数学的帰納法クイズ

1 数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

解答　略

解説

この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　左辺$=1$，　右辺$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+1)=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

すなわち

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

2 数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

(1)　$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　　左辺$=1$，右辺$=2^1-1=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=2^k-1\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1+2+\cdots\cdots+2^{k-1}+2^k=(2^k-1)+2^k=2\cdot2^k-1$$
$$=2^{k+1}-1$$

すなわち　$1+2+\cdots\cdots+2^{k-1}+2^{(k+1)-1}=2^{k+1}-1$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　左辺$=1^2=1$，右辺$=\frac{1}{6}\cdot1(1+1)(2\cdot1+1)=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

3 n は自然数とする。n^3+2n は 3 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

「n^3+2n は 3 の倍数である」を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$n^3+2n=1^3+2\cdot1=3$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち k^3+2k は 3 の倍数であると仮定すると，ある整数 m を用いて

$$k^3+2k=3m$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$(k+1)^3+2(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)+(2k+2)$$
$$=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)$$
$$=3m+3(k^2+k+1)$$
$$=3(m+k^2+k+1)$$

$m+k^2+k+1$ は整数であるから，$(k+1)^3+2(k+1)$ は 3 の倍数である。よって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

4 n は自然数とする。5^n-1 は 4 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

「5^n-1 は 4 の倍数である」を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$5^n-1=5^1-1=4$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち 5^k-1 は 4 の倍数であると仮定すると，ある整数 m を用いて

$$5^k-1=4m\qquad すなわち\quad 5^k=4m+1$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$5^{k+1}-1=5\cdot5^k-1=5(4m+1)-1$$
$$=4\cdot5m+5-1=4(5m+1)$$

$5m+1$ は整数であるから，$5^{k+1}-1$ は 4 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

5 n は 3 以上の自然数とする。不等式 $2^n>2n+1$ を，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

この不等式を ① とする。

[1]　$n=3$ のとき　　左辺$=2^3=8$，　右辺$=2\cdot3+1=7$

よって，$n=3$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$k\geqq3$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$2^k>2k+1\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると

$$2^{k+1}-\{2(k+1)+1\}=2\cdot2^k-(2k+3)$$

② から　　$2\cdot2^k-(2k+3)>2(2k+1)-(2k+3)$
$$=2k-1>0$$

よって　　$2^{k+1}-\{2(k+1)+1\}>0$

すなわち　　$2^{k+1}>2(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，3 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

6 $a>0$ で，n は自然数とする。不等式 $(1+a)^n\geqq1+na$ を，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

$(1+a)^n\geqq1+na$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　左辺$=(1+a)^1=1+a$，右辺$=1+1\cdot a=1+a$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(1+a)^k\geqq1+ka\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると

$$(1+a)^{k+1}-\{1+(k+1)a\}=(1+a)(1+a)^k-\{1+(k+1)a\}$$

② から　　$(1+a)(1+a)^k-\{1+(k+1)a\}\geqq(1+a)(1+ka)-\{1+(k+1)a\}$
$$=ka^2>0$$

よって　　$(1+a)^{k+1}-\{1+(k+1)a\}\geqq0$

すなわち　$(1+a)^{k+1}\geqq1+(k+1)a$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

7 n は 2 以上の自然数とする。不等式 $3^n>4n$ を，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

$3^n>4n$ ……①　とする。

[1]　$n=2$ のとき　　左辺 $=3^2=9$，　右辺 $=4\cdot2=8$

よって，$n=2$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$k\geqq2$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$3^k>4k \quad ……②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$3^{k+1}-4(k+1)=3\cdot3^k-4(k+1)$$

② から　　$3\cdot3^k-4(k+1)>3\cdot4k-4(k+1)=4(2k-1)>0$

よって　　$3^{k+1}-4(k+1)>0$

すなわち　$3^{k+1}>4(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，2 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

8 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ ……)$$

解答　$a_n=\dfrac{n+1}{n}$

解説

条件により　　$a_1=2,\ a_2=\dfrac{3}{2},\ a_3=\dfrac{4}{3},\ a_4=\dfrac{5}{4},\ ……$

よって，$\{a_n\}$ の一般項は次のようになることが推測される。

$$a_n=\frac{n+1}{n}\quad ……①$$

この推測が正しいことを，数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき，① の右辺は　$\dfrac{1+1}{1}=2$

初項は $a_1=2$ なので，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$a_k=\frac{k+1}{k}\quad ……②$$

と仮定する。$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

したがって，求める一般項は　　$a_n=\dfrac{n+1}{n}$

9 n は自然数とする。数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+……+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

解答　略

解説

$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+……+n\cdot n!=(n+1)!-1$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺 $=1\cdot1!=1$，　　右辺 $=2!-1=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+……+k\cdot k!=(k+1)!-1\quad ……②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$\begin{aligned}&1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+……+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=\{(k+1)!-1\}+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=(k+2)\cdot(k+1)!-1\\&=(k+2)!-1\\&=\{(k+1)+1\}!-1\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

10 n は自然数とする。$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は 7 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

「$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は 7 の倍数である」を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　$2^{n+1}+3^{2n-1}=2^2+3^1=7$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち $2^{k+1}+3^{2k-1}$ は 7 の倍数であると仮定すると，ある整数 m を用いて

$$2^{k+1}+3^{2k-1}=7m$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}2^{(k+1)+1}+3^{2(k+1)-1}&=2\cdot2^{k+1}+3^{2k+1}\\&=2(7m-3^{2k-1})+9\cdot3^{2k-1}\\&=7(2m+3^{2k-1})\end{aligned}$$

$2m+3^{2k-1}$ は整数であるから，$2^{(k+1)+1}+3^{2(k+1)-1}$ は 7 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

11 n は 4 以上の自然数とする。数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ。

$$2^n>n^2-n+2$$

解答　略

解説

$2^n>n^2-n+2$　……①　とする。

[1]　$n=4$ のとき

左辺 $=2^4=16$，右辺 $=4^2-4+2=14$

よって，$n=4$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$k\geqq4$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$2^k>k^2-k+2\quad ……②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}&2^{k+1}-\{(k+1)^2-(k+1)+2\}\\&>2(k^2-k+2)-(k^2+k+2)\\&=k^2-3k+2\\&=(k-1)(k-2)>0\end{aligned}$$

すなわち　　$2^{k+1}>(k+1)^2-(k+1)+2$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，4 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

12 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{4}{4-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ ……)$$

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

解答　(1)　$a_2=\dfrac{4}{3},\ a_3=\dfrac{3}{2},\ a_4=\dfrac{8}{5},\ a_5=\dfrac{5}{3}$　　(2)　$a_n=\dfrac{2n}{n+1}$，証明略

解説

(1)　条件により　$a_2=\dfrac{4}{4-a_1}=\dfrac{4}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

$$a_3=\frac{4}{4-a_2}=\frac{4}{4-\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$a_4=\frac{4}{4-a_3}=\frac{4}{4-\frac{3}{2}}=\frac{8}{5}$$

$$a_5=\frac{4}{4-a_4}=\frac{4}{4-\frac{8}{5}}=\frac{5}{3}$$

(2)　$a_1=\dfrac{2}{2},\ a_2=\dfrac{4}{3},\ a_3=\dfrac{6}{4},\ a_4=\dfrac{8}{5},\ a_5=\dfrac{10}{6},\ ……$

よって，$\{a_n\}$ の一般項は次のようになることが推測される。

$$a_n=\frac{2n}{n+1}\quad ……①$$

この推測が正しいことを，数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき　　① の右辺は　$\dfrac{2\cdot1}{1+1}=1$

初項は $a_1=1$ なので，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$a_k=\frac{2k}{k+1}\quad ……②$$

と仮定する。$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{4}{4-a_k}=\frac{4}{4-\frac{2k}{k+1}}=\frac{4(k+1)}{2k+4}=\frac{2(k+1)}{k+2}\\&=\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

13 数列 $a_1,\ a_2,\ ……,\ a_n,\ ……$ の各項が 1 より小さい正の数であるとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，$n\geqq2$ とする。

$$(1-a_1)(1-a_2)……(1-a_n)>1-(a_1+a_2+……+a_n)$$

解答　略

解説

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ ……① とする。

[1] $n=2$ のとき

左辺$=(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)+a_1a_2$

右辺$=1-(a_1+a_2)$

$a_1>0$，$a_2>0$ であるから $a_1a_2>0$

ゆえに 左辺>右辺

よって，$n=2$ のとき，① は成り立つ。

[2] $k\geqq 2$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)>1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，$1-a_{k+1}>0$ であるから

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})$$
$$>\{1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)\}(1-a_{k+1})$$
$$=1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1})+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)a_{k+1}$$

ここで，$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)a_{k+1}>0$ であるから

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_{k+1})>1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k+1})$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，2 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

14 数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。[50 点]

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

解答 この等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき 左辺$=1^2=1$， 右辺$=\frac{1}{3}\cdot1\cdot(2\cdot1+1)(2\cdot1-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1) \quad \cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2k+1)^2$$
$$=\frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1)+3(2k+1)\}=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2-k+6k+3)$$
$$=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)=\frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3)$$

すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)+1\}\{2(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

解説

この等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき 左辺$=1^2=1$， 右辺$=\frac{1}{3}\cdot1\cdot(2\cdot1+1)(2\cdot1-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1) \quad \cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2k+1)^2$$
$$=\frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1)+3(2k+1)\}=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2-k+6k+3)$$
$$=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)=\frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3)$$

すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)+1\}\{2(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

15 n は自然数とする。不等式 $n^2\geqq 3n-4$ を，数学的帰納法によって証明せよ。[50 点]

解答 この不等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき 左辺$=1^2=1$，右辺$=3\cdot1-4=-1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$k^2\geqq 3k-4$ ……②

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$(k+1)^2-\{3(k+1)-4\}=k^2-k+2\geqq(3k-4)-k+2=2(k-1)\geqq0$$

すなわち $(k+1)^2\geqq 3(k+1)-4$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

解説

この不等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき 左辺$=1^2=1$，右辺$=3\cdot1-4=-1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$k^2\geqq 3k-4$ ……②

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$(k+1)^2-\{3(k+1)-4\}=k^2-k+2\geqq(3k-4)-k+2=2(k-1)\geqq0$$

すなわち $(k+1)^2\geqq 3(k+1)-4$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

16 n は自然数とする。不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\geqq\frac{2n}{n+1}$ を，数学的帰納法によって証明せよ。[25 点]

解答 この不等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき 左辺$=1$，右辺$=\frac{2}{1+1}=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}\geqq\frac{2k}{k+1}$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺と右辺は

$$\text{左辺}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

$$\text{右辺}=\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}=\frac{2k+2}{k+2}$$

であるから

$$\text{左辺}-\text{右辺}\geqq\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}=\frac{(2k+1)(k+2)-(2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{2k^2+5k+2-2k^2-4k-2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

すなわち，左辺>右辺 が成り立つ。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

解説

この不等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき 左辺$=1$，右辺$=\frac{2}{1+1}=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}\geqq\frac{2k}{k+1}$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺と右辺は

$$\text{左辺}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

$$\text{右辺}=\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}=\frac{2k+2}{k+2}$$

であるから

$$\text{左辺}-\text{右辺}\geqq\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}=\frac{(2k+1)(k+2)-(2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{2k^2+5k+2-2k^2-4k-2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

すなわち，左辺>右辺 が成り立つ。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

17 n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n} \quad \cdots\cdots①$$

解答 略

解説

[1] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}, \quad (\text{右辺})=2-\frac{1+2}{2^1}=\frac{1}{2}$$

よって，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k} \quad \cdots\cdots②$$

$n=k+1$ の場合を考えると，② から

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{2(k+2)}{2^{k+1}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$
$$=2+\frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

18 (1)　n が自然数のとき，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n が正の奇数ならば，2^n+1 は 3 で割り切れることを証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　$n=1$ のとき　　$4^{2n+1}+3^{n+2}=4^3+3^3=91=13\cdot 7$

よって，$n=1$ のとき，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき，$4^{2k+1}+3^{k+2}$ は 13 の倍数であると仮定すると，m を整数として

$$4^{2k+1}+3^{k+2}=13m \quad \cdots\cdots ①$$

とおける。

$n=k+1$ のときを考えると，① から

$$\begin{aligned}4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}&=16\cdot 4^{2k+1}+3\cdot 3^{k+2}\\&=16(13m-3^{k+2})+3\cdot 3^{k+2}\\&=16\cdot 13m-13\cdot 3^{k+2}\\&=13(16m-3^{k+2})\end{aligned}$$

$16m-3^{k+2}$ は整数であるから，$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$ は 13 の倍数である。

すなわち，$n=k+1$ のときも $4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

別解 1.　$4^{2n+1}+3^{n+2}=4\cdot 16^n+9\cdot 3^n=4(13+3)^n+9\cdot 3^n$

$$\begin{aligned}&=4(13^n+{}_nC_1 13^{n-1}\cdot 3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}13^1\cdot 3^{n-1}+3^n)+9\cdot 3^n\\&=4\cdot 13(13^{n-1}+{}_nC_1 13^{n-2}\cdot 3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}3^{n-1})+4\cdot 3^n+9\cdot 3^n\\&=13\{4(13^{n-1}+{}_nC_1 13^{n-2}\cdot 3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}3^{n-1})+3^n\}\end{aligned}$$

よって，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

別解 2.　$16\equiv 3 \pmod{13}$ から　　$16^n\equiv 3^n \pmod{13}$

よって　　$4\cdot 4^{2n}\equiv 4\cdot 3^n \pmod{13}$

ゆえに　　$4^{2n+1}+9\cdot 3^n\equiv 4\cdot 3^n+9\cdot 3^n\equiv 13\cdot 3^n\equiv 0 \pmod{13}$

したがって　　$4^{2n+1}+3^{n+2}\equiv 0 \pmod{13}$

よって，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

(2)　[1]　$n=1$ のとき　　$2^n+1=2^1+1=3$

よって，$n=1$ のとき 2^n+1 は 3 で割り切れる。

[2]　$n=2k-1$ $(k\geqq 1)$ のとき，$2^{2k-1}+1$ は 3 で割り切れると仮定すると，m を整数として　$2^{2k-1}+1=3m$ ……① とおける。

$n=2(k+1)-1$ のときを考えると，① から

$$\begin{aligned}2^{2(k+1)-1}+1&=4\cdot 2^{2k-1}+1=4(3m-1)+1\\&=4\cdot 3m-3=3(4m-1)\end{aligned}$$

$4m-1$ は整数であるから，$2^{2(k+1)-1}+1$ は 3 で割り切れる。

よって，$n=2(k+1)-1$ のときも 2^n+1 は 3 で割り切れる。

[1]，[2] から，すべての正の奇数 n について 2^n+1 は 3 で割り切れる。

別解 1.　n を正の奇数とするとき

$$\begin{aligned}2^n+1&=(3-1)^n+1\\&=3^n+{}_nC_1 3^{n-1}(-1)+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}3\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^n+1\\&=3\{3^{n-1}+{}_nC_1 3^{n-2}(-1)+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}(-1)^{n-1}\}-1+1\\&=3\{3^{n-1}+{}_nC_1 3^{n-2}(-1)+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}(-1)^{n-1}\}\end{aligned}$$

よって，すべての正の奇数 n について，2^n+1 は 3 で割り切れる。

別解 2.　$4\equiv 1 \pmod 3$ から，0 以上の整数 m について

$4^m\equiv 1^m \pmod 3$

よって　　$2^{2m}\equiv 1 \pmod 3$

ゆえに　　$2\cdot 2^{2m}\equiv 2\cdot 1 \pmod 3$

したがって　　$2^{2m+1}+1\equiv 2+1\equiv 3\equiv 0 \pmod 3$

よって，すべての正の奇数 n について，2^n+1 は 3 で割り切れる。

19 n が 3 以上の自然数で，$x>0$ とするとき，不等式 $(1+x)^n>1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

解答　略

解説

$(1+x)^n>1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ ……① とする。

[1]　$n=3$ のとき

$(\text{左辺})=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$

$(\text{右辺})=1+3x+\dfrac{3\cdot 2}{2}x^2=1+3x+3x^2$

よって，$x>0$ から　　$(\text{左辺})-(\text{右辺})=x^3>0$

ゆえに，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(k\geqq 3)$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(1+x)^k>1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2 \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}&(1+x)^{k+1}-\left\{1+(k+1)x+\frac{(k+1)k}{2}x^2\right\}\\&=(1+x)(1+x)^k-\left\{1+(k+1)x+\frac{(k+1)k}{2}x^2\right\}\\&>(1+x)\left\{1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2\right\}-\left\{1+(k+1)x+\frac{(k+1)k}{2}x^2\right\}\\&=\frac{k(k-1)}{2}x^3\end{aligned}$$

$k\geqq 3$，$x>0$ から　　$\dfrac{k(k-1)}{2}x^3>0$

よって　　$(1+x)^{k+1}>1+(k+1)x+\dfrac{(k+1)k}{2}x^2$

すなわち，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，3 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

20 n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(1)　$n!\geqq 2^{n-1}$　　　(2)　$\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$n!\geqq 2^{n-1}$ ……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$(\text{左辺})=1!=1$，　$(\text{右辺})=2^0=1$

ゆえに，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$k!\geqq 2^{k-1} \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}(k+1)!-2^{(k+1)-1}&=(k+1)\cdot k!-2^k\geqq (k+1)2^{k-1}-2\cdot 2^{k-1}\\&=\{(k+1)-2\}2^{k-1}=(k-1)2^{k-1}\geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$(k+1)!\geqq 2^{(k+1)-1}$

すなわち，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　(1) から，n が自然数のとき　　$\dfrac{1}{n!}\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}&\leqq\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2\end{aligned}$$

21 n が自然数のとき，n^2 と 4^{n-2} の大小を比較せよ。

解答　$1\leqq n\leqq 3$ のとき $n^2>4^{n-2}$，$n=4$ のとき $n^2=4^{n-2}$，$n\geqq 5$ のとき $n^2<4^{n-2}$

解説

$n=1$，2，3，4，5 のとき，n^2 と 4^{n-2} の値を計算すると右の表のようになる。そこで

n	1	2	3	4	5	…
n^2	1	4	9	16	25	…
4^{n-2}	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64	…

$n\geqq 5$ のとき　$n^2<4^{n-2}$ ……①

を考える。

[1]　$n=5$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(k\geqq 5)$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$k^2<4^{k-2} \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}4^{(k+1)-2}-(k+1)^2&=4\cdot 4^{k-2}-(k+1)^2\\&>4k^2-(k+1)^2=3k^2-2k-1\\&=(k-1)(3k+1)\end{aligned}$$

$k\geqq 5$ であるから　　$(k-1)(3k+1)>0$

よって　　$4^{(k+1)-2}>(k+1)^2$

すなわち，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$n\geqq 5$ であるすべての自然数 n について ① は成り立つ。

以上により　　$1\leqq n\leqq 3$ のとき　　$n^2>4^{n-2}$

$n=4$ のとき　　$n^2=4^{n-2}$

$n\geqq 5$ のとき　　$n^2<4^{n-2}$

22 n が自然数のとき，3^n と $5n+1$ の大小を比較せよ。

解答　$n=1$，2 のとき $3^n<5n+1$，$n\geqq 3$ のとき $3^n>5n+1$

解説

$n=1$，2，3，4 のとき，3^n と $5n+1$ の値を計算すると，右の表のようになる。

n	1	2	3	4	…
3^n	3	9	27	81	…
$5n+1$	6	11	16	21	…

そこで，$n\geqq 3$ のとき　　$3^n>5n+1$ ……①

を考える。

[1]　$n=3$ のとき，① は成り立つ。
[2]　$n=k$ $(k \geqq 3)$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$3^k > 5k+1 \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。
$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$3^{k+1}-\{5(k+1)+1\}=3\cdot 3^k-5k-6$$
$$>3(5k+1)-5k-6=10k-3$$

$k \geqq 3$ であるから　$10k-3>0$
よって　$3^{k+1}>5(k+1)+1$
すなわち，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。
[1]，[2] から，$n \geqq 3$ であるすべての自然数 n について ① は成り立つ。
以上により　$n=1$，2 のとき　$3^n<5n+1$
$n \geqq 3$　のとき　$3^n>5n+1$

23 n は自然数とする。数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

(1)　$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$

(2)　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=1$，　右辺$=\dfrac{1}{9}(10-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1}=\frac{1}{9}(10^k-1) \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1}+10^k=\frac{1}{9}(10^k-1)+10^k$$
$$=\frac{1}{9}(10^k-1+9\cdot10^k)$$
$$=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。
[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=1\cdot3=3$，　右辺$=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot(1+1)\cdot(4\cdot1+5)=3$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)\{2(k+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5)+6(2k+3)\}$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。
[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

24 n は自然数とする。$4n^3-n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

「$4n^3-n$ は 3 の倍数である」を (A) とする。
[1]　$n=1$ のとき　$4n^3-n=4\cdot1^3-1=3$
よって，$n=1$ のとき，(A) は成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち $4k^3-k$ は 3 の倍数であると仮定すると，ある整数 m を用いて次のように表される。

$$4k^3-k=3m$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$4(k+1)^3-(k+1)=(4k^3-k)+3(4k^2+4k+1)$$
$$=3m+3(4k^2+4k+1)$$
$$=3(m+4k^2+4k+1)$$

$m+4k^2+4k+1$ は整数であるから，$4(k+1)^3-(k+1)$ は 3 の倍数である。
よって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。
[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

25 n は自然数とする。数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

(1)　$1+2\cdot\dfrac{3}{2}+3\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=2(n-2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+4$

(2)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$1+2\cdot\dfrac{3}{2}+3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=2(n-2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+4$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=1$，右辺$=2\cdot(-1)\cdot\dfrac{3}{2}+4=1$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4 \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$$
$$=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$$
$$=(3k-3)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4=2(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+4$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。
[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=1+1=2$，　右辺$=2^1\cdot1=2$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1) \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。
$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)\cdot(2k+1)(2k+2)$$
$$=(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)\cdot(2k+1)\cdot2(k+1)$$
$$=2(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)(2k+1)$$
$$=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。
[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

26 数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ。

(1)　n が自然数のとき　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$

(2)　n が 4 以上の自然数のとき　$2^n>3n+1$

(3)　n が 3 以上の自然数，$h>0$ のとき　$(1+h)^n>1+nh^2$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=1$，　右辺$=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。
$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\frac{(k+2)^3}{3}-\{1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2\}$$

$$>\frac{(k+2)^3}{3}-\frac{(k+1)^3}{3}-(k+1)^2$$

$$=\frac{3k^2+9k+7}{3}-(k^2+2k+1)=k+\frac{4}{3}>0$$

すなわち　$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\frac{(k+2)^3}{3}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$2^n>3n+1$ ……① とする。

[1]　$n=4$ のとき

左辺$=2^4=16$，　右辺$=3\cdot4+1=13$

よって，$n=4$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$k\geqq4$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$2^k>3k+1$　……②

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}=2\cdot2^k-(3k+4)$$
$$>2(3k+1)-(3k+4)=3k-2>0$$

すなわち　$2^{k+1}>3(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，4 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

(3)　$(1+h)^n>1+nh^2$ ……① とする。

[1]　$n=3$ のとき

① の両辺の差を考えると　$(1+h)^3-(1+3h^2)=3h+h^3>0$

すなわち　$(1+h)^3>1+3h^2$

よって，$n=3$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$k\geqq3$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$(1+h)^k>1+kh^2$　……②

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$(1+h)^{k+1}-\{1+(k+1)h^2\}=(1+h)^k(1+h)-\{1+(k+1)h^2\}$$
$$>(1+kh^2)(1+h)-\{1+(k+1)h^2\}$$
$$=h(kh^2-h+1)$$
$$=h\left\{k\left(h-\frac{1}{2k}\right)^2+1-\frac{1}{4k}\right\}>0$$

すなわち　$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h^2$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$h>0$ のとき，3 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{27}$ (1)　n は自然数とする。$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 で割り切れることを，数学的帰納法によって証明せよ。

(2)　n は 2 以上の自然数とする。$2^{3n}-7n-1$ は 49 で割り切れることを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　「$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 で割り切れる」を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　$5^{n+1}+6^{2n-1}=5^2+6=31$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち $5^{k+1}+6^{2k-1}$ は 31 で割り切れると仮定すると，ある整数 m を用いて次のように表される。

$5^{k+1}+6^{2k-1}=31m$

$n=k+1$ のときを考えると

$$5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}=5\cdot5^{k+1}+36\cdot6^{2k-1}$$
$$=5(5^{k+1}+6^{2k-1})+31\cdot6^{2k-1}$$
$$=5\cdot31m+31\cdot6^{2k-1}$$
$$=31(5m+6^{2k-1})$$

$5m+6^{2k-1}$ は整数であるから，$5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}$ は 31 で割り切れる。

よって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2)　「$2^{3n}-7n-1$ は 49 で割り切れる」を (A) とする。

[1]　$n=2$ のとき

$2^{3n}-7n-1=2^{3\cdot2}-7\cdot2-1=49$

よって，$n=2$ のとき，(A) は成り立つ。

[2]　$k\geqq2$ として，$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち $2^{3k}-7k-1$ は 49 で割り切れると仮定すると，ある整数 m を用いて次のように表される。

$2^{3k}-7k-1=49m$

$n=k+1$ のときを考えると

$$2^{3(k+1)}-7(k+1)-1=8\cdot2^{3k}-7k-8$$
$$=8(2^{3k}-7k-1)+49k$$
$$=8\cdot49m+49k$$
$$=49(8m+k)$$

$8m+k$ は整数であるから，$2^{3(k+1)}-7(k+1)-1$ は 49 で割り切れる。

よって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，2 以上のすべての自然数 n について (A) は成り立つ。

$\boxed{28}$ 条件 $a_1=3$，$a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

解答　(1)　$a_2=4$，$a_3=5$，$a_4=6$　　(2)　$a_n=n+2$

解説

(1)　$3^2=2a_2+1$ から　$a_2=4$

$4^2=3a_3+1$ から　$a_3=5$

$5^2=4a_4+1$ から　$a_4=6$

(2)　(1) から，$a_n=n+2$ ……① であると推測される。

[1]　$n=1$ のとき

① の右辺は　$1+2=3$

初項は $a_1=3$ なので，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$a_k=k+2$　……②

と仮定する。

$a_k{}^2=(k+1)a_{k+1}+1$ であるから，② より　$(k+2)^2=(k+1)a_{k+1}+1$

ゆえに　$k^2+4k+3=(k+1)a_{k+1}$

すなわち　$(k+1)(k+3)=(k+1)a_{k+1}$

両辺を $k+1\ (\neq 0)$ で割ると　$a_{k+1}=k+3$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。