+4i$，$\beta=1+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

解答 $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{6+\sqrt{3}}{2}i$

解説

$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\beta-\alpha)$ であるから

$$\gamma=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{(1+5i)-(3+4i)\}+(3+4i)$$

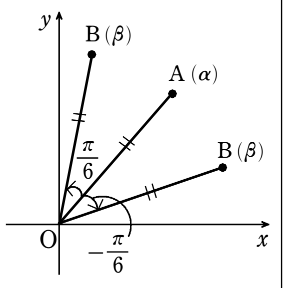
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(-2+i)+(3+4i)$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{6+\sqrt{3}}{2}i$$

$\boxed{22}$ $\alpha=\sqrt{3}+2i$ とする。複素数平面上の 3 点 O (0)，A (α)，B (β) が，OA = OB かつ $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たすとき，β の値を求めよ。

解答　$\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ または $\beta=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

解説



点 β は，点 α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ または $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\alpha$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}+2i)=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

または

$$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\alpha$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}+2i)=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって　　$\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$　または　$\beta=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\boxed{23}$ $\alpha=1+i$，$\beta=3-i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

解答　$\gamma=(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}\,i$

解説

$\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$ であるから

$$\gamma=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(3-i)-(1+i)\}+(1+i)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-2i)+(1+i)$$

$$=(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)+(1+i)=(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}\,i$$

参考　一般に次のことが成り立つ。

点 β を，点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ とする。

点 α を原点に移す平行移動を考えると，右の図から

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$