三角形の形状クイズ

1 異なる3つの複素数 α，β，γ の間に，等式

$$\sqrt{3}\gamma-i\beta=(\sqrt{3}-i)\alpha$$

が成り立つとき，3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の3つの角の大きさを求めよ。

解答 $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$

解説

等式から $\sqrt{3}(\gamma-\alpha)=i(\beta-\alpha)$

ゆえに $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$

これは純虚数であるから，2直線 AB，AC は垂直に交わり

$$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$$

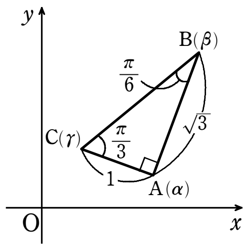
また，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\gamma-\alpha|$$

$\mathrm{AB}=\sqrt{3}\,\mathrm{AC}$ であるから

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\sqrt{3}:1$$

よって $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$



2 異なる3つの複素数 α，β，γ の間に，等式 $2\gamma-(1+\sqrt{3}i)\beta=(1-\sqrt{3}i)\alpha$ が成り立つとき，3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の3つの角の大きさを求めよ。

解答 $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$

解説

$2\gamma-(1+\sqrt{3}i)\beta=(1-\sqrt{3}i)\alpha$ から

$$2\gamma-2\beta+(1-\sqrt{3}i)\beta=(1-\sqrt{3}i)\alpha$$

よって $2(\gamma-\beta)=(1-\sqrt{3}i)(\alpha-\beta)$

ゆえに $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

したがって $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$

$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=1$ であるから $|\gamma-\beta|=|\alpha-\beta|$

よって $\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$

ゆえに，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であるから

$$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{3}$$

3 異なる3つの複素数 α，β，γ に対して，等式 $\gamma=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}\alpha-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta$ が成り立つとき，複素数平面上で3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の3つの角の大きさを求めよ。

解答 $\angle\mathrm{A}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$

解説

等式から $\gamma-\beta=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}\alpha-\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}\beta$

$$=\frac{3-\sqrt{3}i}{2}(\alpha-\beta)$$

ゆえに $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$$=\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

よって $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{6}$

$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=\sqrt{3}$ であるから $|\gamma-\beta|=\sqrt{3}|\alpha-\beta|$

よって，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}\mathrm{AB}$ であるから $\mathrm{BC}:\mathrm{AB}=\sqrt{3}:1$

このとき，定数 $k\,(>0)$ を用いて $\mathrm{BC}=\sqrt{3}k$，$\mathrm{AB}=k$ と表される。

ゆえに，余弦定理から $\mathrm{AC}^2=k^2+(\sqrt{3}k)^2-2\cdot k\cdot\sqrt{3}k\cos\dfrac{\pi}{6}=k^2$

よって $\mathrm{AC}=k$

ゆえに，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形であるから

$\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{6}$ また $\angle\mathrm{A}=\pi-\dfrac{\pi}{6}\cdot2=\dfrac{2}{3}\pi$

4 α，β は等式 $\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ を満たす0でない複素数とする。このとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。また，複素数平面上で，3点0，α，β を頂点とする三角形の3つの角の大きさを求めよ。

解答 $\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}i$

$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$

解説

等式の両辺を $\beta^2\,(\neq0)$ で割ると $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}+4=0$

よって $\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}i$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと

$$\frac{\alpha}{\beta}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

ゆえに，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とすると

$\left|\dfrac{\alpha-0}{\beta-0}\right|=2$ すなわち $\mathrm{OA}=2\mathrm{OB}$

また $\angle\mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\triangle\mathrm{OAB}$ は，点Bを直角の頂点とする直角三角形で

$$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{6},\ \angle\mathrm{O}=\frac{\pi}{3},\ \angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$$

5 複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，等式 $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ。　(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か。

解答 (1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$　(2) $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

解説

(1) 等式から $\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2=0$

よって $(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$

$\alpha\neq\beta$ より，$\beta-\alpha\neq0$ であるから $\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1$

ゆえに $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$ ……①

(2) ①から $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=|\pm i|=1$ すなわち $|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$

よって $\mathrm{AC}=\mathrm{AB}$

また，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数であるから $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

6 異なる3つの複素数 α，β，γ の間に，等式 $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$ が成り立つとき，3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の3つの角の大きさを求めよ。[30点]

解答 等式から $\alpha-\gamma=-i(\beta-\gamma)$

ゆえに $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=-i$

これは純虚数であるから，2直線 AC，BC は垂直に交わり

$$\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$$

また，$\dfrac{|\alpha-\gamma|}{|\beta-\gamma|}=1$ であるから $|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$

よって $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

したがって $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$

解説

等式から $\alpha-\gamma=-i(\beta-\gamma)$

ゆえに $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=-i$

これは純虚数であるから，2直線 AC，BC は垂直に交わり

$$\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$$

また，$\dfrac{|\alpha-\gamma|}{|\beta-\gamma|}=1$ であるから $|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$

よって $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

したがって $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{7}$ α，β，γ は等式 $3\alpha^2+4\beta^2+\gamma^2-6\alpha\beta-2\beta\gamma=0$ を満たす複素数とする。複素数平面上で 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。[25 点]

解答　等式から　$3(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)=0$

よって　$(\gamma-\beta)^2=-3(\alpha-\beta)^2$　　ゆえに　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\pm\sqrt{3}\,i$

これは純虚数であるから，2 直線 AB，BC は垂直に交わり　$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$

また，$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=\sqrt{3}$ であるから　$|\gamma-\beta|=\sqrt{3}|\alpha-\beta|$

$BC=\sqrt{3}AB$ であるから　$BC:AB=\sqrt{3}:1$

よって　$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$

解説

等式から　$3(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)=0$

よって　$(\gamma-\beta)^2=-3(\alpha-\beta)^2$　　ゆえに　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\pm\sqrt{3}\,i$

これは純虚数であるから，2 直線 AB，BC は垂直に交わり　$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$

また，$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=\sqrt{3}$ であるから　$|\gamma-\beta|=\sqrt{3}|\alpha-\beta|$

$BC=\sqrt{3}AB$ であるから　$BC:AB=\sqrt{3}:1$

よって　$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{8}$ 異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) に対し，等式 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。　　(2) △OAB はどんな形の三角形か。

解答　(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1\pm i}{2}$　　(2) $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

解説

(1) $\beta\neq0$ より，$\beta^2\neq0$ であるから，等式 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を β^2 で割ると

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+1=0$$

したがって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot1}}{2}=\dfrac{1\pm i}{2}$

(2) (1) から　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$　……(*)　(複号同順)

$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$OA:OB=1:\sqrt{2}$

また，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{\pi}{4}$ から　$\angle BOA=\dfrac{\pi}{4}$

よって，△OAB は $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

別解　[(2) については，次のようにして考えることもできる。]

(*) から　$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\beta$　(複号同順)

よって，点 A は，点 B を，原点を中心として $\pm\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点であるから，△OAB は $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

$\boxed{9}$ 原点 O とは異なる 2 点 A(α)，B(β) がある。次の等式が成り立つとき，△OAB はどんな形の三角形か。

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$　　(2) $3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$

解答　(1) $OA=OB$，$\angle O=\dfrac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形

(2) $\angle O=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形

解説

(1) $\beta^2\neq0$ であるから，等式の両辺を β^2 で割ると　$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2+\dfrac{\alpha}{\beta}+1=0$

よって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

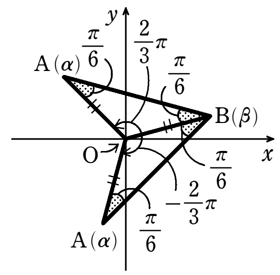
$=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$　(複号同順)

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{OA}{OB}=1$

よって　$OA=OB$

また，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$\angle BOA=\dfrac{2}{3}\pi$



したがって，△OAB は $OA=OB$，$\angle O=\dfrac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である。

(2) $\beta^2\neq0$ であるから，等式の両辺を β^2 で割ると　$3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-6\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}+4=0$

よって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-3\cdot4}}{3}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\right)$

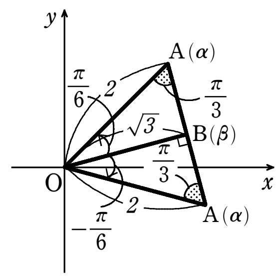
$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$　(複号同順)

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$OA:OB=2:\sqrt{3}$

また，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$\angle BOA=\dfrac{\pi}{6}$



したがって，△OAB は $\angle O=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

別解　等式から　$3(\alpha-\beta)^2+\beta^2=0$　すなわち　$3(\alpha-\beta)^2=-\beta^2$

両辺を $3\beta^2$ で割ると　$\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}\right)^2=-\dfrac{1}{3}$

よって　$\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$　(純虚数)

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}\right|=\dfrac{|\alpha-\beta|}{|0-\beta|}=\dfrac{BA}{BO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$BA:BO=1:\sqrt{3}$　　また　$BO\perp BA$

したがって，△OAB は $\angle O=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

$\boxed{10}$ 異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が次の条件を満たすとき，△ABC はどんな形の三角形か。

(1) $\beta-\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)(\gamma-\alpha)$　　(2) $3\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta r=3\alpha\beta+3\gamma\alpha$

解答　(1) $AB:BC:CA=2:\sqrt{3}:1$ の直角三角形

(2) $AB=AC$，$\angle A=\dfrac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形

解説

(1) 2 点 A，C は異なるから　$\gamma\neq\alpha$

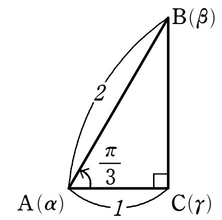
等式から　$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{|\beta-\alpha|}{|\gamma-\alpha|}=2$ から　$AB:AC=2:1$

また，$\arg\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\dfrac{\pi}{3}$ から　$\angle CAB=\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，△ABC は

$AB:BC:CA=2:\sqrt{3}:1$ の直角三角形



(2) 等式を γ について整理すると　$\gamma^2-(3\alpha-\beta)\gamma+3\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0$　……①

ここで　$(3\alpha-\beta)^2-4(3\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)=-3\alpha^2+6\alpha\beta-3\beta^2=-3(\alpha-\beta)^2$

よって　$\gamma=\dfrac{3\alpha-\beta\pm\sqrt{3}(\alpha-\beta)i}{2}$　……②

ゆえに　$\gamma-\alpha=\dfrac{\alpha-\beta\pm\sqrt{3}(\alpha-\beta)i}{2}=-\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-\alpha)$

2 点 A，B は異なるから　$\alpha\neq\beta$

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$　(複号同順)

$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1$ から

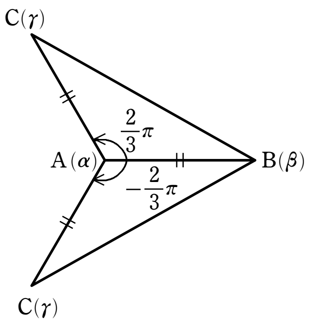
$AC=AB$

また，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{2}{3}\pi$ から

$\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに，△ABC は

$AB=AC$，$\angle A=\dfrac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形



参考　(1) $\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ から

$\beta-\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$

よって，点 B は，点 C を，点 A を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を 2 倍した点である。

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$　(複号同順)

から　$\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}(\beta-\alpha)$

よって，点 C は，点 B を，点 A を中心として $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点である。

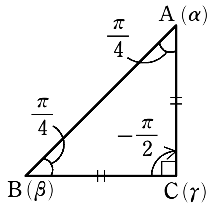
11 異なる3点 A(α)，B(β)，C(γ) が次の条件を満たすとき，△ABC はどんな形の三角形か。

(1) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

解答　(1) CA＝CB の直角二等辺三角形　(2) 正三角形

解説

(1) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$ から　$\alpha-\gamma=(\gamma-\beta)i$



よって　$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=-i$

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right|=\dfrac{|\alpha-\gamma|}{|\beta-\gamma|}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=1$

よって　CA＝CB

また，$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ は純虚数であるから　CA⊥CB

ゆえに，△ABC は CA＝CB の直角二等辺三角形である。

(2) 等式を β について整理すると　$\beta^2-(\gamma+\alpha)\beta+\alpha^2-\gamma\alpha+\gamma^2=0$

ここで　$(\gamma+\alpha)^2-4(\alpha^2-\gamma\alpha+\gamma^2)=-3\gamma^2+6\gamma\alpha-3\alpha^2=-3(\gamma-\alpha)^2$

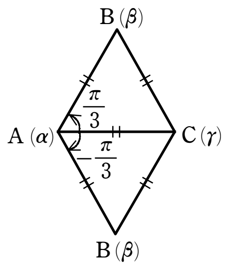
よって　$\beta=\dfrac{\gamma+\alpha\pm\sqrt{3}(\gamma-\alpha)i}{2}$

ゆえに　$\beta-\alpha=\dfrac{\gamma-\alpha\pm\sqrt{3}(\gamma-\alpha)i}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(\gamma-\alpha)$

よって　$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$　（複号同順）

したがって

$\left|\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right|=\dfrac{|\beta-\alpha|}{|\gamma-\alpha|}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=1$



ゆえに　AB＝AC

また　$\angle\mathrm{CAB}=\left|\arg\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right|$

$=\left|\pm\dfrac{\pi}{3}\right|=\dfrac{\pi}{3}$

よって，△ABC は正三角形である。

別解　次の等式が成り立つことを利用する。

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

よって，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ を満たすとき

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$　…… ①

ここで，$(\beta-\gamma)^2=\{(\beta-\alpha)+(\alpha-\gamma)\}^2=\{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)\}^2$

$=(\beta-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2$

であるから，① は，次のように変形できる。

$(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=0$

両辺を $(\gamma-\alpha)^2$ で割ると　$\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}+1=0$

したがって　$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

以後は同じである。

12 複素数平面上の異なる3点 O(0)，A(α)，B(β) について，次の等式が成り立つとき，三角形 OAB はどのような三角形か。

(1) $\alpha^2+\beta^2=0$　　(2) $\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$

解答　(1) 辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形
(2) 辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形

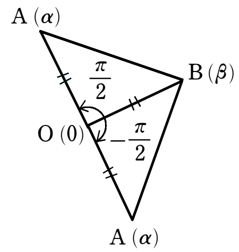
解説

(1) $\alpha^2+\beta^2=0$ から　$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=0$

よって　$\alpha=\pm i\beta$

ゆえに　$\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\beta$

または　$\alpha=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}\beta$



したがって，点 A は，点 B を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

よって，三角形 OAB は辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形である。

(2) B は O と異なるから　$\beta\neq0$

よって，$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2\,(\neq0)$ で割って

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}+2=0$

これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について解くと　$\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm i$

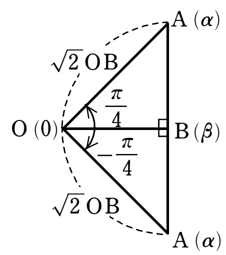
ゆえに　$\alpha=(1+i)\beta$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\beta$

または　$\alpha=(1-i)\beta$

$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\beta$

したがって，点 A は，点 B を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ または $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。



よって，三角形 OAB は辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形である。

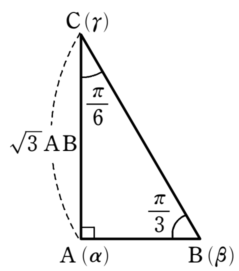
13 異なる3つの複素数 α，β，γ の間に，次の等式が成り立つとき，3点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の3つの角の大きさを求めよ。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}i$　　(2) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$

解答　(1) $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$　(2) $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1) $\sqrt{3}i$ は純虚数であるから，2直線 AB，AC は垂直に交わり　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$



また，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\sqrt{3}$ であるから

$|\gamma-\alpha|=\sqrt{3}|\beta-\alpha|$

AC＝$\sqrt{3}$ AB であるから

AB : AC＝1 : $\sqrt{3}$

よって　$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$

(2) 等式から　$\alpha-\gamma=-i(\beta-\gamma)$

$\beta\neq\gamma$ であるから　$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=-i$

これは純虚数であるから，2直線 CA，CB は垂直に交わり　$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$

また，$\left|\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right|=1$ であるから　$|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$

ゆえに　CA＝CB

よって　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$

14 異なる3つの複素数 α，β，γ が $\gamma+\sqrt{3}i\alpha=(1+\sqrt{3}i)\beta$ を満たすとき，3点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の3つの角の大きさを求めよ。

解答　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$

解説

等式から　$\gamma-\beta=-\sqrt{3}i(\alpha-\beta)$

よって　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=-\sqrt{3}i$

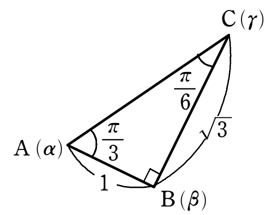
これは純虚数であるから，2直線 BA，BC は垂直に交わり　$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$

また，$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=\sqrt{3}$ であるから

$|\gamma-\beta|=\sqrt{3}|\alpha-\beta|$

よって　BC : BA＝$\sqrt{3}$: 1

したがって　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$



15 異なる3つの複素数 α，β，γ が $\beta+i\gamma=(1+i)\alpha$ を満たすとき，3点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の3つの角の大きさを求めよ。

解答　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{4}$

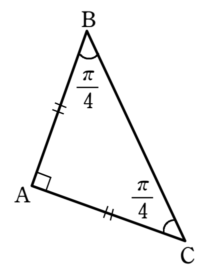
解説

等式から　$i(\gamma-\alpha)=-(\beta-\alpha)$

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{1}{i}=-\dfrac{i}{i^2}=i$

これは純虚数であるから，2直線 AB，AC は垂直に交わり

$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$



また，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ であるから　$|\beta-\alpha|=|\gamma-\alpha|$

よって　AB＝AC

したがって　$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{4}$

16 複素数平面上の異なる3点 O(0)，A(α)，B(β) について，$\alpha^2-\sqrt{2}\alpha\beta+\beta^2=0$ であるとき，△OAB はどのような三角形か。

解答　$\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{4}$，OA＝OB の二等辺三角形

解説

等式の両辺を $\alpha^2\,(\neq 0)$ で割って整理すると

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\sqrt{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+1=0$$

よって，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ であり

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha,\ \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha$$

ゆえに，△OAB は $\angle \mathrm{O}=\dfrac{\pi}{4}$，OA＝OB の二等辺三角形である。