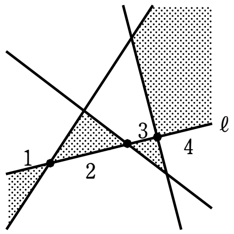
漸化式クイズ(難)

1 平面上に n 本の直線があって，それらのどの２本も平行でなく，また，どの３本も１点で交わらないとする。これら n 本の直線が，平面を a_n 個の部分に分けるとき，a_n を n の式で表せ。

解答 $a_n=\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$

解説



１本の直線で，平面は２つの部分に分けられるから　$a_1=2$

次に，n 本の直線により，平面が a_n 個の部分に分けられているとき，$(n+1)$ 本目の直線 ℓ を引くと，ℓ は既にある n 本の直線と n 個の点で交わり，これらの交点によって，ℓ は $(n-1)$ 個の線分と２個の半直線に分けられる。

これらの線分と半直線は，それぞれ，それが含まれる各平面の部分を２つに分けるから，直線 ℓ を引くことにより，平面の部分が $(n+1)$ 個増加する。よって

$$a_{n+1}=a_n+(n+1)\quad すなわち\quad a_{n+1}-a_n=n+1$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $n+1$ であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$

初項は $a_1=2$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，求める式は　$a_n=\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$

2 平面上に n 本の直線があって，それらのどの２本も平行でなく，また，どの３本も１点で交わらないとする。これら n 本の直線によって，交点はいくつできるか。

解答 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 個

解説

n 本の直線によってできる交点の個数を a_n とする。

１本の直線で交点はできないから　$a_1=0$

また，$(n+1)$ 本目の直線は，n 本の直線と交わり，交点が n 個できるから

$$a_{n+1}=a_n+n\quad すなわち\quad a_{n+1}-a_n=n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が n であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=0+\frac{1}{2}(n-1)n$

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}n(n-1)$

初項は $a_1=0$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，交点は $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 個できる。

3 １個のさいころを n 回投げるとき，１の目が偶数回出る確率を p_n とする。ただし，０は偶数と考える。このとき，p_1 を求めよ。また，p_n を n の式で表せ。

解答 $p_1=\dfrac{5}{6}$，$p_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$

解説

p_1 は，さいころを１回投げて１の目が０回出る確率，すなわち１以外の目が出る確率であるから　$p_1=\dfrac{5}{6}$

さいころを $(n+1)$ 回投げるとき，１の目が偶数回出るという事象は，２つの事象

[1]　n 回目までに１の目が偶数回出て，$(n+1)$ 回目に１以外の目が出る

[2]　n 回目までに１の目が奇数回出て，$(n+1)$ 回目に１の目が出る

の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

[1] の確率は $p_n\cdot\dfrac{5}{6}$，[2] の確率は $(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{6}$ であるから

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{5}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}$$

すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$

この式を変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

ここで，$q_n=p_n-\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$q_{n+1}=\frac{2}{3}q_n,\quad q_1=p_1-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

よって，数列 $\{q_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で

$$q_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$p_n=q_n+\dfrac{1}{2}$ であるから，p_n は

$$p_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

4 △ABC の頂点を移動する点 P がある。点 P は１つの頂点に達してから１秒後に，他の２つの頂点のいずれかに等しい確率で移動する。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 B にいる確率を p_n とする。p_n を n の式で表せ。

解答 $p_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

解説

初め頂点 A にいた点 P は，１秒後に等しい確率で頂点 B か頂点 C のどちらかに移動する。

よって，１秒後に頂点 B にいる確率 p_1 は　$p_1=\dfrac{1}{2}$

$(n+1)$ 秒後に頂点 B にいるのは，「n 秒後に頂点 B 以外にいて，その１秒後に頂点 B に移動する」という事象である。

よって　$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{2}$　　すなわち　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$

この式を変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$

ここで，$q_n=p_n-\dfrac{1}{3}$ とおくと

$$q_{n+1}=-\frac{1}{2}q_n,\quad q_1=p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

よって，数列 $\{q_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$$q_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$p_n=q_n+\dfrac{1}{3}$ であるから，p_n は　$p_n=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

5 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=3a_{n+1}+10a_n$$

解答 $a_n=\dfrac{5^{n-1}-(-2)^{n-1}}{7}$

解説

$a_{n+2}=3a_{n+1}+10a_n$ を変形すると

$$a_{n+2}+2a_{n+1}=5(a_{n+1}+2a_n)\quad\cdots\cdots①$$

$$a_{n+2}-5a_{n+1}=-2(a_{n+1}-5a_n)\quad\cdots\cdots②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 $a_2+2a_1=1$，公比５の等比数列で　$a_{n+1}+2a_n=5^{n-1}$　……③

② から，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 $a_2-5a_1=1$，公比 -2 の等比数列で　$a_{n+1}-5a_n=(-2)^{n-1}$　……④

③−④ から　$7a_n=5^{n-1}-(-2)^{n-1}$

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{5^{n-1}-(-2)^{n-1}}{7}$

6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$

(2)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=8a_{n+1}-7a_n$

解答 (1)　$a_n=\dfrac{7\cdot 2^{n-1}-2(-3)^{n-1}}{5}$　　(2)　$a_n=\dfrac{7^{n-1}-1}{6}$

解説

(1)　$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$ を変形すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-3(a_{n+1}-2a_n)\quad\cdots\cdots①$$

$$a_{n+2}+3a_{n+1}=2(a_{n+1}+3a_n)\quad\cdots\cdots②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=2$，公比 -3 の等比数列で

$$a_{n+1}-2a_n=2(-3)^{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

② から，数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 $a_2+3a_1=7$，公比２の等比数列で

$$a_{n+1}+3a_n=7\cdot 2^{n-1}\quad\cdots\cdots④$$

④−③ から　$5a_n=7\cdot 2^{n-1}-2(-3)^{n-1}$

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{7\cdot 2^{n-1}-2(-3)^{n-1}}{5}$

(2)　$a_{n+2}=8a_{n+1}-7a_n$ を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=7(a_{n+1}-a_n)\quad\cdots\cdots①$$

$$a_{n+2}-7a_{n+1}=a_{n+1}-7a_n\quad\cdots\cdots②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比７の等比数列で

$a_{n+1}-a_n=7^{n-1}$ ……③

②から，数列 $\{a_{n+1}-7a_n\}$ は初項 $a_2-7a_1=1$，公比 1 の等比数列で

$a_{n+1}-7a_n=1$ ……④

③−④ から　$6a_n=7^{n-1}-1$

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{7^{n-1}-1}{6}$

別解　$a_{n+2}=8a_{n+1}-7a_n$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=7(a_{n+1}-a_n)$ ……①

①から，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比 7 の等比数列で

$a_{n+1}-a_n=7^{n-1}$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 7^{n-1} であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}7^{k-1}=0+\dfrac{7^{n-1}-1}{7-1}$

よって　$a_n=\dfrac{7^{n-1}-1}{6}$

初項は $a_1=0$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{7^{n-1}-1}{6}$

別解　$a_{n+2}=8a_{n+1}-7a_n$ を変形すると

$a_{n+2}-7a_{n+1}=a_{n+1}-7a_n$ ……②

②から，数列 $\{a_{n+1}-7a_n\}$ は初項 $a_2-7a_1=1$，公比 1 の等比数列で

$a_{n+1}-7a_n=1$

この式を変形すると　$a_{n+1}+\dfrac{1}{6}=7\left(a_n+\dfrac{1}{6}\right)$　　また　$a_1+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$

よって　$a_n+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\cdot 7^{n-1}$

したがって，一般項は

$a_n=\dfrac{1}{6}\cdot 7^{n-1}-\dfrac{1}{6}$　すなわち　$a_n=\dfrac{7^{n-1}-1}{6}$

7　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+3b_n$

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答　(1)　$a_n+b_n=3\cdot 4^{n-1}$　　(2)　$a_n-b_n=2^{n-1}$

(3)　$a_n=\dfrac{3\cdot 4^{n-1}+2^{n-1}}{2}$，$b_n=\dfrac{3\cdot 4^{n-1}-2^{n-1}}{2}$

解説

(1)　$a_{n+1}+b_{n+1}=(3a_n+b_n)+(a_n+3b_n)=4(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=3$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列で

$a_n+b_n=3\cdot 4^{n-1}$ ……①

(2)　$a_{n+1}-b_{n+1}=(3a_n+b_n)-(a_n+3b_n)=2(a_n-b_n)$

また　$a_1-b_1=1$

よって，数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で

$a_n-b_n=2^{n-1}$ ……②

(3)　①+② から　$a_n=\dfrac{3\cdot 4^{n-1}+2^{n-1}}{2}$

①−② から　$b_n=\dfrac{3\cdot 4^{n-1}-2^{n-1}}{2}$

8　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$a_1=0$，$b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3b_n$，$b_{n+1}=a_n-b_n$

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-3b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答　(1)　$a_n+b_n=2^{n-1}$，$a_n-3b_n=-3(-2)^{n-1}$

(2)　$a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}-3(-2)^{n-1}}{4}$，$b_n=\dfrac{2^{n-1}+3(-2)^{n-1}}{4}$

解説

(1)　$a_{n+1}+b_{n+1}=(a_n+3b_n)+(a_n-b_n)=2(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=1$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で

$a_n+b_n=2^{n-1}$ ……①

$a_{n+1}-3b_{n+1}=(a_n+3b_n)-3(a_n-b_n)=-2(a_n-3b_n)$

また　$a_1-3b_1=-3$

よって，数列 $\{a_n-3b_n\}$ は初項 -3，公比 -2 の等比数列で

$a_n-3b_n=-3(-2)^{n-1}$ ……②

(2)　①×3+② から　$4a_n=3\cdot 2^{n-1}-3(-2)^{n-1}$

よって　$a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}-3(-2)^{n-1}}{4}$

①−② から　$4b_n=2^{n-1}+3(-2)^{n-1}$　　よって　$b_n=\dfrac{2^{n-1}+3(-2)^{n-1}}{4}$

9　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2n+3$　($n=1$，2，3，……)

(1)　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_n=n(n+2)$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=2n+3$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)\\&=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}3\\&=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)\end{aligned}$$

よって　$b_n=n(n+2)$

初項は $b_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=n(n+2)$

(2)　$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$

10　1 個のさいころを n 回投げるとき，3 の倍数の目が奇数回出る確率を p_n とする。p_n を n の式で表せ。

解答　$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

解説

p_1 は，さいころを 1 回投げて 3 の倍数の目が 1 回出る確率，すなわち 3，6 の目が出る確率であるから　$p_1=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

さいころを $(n+1)$ 回投げるとき，3，6 の目が奇数回出るという事象は，2 つの事象

[1]　n 回目までに 3，6 の目が奇数回出て，$(n+1)$ 回目に 3，6 以外の目が出る

[2]　n 回目までに 3，6 の目が偶数回出て，$(n+1)$ 回目に 3，6 の目が出る

の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

[1] の確率は $p_n\cdot\dfrac{2}{3}$，[2] の確率は $(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{3}$ であるから

$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{2}{3}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{3}$　　すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$

この式を変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　よって　$p_n=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

11　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$　($n=1$，2，3，……)

(1)　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_n=\dfrac{3^n-1}{2}$　　(2)　$a_n=\dfrac{2}{3^n-1}$

解説

(1)　$a_n\fallingdotseq 0$ であるから，漸化式の両辺の逆数をとると

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+1$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+1$，$b_1=1$

$b_{n+1}=3b_n+1$ を変形すると

$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$　　また　$b_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

よって，数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{3}{2}$，公比 3 の等比数列で

$b_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\dfrac{3^n-1}{2}$

(2)　$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\dfrac{2}{3^n-1}$

$\boxed{12}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_n=2^{n-1}+1$　(2)　$a_n=2^{n-1}+n$

解説

(1)　$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\{2a_{n+1}-(n+1)+1\}-(2a_n-n+1)$

$=2(a_{n+1}-a_n)-1$

よって　$b_{n+1}=2b_n-1$

$b_1=a_2-a_1=(2a_1-1+1)-a_1=a_1=2$

$b_{n+1}=2b_n-1$ を変形すると

$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$　また　$b_1-1=2-1=1$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で

$b_n-1=2^{n-1}$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=2^{n-1}+1$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が $b_n=2^{n-1}+1$ であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}+1)$

$=2+\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}+(n-1)$

よって　$a_n=2^{n-1}+n$

初項は $a_1=2$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^{n-1}+n$

$\boxed{13}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3n-2a_n$ であるとする。

(1)　a_{n+1} を a_n の式で表せ。　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1$　(2)　$a_n=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3$

解説

(1)　$S_{n+1}=3(n+1)-2a_{n+1}$

$S_n=3n-2a_n$

辺々引くと

$S_{n+1}-S_n=3-2a_{n+1}+2a_n$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$a_{n+1}=3-2a_{n+1}+2a_n$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1$

(2)　$S_n=3n-2a_n$ から　$S_1=3-2a_1$

また，$S_1=a_1$ であるから

$3-2a_1=a_1$

よって　$a_1=1$

$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1$ を変形すると

$a_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(a_n-3)$　また　$a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で

$a_n-3=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3$

$\boxed{14}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=1,\ na_{n+1}-2(n+1)a_n=n(n+1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_n=2^n-1$　(2)　$a_n=n(2^n-1)$

解説

(1)　与えられた漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-2\cdot\dfrac{a_n}{n}=1$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}-2b_n=1,\ b_1=\dfrac{a_1}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

$b_{n+1}-2b_n=1$ を変形すると

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　$b_1+1=2$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列で

$b_n+1=2^n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=2^n-1$

(2)　$a_n=nb_n$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=n(2^n-1)$

$\boxed{15}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。[25 点]

$a_1=\dfrac{1}{3},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-a_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　漸化式の両辺の逆数をとって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2-a_n}{a_n}$　すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}-1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1,\ b_1=3$

$b_{n+1}=2b_n-1$ を変形すると　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また　$b_1-1=2$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列で

$b_n-1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

したがって，$b_n=2^n+1$ であるから　$a_n=\dfrac{1}{2^n+1}$

解説

漸化式の両辺の逆数をとって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2-a_n}{a_n}$　すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}-1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1,\ b_1=3$

$b_{n+1}=2b_n-1$ を変形すると　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また　$b_1-1=2$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列で

$b_n-1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

したがって，$b_n=2^n+1$ であるから　$a_n=\dfrac{1}{2^n+1}$

$\boxed{16}$ 1，2，3，4，5 の数字が書かれた 5 枚のカードの中から 1 枚取り出してもとに戻すという試行を n 回行うとき，偶数のカードが奇数回出る確率を p_n とする。p_n を求めよ。[25 点]

解答　1 枚取り出したときに偶数のカードが出る確率は　$\dfrac{2}{5}$

$(n+1)$ 回の試行で偶数のカードが奇数回出るのは，次のどちらかの場合である。

[1]　n 回の試行で偶数のカードが奇数回出て，$(n+1)$ 回目に奇数のカードが出る

[2]　n 回の試行で偶数のカードが偶数回出て，$(n+1)$ 回目に偶数のカードが出る

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{3}{5}+(1-p_n)\cdot\dfrac{2}{5}$　すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{2}{5}$

これを変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

カードを 1 回取り出すとき，偶数のカードが奇数回出るのは，偶数のカードが 1 回出る場合であるから　$p_1=\dfrac{2}{5}$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから　$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$　よって　$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

解説

1 枚取り出したときに偶数のカードが出る確率は　$\dfrac{2}{5}$

$(n+1)$ 回の試行で偶数のカードが奇数回出るのは，次のどちらかの場合である。

[1]　n 回の試行で偶数のカードが奇数回出て，$(n+1)$ 回目に奇数のカードが出る

[2]　n 回の試行で偶数のカードが偶数回出て，$(n+1)$ 回目に偶数のカードが出る

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{3}{5}+(1-p_n)\cdot\dfrac{2}{5}$　すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{2}{5}$

これを変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

カードを 1 回取り出すとき，偶数のカードが奇数回出るのは，偶数のカードが 1 回出る場合であるから　$p_1=\dfrac{2}{5}$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$　よって　$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

$\boxed{17}$ 数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n-3a_n=-2n$ を満たしている。この数列の初項と一般項を求めよ。[25 点]

解答　$S_1=a_1$ であるから　$a_1-3a_1=-2$　ゆえに　$a_1=1$

$S_n=3a_n-2n$，$S_{n+1}=3a_{n+1}-2(n+1)$ から

$S_{n+1}-S_n=3(a_{n+1}-a_n)-2$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-2$　すなわち　$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1$

よって　$a_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}(a_n+2)$　また　$a_1+2=1+2=3$

ゆえに　$a_n+2=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　したがって　$a_n=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-2$

解説

$S_1=a_1$ であるから　$a_1-3a_1=-2$　ゆえに　$a_1=1$

$S_n=3a_n-2n$，$S_{n+1}=3a_{n+1}-2(n+1)$ から

$S_{n+1}-S_n=3(a_{n+1}-a_n)-2$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-2$　すなわち　$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1$

よって　$a_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}(a_n+2)$　また　$a_1+2=1+2=3$

ゆえに　$a_n+2=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　したがって　$a_n=3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-2$

18 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$

解答　$a_n=2\cdot3^{n-1}-n$

解説

$a_{n+2}=3a_{n+1}+2(n+1)-1$

$a_{n+1}=3a_n\quad+2n\quad-1$

辺々引くと　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+2$

これを変形すると　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また　$b_1+1=a_2-a_1+1=(3\cdot1+2\cdot1-1)-1+1=4$

よって　$b_n+1=4\cdot3^{n-1}$　ゆえに　$b_n=4\cdot3^{n-1}-1$　……(*)

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4\cdot3^{k-1}-1)=1+\dfrac{4(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)$

$=2\cdot3^{n-1}-n$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-n$

参考　(*) から　$a_{n+1}=a_n+4\cdot3^{n-1}-1$　これを $a_{n+1}=3a_n+2n-1$ に代入すると

$a_n+4\cdot3^{n-1}-1=3a_n+2n-1$　よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-n$

このように進めてもよい。

別解　問題の漸化式は $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ [$f(n)$ は n の 1 次式] の形をしている。

そこで，$f(n)=\alpha n+\beta$ とおき，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$ が，

$a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\}$ …… ① の形に変形できるように，α，β の値を定める。

① から　$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$

ゆえに　$a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta$

これと $a_{n+1}=3a_n+2n-1$ の右辺の係数を比較して　$-2\alpha=2$，$\alpha-2\beta=-1$

よって　$\alpha=-1$，$\beta=0$　ゆえに　$f(n)=-n$

このとき ① より，数列 $\{a_n-(-n)\}$ は初項 $a_1+1=2$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n-(-n)=2\cdot3^{n-1}$

したがって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-n$

19 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot3^{n-1}-2n-1)$

解説

$a_{n+2}=3a_{n+1}+2(n+1)$

$a_{n+1}=3a_n+2n$

辺々引くと　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+2$

よって　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また　$b_1+1=a_2-a_1+1=(3\cdot1+2)-1+1=5$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 5，公比 3 の等比数列であるから

$b_n+1=5\cdot3^{n-1}$　ゆえに　$b_n=5\cdot3^{n-1}-1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot3^{k-1}-1)$

$=1+5\cdot\dfrac{3^{n-1}-1}{3-1}-(n-1)=\dfrac{1}{2}(5\cdot3^{n-1}-2n-1)$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot3^{n-1}-2n-1)$

別解　$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ とおくと　$a_n=b_n+\alpha n+\beta$

これを漸化式に代入して

$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3(b_n+\alpha n+\beta)+2n$

よって　$b_{n+1}=3b_n+2(\alpha+1)n+2\beta-\alpha$

ここで，数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるように α，β を定めるため，

$2(\alpha+1)=0$，$2\beta-\alpha=0$ とすると　$\alpha=-1$，$\beta=-\dfrac{1}{2}$

このとき　$b_{n+1}=3b_n$，　$a_n=b_n-n-\dfrac{1}{2}$

また　$b_1=a_1+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

したがって　$b_n=\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}$　ゆえに　$a_n=\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}-n-\dfrac{1}{2}$

20 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n^2+n$ で定義されている。数列 $\{a_n-f(n)\}$ が公比 2 の等比数列となるように n の 2 次式 $f(n)$ を定め，a_n を n で表せ。

解答　$f(n)=n^2+n+2$，$a_n=n^2+n+2-2^{n-1}$

解説

$f(n)=an^2+bn+c$ $(a\neq0)$ とおく。

数列 $\{a_n-f(n)\}$ が公比 2 の等比数列となるとき

$a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$

よって　$a_{n+1}-2a_n=f(n+1)-2f(n)$

$=a(n+1)^2+b(n+1)+c-2(an^2+bn+c)$

$=-an^2+(2a-b)n+a+b-c$

漸化式より $a_{n+1}-2a_n=-n^2+n$ であるから

$-an^2+(2a-b)n+a+b-c=-n^2+n$

両辺の係数を比較して　$-a=-1$，$2a-b=1$，$a+b-c=0$

これを解いて　$a=1$，$b=1$，$c=2$

ゆえに　$f(n)=n^2+n+2$

数列 $\{a_n-f(n)\}$ は初項 $a_1-f(1)=3-4=-1$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n-f(n)=-2^{n-1}$

したがって　$a_n=f(n)-2^{n-1}=n^2+n+2-2^{n-1}$

21 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+5\cdot3^n$

解答　$a_n=5\cdot3^n-6\cdot2^n$

解説

$a_{n+1}=2a_n+5\cdot3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{5}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{5}{3}$

これを変形すると　$b_{n+1}-5=\dfrac{2}{3}(b_n-5)$

また　$b_1-5=\dfrac{a_1}{3}-5=\dfrac{3}{3}-5=-4$

よって，数列 $\{b_n-5\}$ は初項 -4，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$b_n-5=-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　ゆえに　$b_n=5-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=3^nb_n=5\cdot3^n-4\cdot3\cdot2^{n-1}=5\cdot3^n-6\cdot2^n$

別解　$a_{n+1}=2a_n+5\cdot3^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{3}{2}$

よって，$n\geqq2$ のとき

$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k=\frac{3}{2}+\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{15}{2}\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=5\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-6$　…… ①

初項は $b_1=\dfrac{3}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=2^nb_n=5\cdot3^n-6\cdot2^n$

22 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$　　(2)　$a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$

解答　(1)　$a_n=2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}$　　(2)　$a_n=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{4}$

これを変形すると　　$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$

また　　$b_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

よって，数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+\frac{1}{2}=1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\qquad ゆえに\qquad b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}$$

したがって　　$a_n=2^nb_n=2^n\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{2}\right\}=2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}$

別解　$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

また　　$b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots ①$$

$b_1=\dfrac{1}{3}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　　$a_n=3^nb_n=2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}$

(2)　漸化式の両辺に 3^n を掛けると　$3\cdot3^{n+1}a_{n+1}=3^na_n+4$

$b_n=3^na_n$ とおくと　　$3b_{n+1}=b_n+4$

これを変形すると　　$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}(b_n-2)$

また　　$b_1-2=3a_1-2=-92$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 -92，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n-2=-92\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに　　$b_n=2-92\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=\dfrac{b_n}{3^n}=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$

別解　漸化式の両辺に 9^n を掛けると　　$9^{n+1}a_{n+1}=9^na_n+4\cdot3^n$

$b_n=9^na_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+4\cdot3^n$

また　$b_1=9a_1=-270$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot3^k=-270+\frac{12(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=2\cdot3^n-276\quad\cdots\cdots ①$$

$b_1=-270$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　　$a_n=\dfrac{b_n}{9^n}=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$

23　$a_1=1$，$a_{n+1}a_n=2\sqrt{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

解説

$a_1>0$ であるから，漸化式により　　$a_2>0$　　　同様にして　　$a_3>0$

以下同じようにして，すべての自然数 n に対して　　$a_n>0$

$a_{n+1}a_n=2\sqrt{a_n}$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2a_{n+1}+\log_2a_n=\log_22+\frac{1}{2}\log_2a_n$$

ゆえに　　$\log_2a_{n+1}=1-\dfrac{1}{2}\log_2a_n$

$\log_2a_n=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+1$

これを変形して　　　　$b_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1-\dfrac{2}{3}=\log_2a_1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$$b_n-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad よって\quad b_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって　　$a_n=2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

24　$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{25}{{a_n}^2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-2)^{n-1}}$

解説

$a_1>0$ であるから，漸化式により　　$a_2>0$

同様にして　　$a_3>0$

以下同じようにして，すべての自然数 n に対して　$a_n>0$

$a_{n+1}=\dfrac{25}{{a_n}^2}$ の両辺の 5 を底とする対数をとると

$$\log_5a_{n+1}=2-2\log_5a_n$$

$\log_5a_n=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=-2b_n+2$

これを変形して　　$b_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-2\left(b_n-\dfrac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1-\dfrac{2}{3}=\log_5a_1-\dfrac{2}{3}=\log_55-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，公比 -2 の等比数列で

$$b_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(-2)^{n-1}$$

よって　　$b_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}(-2)^{n-1}$　　　ゆえに　　$a_n=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-2)^{n-1}}$

25　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

解答　(1)　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$　　(2)　$a_n=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

解説

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ の両辺を $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(2)　$b_1=\dfrac{a_1}{1\cdot2}=1$ である。(1) から，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{3n+1}{2(n+1)}\quad\cdots\cdots ①$$

初項は $b_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　　$a_n=n(n+1)b_n=n(n+1)\cdot\dfrac{3n+1}{2(n+1)}=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

26　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$na_{n+1}=(n+2)a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{n^2+n-1}{2}$

解説

$na_{n+1}=(n+2)a_n+1$ の両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくと

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=b_n+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}\quad\cdots\cdots ①$$

初項は $b_1=\dfrac{1}{4}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　　$a_n=n(n+1)b_n=n(n+1)\cdot\dfrac{n^2+n-1}{2n(n+1)}=\dfrac{n^2+n-1}{2}$

$\boxed{27}$ $a_1=\dfrac{1}{2}$，$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ で定まる数列を数列 $\{a_n\}$ とする。a_n を n の式で表せ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

解説

（解答 1）　$n\geqq 2$ のとき，漸化式を変形して　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

$a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$ であるから　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$

これを繰り返して　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

よって　　$a_n=\dfrac{2\cdot 1}{(n+1)n}\cdot\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

（解答 2）　漸化式の両辺に n を掛けて　　$n(n+1)a_n=(n-1)na_{n-1}$

よって　　$n(n+1)a_n=(n-1)na_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot 2a_1=1$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\boxed{28}$ $a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

解説

（解 1）　$n\geqq 2$ のとき　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$

$a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$ であるから　　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}a_1$$

よって　　$a_n=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{(n+2)(n+1)n}\cdot\dfrac{2}{3}$

すなわち　　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

（解 2）　漸化式の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}$$

したがって

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot 2\cdot 3a_1=4$$

よって　　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

$\boxed{29}$ $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n-2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{1-(-2)^n}$

解説

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n-2}$ …… ① とする。

① において，$a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$ であるから，$a_n=0$ となる n があると仮定すると　　$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$

ところが $a_1=\dfrac{1}{3}$ $(\neq 0)$ であるから，これは矛盾。

よって，すべての自然数 n について $a_n\neq 0$ である。

① の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3-\dfrac{2}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=3-2b_n$

これを変形すると　　$b_{n+1}-1=-2(b_n-1)$

また　　$b_1-1=\dfrac{1}{a_1}-1=3-1=2$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 2，公比 -2 の等比数列で

$b_n-1=2\cdot(-2)^{n-1}$　すなわち　$b_n=1-(-2)^n$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{1-(-2)^n}$

$\boxed{30}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{3^n-2}$

解説

$a_1>0$ であるから，漸化式により　　$a_2>0$

同様にして　　$a_3>0$

以下同じようにして，すべての自然数 n に対して　　$a_n>0$

漸化式の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4+\dfrac{3}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=4+3b_n$

これを変形すると　　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

また　　$b_1+2=\dfrac{1}{a_1}+2=1+2=3$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列で

$b_n+2=3\cdot 3^{n-1}$　すなわち　$b_n=3^n-2$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3^n-2}$

$\boxed{31}$ $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ …… ① によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$b_n=a_n-\alpha$ とおく。① は $\alpha=$ ア $\boxed{}$ のとき $b_{n+1}=\dfrac{\text{ウ}\boxed{}\,b_n}{b_n+\text{イ}\boxed{}}$ と変形できる。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　(ア)　3　　(イ)　1　　(ウ)　1　　(2)　$a_n=\dfrac{3n+1}{n}$

解説

(1)　$b_n=a_n-\alpha$ とおくと，$a_n=b_n+\alpha$ であり，漸化式から

$b_{n+1}+\alpha=\dfrac{4(b_n+\alpha)-9}{(b_n+\alpha)-2}$　　よって　　$b_{n+1}=\dfrac{(4-\alpha)b_n-(\alpha-3)^2}{b_n+\alpha-2}$

ここで，$\alpha=$ ア3 とすると　$b_{n+1}=\dfrac{\text{ウ}1\cdot b_n}{b_n+\text{イ}1}$ …… ②　と変形できる。

(2)　$b_1=a_1-3=1$

$b_1>0$ であるから，② により　　$b_2>0$　　同様にして　　$b_3>0$

以下同じようにして，すべての自然数 n に対して　　$b_n>0$

② の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{b_{n+1}}=1+\dfrac{1}{b_n}$

数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ は 初項 $\dfrac{1}{b_1}=1$，公差 1 の等差数列であるから　　$\dfrac{1}{b_n}=n$

ゆえに　　$a_n=b_n+3=\dfrac{1}{n}+3=\dfrac{3n+1}{n}$

$\boxed{32}$ $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{4}{12-9a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{2(n-1)}{3n}$

解説

$b_n=a_n-\alpha$ とおくと，$a_n=b_n+\alpha$ であり，漸化式から

$b_{n+1}+\alpha=\dfrac{4}{12-9(b_n+\alpha)}$　　よって　　$b_{n+1}=\dfrac{4-\alpha\{12-9(b_n+\alpha)\}}{12-9(b_n+\alpha)}$

ゆえに　　$b_{n+1}=\dfrac{9\alpha b_n+(3\alpha-2)^2}{-9b_n+(12-9\alpha)}$　…… ①

ここで，$(3\alpha-2)^2=0$ すなわち $\alpha=\dfrac{2}{3}$ とすると，① は

$b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{-3b_n+2}$　…… ②　となる。

$b_1=a_1-\alpha=0-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$ であり，ある自然数 n で $b_{n+1}=0$ であるとすると，② から　　$b_n=0$

ゆえに，$b_{n+1}=b_n=b_{n-1}=$ …… $=b_2=b_1=0$ となるが，これは矛盾。

よって，すべての自然数 n について $b_n\neq 0$ である。

② の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{3}{2}$

数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{b_1}=-\dfrac{3}{2}$，公差 $-\dfrac{3}{2}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{b_n}=-\frac{3}{2}+(n-1)\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}n$$

ゆえに　　$b_n=-\dfrac{2}{3n}$

よって　　$a_n=b_n+\alpha=-\dfrac{2}{3n}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2(n-1)}{3n}$

33 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ で定められている。

(1) $b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ とおく。このとき，数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるような α，β $(\alpha>\beta)$ の値を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

解答 (1) $\alpha=2$，$\beta=-1$ (2) $a_n=\dfrac{2\cdot4^n+1}{4^n-1}$

解説

(1) $$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}-\beta}{\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}-\alpha}=\frac{(3-\beta)a_n+2-2\beta}{(3-\alpha)a_n+2-2\alpha}$$

$$=\frac{3-\beta}{3-\alpha}\cdot\frac{a_n+\dfrac{2-2\beta}{3-\beta}}{a_n+\dfrac{2-2\alpha}{3-\alpha}}\quad\cdots\cdots①$$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるための条件は $\dfrac{2-2\beta}{3-\beta}=-\beta$，$\dfrac{2-2\alpha}{3-\alpha}=-\alpha$ ……②

よって，α，β は2次方程式 $2-2x=-x(3-x)$ の2つの解であり，$x^2-x-2=0$ を解いて $x=-1$，2

$\alpha>\beta$ から $\alpha=2$，$\beta=-1$

(2) $\dfrac{3-\beta}{3-\alpha}=\dfrac{3+1}{3-2}=4$ よって，①，②から $b_{n+1}=4b_n$

また $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-2}=4$ ゆえに $b_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$

よって $\dfrac{a_n+1}{a_n-2}=4^n$ ゆえに $a_n=\dfrac{2\cdot4^n+1}{4^n-1}$

34 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$ で定められている。このとき，一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ とおいたときに数列 $\{b_n\}$ が等比数列となる条件を調べる方法で求めよ。

解答 $a_n=\dfrac{2\cdot3^{n-1}-2^{n-2}}{3^{n-1}-2^{n-2}}$

解説

$b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-\beta}{\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}-\alpha}=\frac{(4-\beta)a_n-(2+\beta)}{(4-\alpha)a_n-(2+\alpha)}$$

$$=\frac{4-\beta}{4-\alpha}\cdot\frac{a_n-\dfrac{2+\beta}{4-\beta}}{a_n-\dfrac{2+\alpha}{4-\alpha}}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるための条件は

$$\frac{2+\beta}{4-\beta}=\beta,\quad \frac{2+\alpha}{4-\alpha}=\alpha$$

よって，α，β は2次方程式 $2+x=x(4-x)$ の2つの解であり，$x^2-3x+2=0$ を解くと，$(x-1)(x-2)=0$ から $x=1$，2

$\alpha>\beta$ とすると $\alpha=2$，$\beta=1$

このとき，①は $b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n$ また $b_1=\dfrac{a_1-1}{a_1-2}=\dfrac{3-1}{3-2}=2$

ゆえに $b_n=2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ よって $\dfrac{a_n-1}{a_n-2}=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに $2^{n-2}(a_n-1)=3^{n-1}(a_n-2)$

したがって $a_n=\dfrac{2\cdot3^{n-1}-2^{n-2}}{3^{n-1}-2^{n-2}}$

35 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$

(2) $a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$

解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{5}\{3^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$ (2) $a_n=2-(-2)^{n-1}$

解説

(1) 漸化式を変形して

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$，$a_2+2a_1=1$ ……①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$，$a_2-3a_1=1$ ……②

①から $a_{n+1}+2a_n=1\cdot3^{n-1}$ ……③

②から $a_{n+1}-3a_n=1\cdot(-2)^{n-1}$ ……④

③−④から $5a_n=3^{n-1}-(-2)^{n-1}$

したがって $a_n=\dfrac{1}{5}\{3^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$

(2) 漸化式を変形して $a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$，$a_2-a_1=3$

ゆえに $a_{n+1}-a_n=3(-2)^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3(-2)^{k-1}=1+\dfrac{3\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}=2-(-2)^{n-1}$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=2-(-2)^{n-1}$

別解 漸化式を変形して $a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n$

ゆえに $a_{n+1}+2a_n=a_n+2a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2+2a_1=6$

すなわち，$a_{n+1}+2a_n=6$ が成り立つ。

変形すると $a_{n+1}-2=-2(a_n-2)$，$a_1-2=-1$

よって $a_n-2=-1\cdot(-2)^{n-1}$

ゆえに $a_n=2-(-2)^{n-1}$

36 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_2=13$，$a_{n+2}-5a_{n+1}-6a_n=0$

(2) $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

解答 (1) $a_n=2\cdot6^{n-1}+(-1)^n$ (2) $a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

解説

(1) 漸化式を変形して

$a_{n+2}+a_{n+1}=6(a_{n+1}+a_n)$ ……①，

$a_{n+2}-6a_{n+1}=-(a_{n+1}-6a_n)$ ……②

①より，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 $a_2+a_1=14$，公比6の等比数列であるから

$a_{n+1}+a_n=14\cdot6^{n-1}$ ……③

②より，数列 $\{a_{n+1}-6a_n\}$ は初項 $a_2-6a_1=7$，公比 -1 の等比数列であるから

$a_{n+1}-6a_n=7\cdot(-1)^{n-1}$ ……④

③−④から $7a_n=14\cdot6^{n-1}-7(-1)^{n-1}$

したがって $a_n=2\cdot6^{n-1}+(-1)^n$

(2) 漸化式を変形して $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比3の等比数列であるから

$a_{n+1}-a_n=1\cdot3^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot3^{k-1}=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

別解 1．漸化式を変形して $a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-3a_n$

よって $a_{n+1}-3a_n=a_n-3a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-3a_1=-1$

すなわち，$a_{n+1}-3a_n=-1$ が成り立つ。

これを変形すると $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=3\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるから $a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot3^{n-1}$

したがって $a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

別解 2．漸化式を変形して

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$ ……①，

$a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-3a_n$ ……②

①より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比3の等比数列であるから

$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$ ……③

②より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=-1$，公比1の等比数列であるから

$a_{n+1}-3a_n=-1$ ……④

③−④から $2a_n=3^{n-1}+1$ よって $a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

37 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=0$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

解答 $a_n=(n-1)\cdot2^{n-1}$

解説

漸化式を変形して $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=2-0=2$，公比2の等比数列であるから

$a_{n+1}-2a_n=2\cdot2^{n-1}$ すなわち $a_{n+1}-2a_n=2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1}{2}=0$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n=0+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n-1)$$

$a_n=2^n b_n$ であるから　　$a_n=2^n\cdot\frac{1}{2}(n-1)=(n-1)\cdot 2^{n-1}$

$\boxed{38}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}+8a_{n+1}+16a_n=0$$

解答　$a_n=(9n-13)\cdot(-4)^{n-2}$

解説

漸化式を変形して

$$a_{n+2}+4a_{n+1}=-4(a_{n+1}+4a_n)$$

よって，数列 $\{a_{n+1}+4a_n\}$ は初項 $a_2+4a_1=9$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+4a_n=9\cdot(-4)^{n-1}$$

両辺を $(-4)^{n+1}$ で割ると　　$\frac{a_{n+1}}{(-4)^{n+1}}-\frac{a_n}{(-4)^n}=\frac{9}{16}$

$\frac{a_n}{(-4)^n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}-b_n=\frac{9}{16}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\frac{a_1}{-4}=-\frac{1}{4}$，公差 $\frac{9}{16}$ の等差数列であるから

$$b_n=-\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\frac{9}{16}=\frac{1}{16}(9n-13)$$

$a_n=(-4)^n b_n$ であるから

$$a_n=(-4)^n\cdot\frac{1}{16}(9n-13)=(9n-13)\cdot(-4)^{n-2}$$

$\boxed{39}$ n 段（n は自然数）ある階段を 1 歩で 1 段または 2 段上がるとき，この階段の上がり方の総数を a_n とする。このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

解説

$a_1=1,\ a_2=2$ である。

$n\geqq 3$ のとき，n 段の階段を上がる方法には，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　最後が 1 段上がりのとき，場合の数は $(n-1)$ 段目までの上がり方の総数と等しく
　　a_{n-1} 通り

[2]　最後が 2 段上がりのとき，場合の数は $(n-2)$ 段目までの上がり方の総数と等しく
　　a_{n-2} 通り

よって　　$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqq 3)$

この漸化式は，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\geqq 1)$ …… ① と同値である。

$x^2=x+1$ の 2 つの解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1$$

また，① から　　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

よって　　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，$a_2-\alpha a_1=2-\alpha$　…… ②

　　　　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$，$a_2-\beta a_1=2-\beta$　…… ③

② から　　$a_{n+1}-\alpha a_n=(2-\alpha)\beta^{n-1}$　…… ④

③ から　　$a_{n+1}-\beta a_n=(2-\beta)\alpha^{n-1}$　…… ⑤

④－⑤ から　　$(\beta-\alpha)a_n=(2-\alpha)\beta^{n-1}-(2-\beta)\alpha^{n-1}$　…… ⑥

ここで，$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから　　$\beta-\alpha=\sqrt{5}$

また，$\alpha+\beta=1$，$\alpha^2=\alpha+1$，$\beta^2=\beta+1$ であるから

　　$2-\alpha=2-(1-\beta)=\beta+1=\beta^2$　　　同様にして　　$2-\beta=\alpha^2$

よって，⑥ から　　$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

$\boxed{40}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n$$

解答　$a_n=\frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$

解説

$x^2=x+3$ すなわち $x^2-x-3=0$ の 2 つの解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと，解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-3$

また，漸化式は $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ となるから

　　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，$a_2-\alpha a_1=1-\alpha$；

　　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$，$a_2-\beta a_1=1-\beta$

よって，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $1-\alpha$，公比 β の等比数列；

　　数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は初項 $1-\beta$，公比 α の等比数列。

ゆえに　　$a_{n+1}-\alpha a_n=(1-\alpha)\beta^{n-1}$　…… ①

　　　　$a_{n+1}-\beta a_n=(1-\beta)\alpha^{n-1}$　…… ②

①－② から　　$(\beta-\alpha)a_n=(1-\alpha)\beta^{n-1}-(1-\beta)\alpha^{n-1}$　…… ③

ここで，$\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$，$\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ であるから　　$\beta-\alpha=\sqrt{13}$

また $\alpha+\beta=1$ から　　$1-\alpha=\beta$，$1-\beta=\alpha$

よって，③ から

$$a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$$

$\boxed{41}$ 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1=b_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+4b_n,\quad b_{n+1}=a_n+b_n$$

で定められている。数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$，$b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

解説

（解答 1）［等比数列を作る方法］

$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ とすると

　　$a_n+4b_n+\alpha(a_n+b_n)=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

よって　　$(1+\alpha)a_n+(4+\alpha)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が等比数列となるための条件は　　$1+\alpha=\beta$，$4+\alpha=\alpha\beta$

$\beta=1+\alpha$ …… ① を $4+\alpha=\alpha\beta$ に代入して整理すると　　$\alpha^2=4$

したがって　　$\alpha=\pm 2$

① から　　$\alpha=2$ のとき　$\beta=3$　　　$\alpha=-2$ のとき　$\beta=-1$

ゆえに　　$a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n)$，　$a_1+2b_1=3$；

　　　　$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$，$a_1-2b_1=-1$

よって，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列；

　　　数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列。

ゆえに　　$a_n+2b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$　　　…… ②，

　　　　$a_n-2b_n=-(-1)^{n-1}=(-1)^n$　…… ③

(②＋③)÷2 から　　$a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$

(②－③)÷4 から　　$b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

（解答 2）［隣接 3 項間の漸化式に帰着する方法］

$a_{n+1}=a_n+4b_n$ …… ①，$b_{n+1}=a_n+b_n$ …… ② とする。

② から　　$a_n=b_{n+1}-b_n$　　…… ③

よって　　$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$　…… ④

③，④ を ① に代入すると　　$b_{n+2}-b_{n+1}=(b_{n+1}-b_n)+4b_n$

ゆえに　　$b_{n+2}-2b_{n+1}-3b_n=0$ …… ⑤

また，② から　　$b_2=a_1+b_1=1+1=2$

⑤ を変形すると　　$b_{n+2}+b_{n+1}=3(b_{n+1}+b_n)$，　$b_2+b_1=3$；

　　　　　　　　$b_{n+2}-3b_{n+1}=-(b_{n+1}-3b_n)$，$b_2-3b_1=-1$

よって，数列 $\{b_{n+1}+b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列；

　　　数列 $\{b_{n+1}-3b_n\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列。

ゆえに　　$b_{n+1}+b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$　　　…… ⑥

　　　　$b_{n+1}-3b_n=-1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n$　…… ⑦

(⑥－⑦)÷4 から　　$b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

よって，③ から　　$a_n=\frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4}-\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

$$=\frac{2\cdot 3^n+2\cdot(-1)^n}{4}=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$$

$\boxed{42}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$

(2)　$a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=2a_n+4b_n$

解答　(1)　$a_n=2\cdot 3^{n-1}+1$，$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

　　　(2)　$a_n=\frac{4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$，$b_n=\frac{8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1}}{3}$

解説

(1)　　$a_{n+1}=2a_n+b_n$　…… ①，

　　　$b_{n+1}=a_n+2b_n$　…… ②　とする。

①＋② から　　$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=4$，公比 3 の等比数列であるから

　　$a_n+b_n=4\cdot 3^{n-1}$　…… ③

①－② から　　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

ゆえに　　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_1-b_1$

$a_1-b_1=2$ であるから　　$a_n-b_n=2$　…… ④

③＋④ から　　$2a_n=4\cdot 3^{n-1}+2$　　　よって　　$a_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

③－④ から　　$2b_n=4\cdot 3^{n-1}-2$　　　よって　　$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

(2)　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ とすると

　　$3a_n+b_n+\alpha(2a_n+4b_n)=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

よって　　$(3+2\alpha)a_n+(1+4\alpha)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が等比数列になるための条件は

$3+2\alpha=\beta$ ……①，$1+4\alpha=\alpha\beta$ ……②

①を②に代入して整理すると　$2\alpha^2-\alpha-1=0$

よって　$(\alpha-1)(2\alpha+1)=0$　ゆえに　$\alpha=1,\ -\frac{1}{2}$

①から　$\alpha=1$ のとき　$\beta=5$，$\alpha=-\frac{1}{2}$ のとき　$\beta=2$

ゆえに　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=4$；

$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$，$a_1-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列；

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$，公比 2 の等比数列。

ゆえに　$a_n+b_n=4\cdot5^{n-1}$ ……③，

$a_n-\frac{1}{2}b_n=-\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}$ ……④

(③+④×2)÷3 から　$a_n=\frac{4\cdot5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$

(③−④)÷$\frac{3}{2}$ から　$b_n=\frac{8\cdot5^{n-1}+2^{n-1}}{3}$

別解　$a_{n+1}=3a_n+b_n$ ……①，$b_{n+1}=2a_n+4b_n$ ……②　とする。

①から　$b_n=a_{n+1}-3a_n$ ……③

よって　$b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$ ……④

③，④を②に代入すると　$a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_n+4(a_{n+1}-3a_n)$

ゆえに　$a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$ ……⑤

また，①から　$a_2=3a_1+b_1=3\cdot1+3=6$

⑤を変形すると

$a_{n+2}-2a_{n+1}=5(a_{n+1}-2a_n)$，$a_2-2a_1=4$；

$a_{n+2}-5a_{n+1}=2(a_{n+1}-5a_n)$，$a_2-5a_1=1$

よって，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列；

数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列。

ゆえに　$a_{n+1}-2a_n=4\cdot5^{n-1}$ ……⑥

$a_{n+1}-5a_n=2^{n-1}$ ……⑦

(⑥−⑦)÷3 から　$a_n=\frac{4\cdot5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$

よって，③から　$b_n=\frac{4\cdot5^n-2^n}{3}-3\cdot\frac{4\cdot5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$

$=\frac{8\cdot5^{n-1}+2^{n-1}}{3}$

43 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=5a_n-4b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$

解答　$a_n=3^{n-1}(2n-1)$，$b_n=3^{n-1}(n-2)$

解説

$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ ……①とすると

$5a_n-4b_n+\alpha(a_n+b_n)=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

よって　$(5+\alpha)a_n+(\alpha-4)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が等比数列となるための条件は　$5+\alpha=\beta$，$\alpha-4=\alpha\beta$

これを解くと　$\alpha=-2$，$\beta=3$

ゆえに，①から　$a_{n+1}-2b_{n+1}=3(a_n-2b_n)$，$a_1-2b_1=3$

よって　$a_n-2b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

すなわち　$a_n=2b_n+3^n$ ……②

これに $a_n=b_{n+1}-b_n$ を代入すると　$b_{n+1}=3b_n+3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{1}{3}$

数列 $\left\{\frac{b_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\frac{b_1}{3^1}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列であるから

$\frac{b_n}{3^n}=-\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n-2}{3}$　よって　$b_n=3^{n-1}(n-2)$

これを②に代入して　$a_n=3^{n-1}(2n-1)$

別解　$a_{n+1}=5a_n-4b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n+b_n$ ……②とする。

②から　$a_n=b_{n+1}-b_n$ ……③

よって　$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$ ……④

③，④を①に代入して整理すると　$b_{n+2}-6b_{n+1}+9b_n=0$

変形すると　$b_{n+2}-3b_{n+1}=3(b_{n+1}-3b_n)$，$b_2-3b_1=(1-1)-3(-1)=3$

ゆえに　$b_{n+1}-3b_n=3\cdot3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{b_n}{3^n}=\frac{1}{3}$，$\frac{b_1}{3}=-\frac{1}{3}$

よって　$\frac{b_n}{3^n}=-\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n-2}{3}$　ゆえに　$b_n=3^{n-1}(n-2)$

③から　$a_n=3^n(n-1)-3^{n-1}(n-2)=3^{n-1}\{3(n-1)-(n-2)\}=3^{n-1}(2n-1)$

44 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=-a_n+b_n$

解答　$a_n=n\cdot2^{n-1}$，$b_n=-(n-2)\cdot2^{n-1}$

解説

$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ ……①とすると

$3a_n+b_n+\alpha(-a_n+b_n)=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

よって　$(3-\alpha)a_n+(1+\alpha)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が等比数列となるための条件は

$3-\alpha=\beta$ ……②，$1+\alpha=\alpha\beta$ ……③

②を③に代入して整理すると　$\alpha^2-2\alpha+1=0$

ゆえに　$(\alpha-1)^2=0$

よって　$\alpha=1$　ゆえに，②から　$\beta=3-1=2$

よって，①から　$a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=1+1=2$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$a_n+b_n=2^n$　すなわち　$a_n=2^n-b_n$ ……④

④を $b_{n+1}=-a_n+b_n$ に代入すると　$b_{n+1}=2b_n-2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると　$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}-\frac{1}{2}$

数列 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\frac{b_1}{2^1}=\frac{1}{2}$，公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$\frac{b_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-n+2}{2}$

よって　$b_n=(-n+2)\cdot2^{n-1}=-(n-2)\cdot2^{n-1}$

これを④に代入して　$a_n=2^n+(n-2)\cdot2^{n-1}=n\cdot2^{n-1}$

45 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，数列 $\{a_n\}$ は

$a_1=1$，$2a_{n+1}=3a_n+2S_n$

を満たす。

(1) a_2 を求めよ。　(2) 一般項 a_n を求めよ。

解答　(1) $a_2=\frac{5}{2}$　(2) $a_n=\frac{2}{5}\left\{2\cdot3^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

解説

(1) $2a_{n+1}=3a_n+2S_n$ ……①とする。

①において $n=1$ とすると　$2a_2=3a_1+2S_1=3a_1+2a_1=5a_1$

したがって　$a_2=\frac{5}{2}$

(2) ①から　$2a_{n+2}=3a_{n+1}+2S_{n+1}$ ……②

②−①から　$2a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n+2(S_{n+1}-S_n)$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$2a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n+2a_{n+1}$

整理すると　$2a_{n+2}-7a_{n+1}+3a_n=0$ ……③

③を変形すると

$a_{n+2}-3a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-3a_n)$，$a_2-3a_1=-\frac{1}{2}$

$a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=3\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)$，$a_2-\frac{1}{2}a_1=2$

よって　$a_{n+1}-3a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=2\cdot3^{n-1}$

辺々引くと　$\frac{5}{2}a_n=2\cdot3^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって　$a_n=\frac{2}{5}\left\{2\cdot3^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

46 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=4n-3a_n$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

解答　$a_n=4-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

解説

$S_n=4n-3a_n$ ……①とする。

①において，$n=1$ とすると　$S_1=4\cdot1-3a_1$

$S_1=a_1$ であるから　$a_1=4-3a_1$　よって　$a_1=1$

また，①から　$S_{n+1}=4(n+1)-3a_{n+1}$ ……②

②−①から　$S_{n+1}-S_n=4-3(a_{n+1}-a_n)$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから　$a_{n+1}=4-3(a_{n+1}-a_n)$

ゆえに　$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1$　変形すると　$a_{n+1}-4=\frac{3}{4}(a_n-4)$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は初項 $a_1-4=1-4=-3$，公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$a_n-4=-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=4-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

47 数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_1=1$，$S_2=-13$，$S_{n+2}=-13S_{n+1}-36S_n$ が成り立つものとする。

(1)　S_3 を求めよ。　　(2)　S_n を n の式で表せ。　　(3)　a_n を n の式で表せ。

解答　(1)　$S_3=133$　　(2)　$S_n=\frac{1}{5}\{(-4)^n-(-9)^n\}$　　(3)　$a_n=-(-4)^{n-1}+2(-9)^{n-1}$

解説

(1)　$S_3=-13S_2-36S_1=-13\cdot(-13)-36\cdot1=133$

(2)　漸化式を変形して

$S_{n+2}+4S_{n+1}=-9(S_{n+1}+4S_n)$，$S_2+4S_1=-9$；

$S_{n+2}+9S_{n+1}=-4(S_{n+1}+9S_n)$，$S_2+9S_1=-4$

よって，数列 $\{S_{n+1}+4S_n\}$ は初項 -9，公比 -9 の等比数列；

数列 $\{S_{n+1}+9S_n\}$ は初項 -4，公比 -4 の等比数列。

ゆえに　$S_{n+1}+4S_n=(-9)^n$　……①

$S_{n+1}+9S_n=(-4)^n$　……②

②－① から　$5S_n=(-4)^n-(-9)^n$

したがって　$S_n=\frac{1}{5}\{(-4)^n-(-9)^n\}$

(3)　$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\frac{1}{5}\{(-4)^n-(-9)^n\}-\frac{1}{5}\{(-4)^{n-1}-(-9)^{n-1}\}$$

$$=\frac{1}{5}[\{(-4)^n-(-4)^{n-1}\}-\{(-9)^n-(-9)^{n-1}\}]$$

$$=-(-4)^{n-1}+2(-9)^{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

また　$a_1=S_1=1$

よって，$n=1$ のときも ③ は成り立つ。

したがって　$a_n=-(-4)^{n-1}+2(-9)^{n-1}$

48 1個のさいころを n 回投げるとき，3以上の目が奇数回出る確率を p_n とする。

(1)　p_1 を求めよ。　　(2)　p_{n+1} を p_n で表せ。　　(3)　p_n を n で表せ。

解答　(1)　$p_1=\frac{2}{3}$　　(2)　$p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}$　　(3)　$p_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

解説

(1)　さいころを1回投げたとき，3以上の目が出る確率が p_1 であるから

$$p_1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(2)　さいころを $(n+1)$ 回投げて，3以上の目が奇数回出るのは

[1]　n 回後に3以上の目が奇数回出ていて，$(n+1)$ 回後に2以下の目が出る

[2]　n 回後に3以上の目が偶数回出ていて，$(n+1)$ 回後に3以上の目が出る

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}+(1-p_n)\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots①$$

(3)　① から　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$　　また　$p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $\frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから　$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　$p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

49 2つの粒子が時刻0において △ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ1秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。n を自然数とし，この2つの粒子が，時刻0の n 秒後に同じ点にいる確率を p_n とするとき

(1)　p_1 を求めよ。　　(2)　p_{n+1} を p_n で表せ。　　(3)　p_n を n で表せ。

解答　(1)　$p_1=\frac{1}{2}$　　(2)　$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}$　　(3)　$p_n=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

解説

(1)　1秒後に2つの粒子がともに B またはともに C に移動する確率が p_1 であるから

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(2)　$(n+1)$ 秒後に2つの粒子が同じ点にいるのは

[1]　n 秒後に2つの粒子が同じ点にいて，次の1秒で同じ点に移動する

[2]　n 秒後に2つの粒子が異なる点にいて，次の1秒で同じ点に移動する

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=p_n\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+(1-p_n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots①$$

(3)　① から　$p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$　　また　$p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　　したがって　$p_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

50 座標平面上で，点 P を次の規則に従って移動させる。

1個のさいころを投げて出た目を a とするとき，$a\leqq2$ のときは x 軸の正の方向へ a だけ移動させ，$a\geqq3$ のときは y 軸の正の方向へ1だけ移動させる。

原点を出発点としてさいころを繰り返し投げ，点 P を順次移動させるとき，自然数 n に対し，点 P が点 $(n,\ 0)$ に至る確率を p_n で表し，$p_0=1$ とする。

(1)　p_{n+1} を p_n，p_{n-1} で表せ。　　(2)　p_n を求めよ。

解答　(1)　$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}p_{n-1}$　　(2)　$p_n=\frac{6}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$

解説

(1)　点 P が点 $(n+1,\ 0)$ に到達するのは

[1]　点 $(n,\ 0)$ にいて1の目が出る

[2]　点 $(n-1,\ 0)$ にいて2の目が出る

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}p_{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　$p_0=1$，$p_1=\frac{1}{6}$ である。

① を変形すると　$p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n=\frac{1}{2}\left(p_n+\frac{1}{3}p_{n-1}\right)$，　$p_1+\frac{1}{3}p_0=\frac{1}{2}$

$p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}p_{n-1}\right)$，$p_1-\frac{1}{2}p_0=-\frac{1}{3}$

よって　$p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　　……②，

$p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$　……③

(②－③)÷$\frac{5}{6}$ から　　$p_n=\frac{6}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$

51 数直線上の原点 O を出発点とし，硬貨を投げるたびに，表が出たら2，裏が出たら1だけ正の方向へ進むものとする。点 n に到達する確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。

(1)　3以上の n について，p_n，p_{n-1}，p_{n-2} の関係式を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

解答　(1)　$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$ $(n\geqq3)$　　(2)　$p_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$

解説

(1)　$n\geqq3$ のとき，点 n に到達するのは

[1]　点 $n-1$ に到達した後，裏が出る

[2]　点 $n-2$ に到達した後，表が出る

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反である。

よって　$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$ $(n\geqq3)$

(2)　点1に到達するには，1回目に裏が出ればよいから　$p_1=\frac{1}{2}$

点2に到達するには，1回目に表が出るか，または1回目，2回目ともに裏が出ればよいから　$p_2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

また，(1) から，$n\geqq1$ のとき　$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$

変形すると

$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$，$p_2+\frac{1}{2}p_1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$　……①

$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$，$p_2-p_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$　……②

① から　$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=1$　……③

② から　$p_{n+1}-p_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　……④

③－④ から　$\frac{3}{2}p_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

よって　$p_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$

52 初めに，A が赤玉を1個，B が白玉を1個，C が青玉を1個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回繰り返した後に A，B，C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ。

解答 (1) $a_1=\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{1}{2}$，$c_1=0$，$a_2=\frac{1}{2}$，$b_2=\frac{1}{4}$，$c_2=\frac{1}{4}$

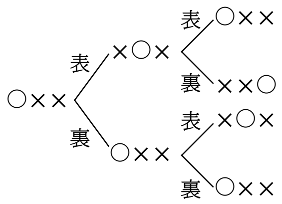
(2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$

(3) $a_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}$，$b_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$，

$c_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}$

解説

(1) 赤玉を持っていることを○，持っていないことを×とし，A，B，C の順に○，×を表すことにする。2 回の操作による A，B，C の玉の移動は，右のようになるから

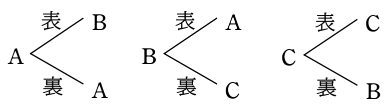


$$a_1=\frac{1}{2},\quad b_1=\frac{1}{2},\quad c_1=0,$$

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ b_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$c_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(2) A，B，C が赤玉を持っているとき，硬貨の表裏の出方によって，赤玉の移動は右のようになる。



ゆえに $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$ ……①，

$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n$ ……②，

$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ ……③

(3) 操作を n 回繰り返した後，A，B，C のいずれかが赤玉を持っているから，$a_n+b_n+c_n=1$ である。

② から $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-b_n)$

よって $b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$，$b_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

ゆえに $b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって $b_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

また $a_n+c_n=1-b_n=1-\left\{\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}$

よって $a_n+c_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$ ……④

①－③ から $a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$，$a_1-c_1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

ゆえに $a_n-c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ……⑤

(④＋⑤)÷2 から $a_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}$

(④－⑤)÷2 から $c_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}$

53 各面に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする。$X(n)$ が 3 で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を 3 で割ったとき 1 余る確率を b_n，$X(n)$ を 3 で割ったとき 2 余る確率を c_n とする。ただし，1 から 8 までの数字の出る確率はどれも同じとする。

(1) a_1，b_1，c_1 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(3) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。 (4) a_n，b_n，c_n を求めよ。

解答 (1) $a_1=\frac{1}{4}$，$b_1=\frac{3}{8}$，$c_1=\frac{3}{8}$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{3}{8}c_n$，$b_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}c_n$，

$c_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{1}{4}c_n$

(3) $a_{n+1}=-\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}$

(4) $a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$，$b_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}$，$c_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}$

解説

(1) 1 から 8 までの数で

3 で割り切れる数は 3，6 の 2 個

3 で割ったとき 1 余る数は 1，4，7 の 3 個

3 で割ったとき 2 余る数は 2，5，8 の 3 個

よって $a_1=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$b_1=\frac{3}{8}$，$c_1=\frac{3}{8}$

(2) $X(n+1)$ が 3 で割り切れるのは，次のような場合である。

[1] $X(n)$ は 3 で割り切れて，$n+1$ 回目は 3 で割り切れる数字が出る。

[2] $X(n)$ を 3 で割ると 1 余り，$n+1$ 回目は 3 で割ると 2 余る数字が出る。

[3] $X(n)$ を 3 で割ると 2 余り，$n+1$ 回目は 3 で割ると 1 余る数字が出る。

よって $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{3}{8}c_n$

次に，$X(n+1)$ を 3 で割ると 1 余るのは，次のような場合である。

[4] $X(n)$ は 3 で割り切れて，$n+1$ 回目は 3 で割ると 1 余る数字が出る。

[5] $X(n)$ を 3 で割ると 1 余り，$n+1$ 回目は 3 で割り切れる数字が出る。

[6] $X(n)$ を 3 で割ると 2 余り，$n+1$ 回目は 3 で割ると 2 余る数字が出る。

よって $b_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}c_n$

更に，$X(n+1)$ を 3 で割ると 2 余るのは，次のような場合である。

[7] $X(n)$ は 3 で割り切れて，$n+1$ 回目は 3 で割ると 2 余る数字が出る。

[8] $X(n)$ を 3 で割ると 1 余り，$n+1$ 回目は 3 で割ると 1 余る数字が出る。

[9] $X(n)$ を 3 で割ると 2 余り，$n+1$ 回目は 3 で割り切れる数字が出る。

よって $c_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{1}{4}c_n$

(3) $a_n+b_n+c_n=1$ であるから $b_n+c_n=1-a_n$

ゆえに，(2) から $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}(b_n+c_n)=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}(1-a_n)=-\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}$

(4) (3) から $a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって $a_n=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

(3) と同様に考えて $b_{n+1}=-\frac{1}{8}b_n+\frac{3}{8}$

ゆえに $b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって $b_n=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}$

ゆえに $c_n=1-(a_n+b_n)=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}$

54 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$ (2) $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$

解答 (1) $a_n=\frac{1}{n}$ (2) $a_n=\frac{1}{3^n-1}$

解説

(1) $a_1>0$ であるから，漸化式により $a_2>0$ 同様にして $a_3>0$

これを繰り返して，すべての自然数 n について $a_n>0$

よって，各項の逆数が存在して，漸化式から $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}$

すなわち $\frac{1}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{a_n}$

ここで，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1}=b_n+1$

また $b_1=\frac{1}{a_1}=1$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列で $b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$

$a_n=\frac{1}{b_n}$ であるから $a_n=\frac{1}{n}$

(2) $a_1>0$ であるから，漸化式により $a_2>0$

同様にして $a_3>0$

これを繰り返して，すべての自然数 n について $a_n>0$

よって，各項の逆数が存在して，漸化式から $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}$

すなわち $\frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{3}{a_n}$

ここで，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1}=3b_n+2$

この式を変形すると $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また $b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列で $b_n+1=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

したがって $b_n=3^n-1$

$a_n=\frac{1}{b_n}$ であるから $a_n=\frac{1}{3^n-1}$

55 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$　　(2) $a_1=3$，$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

解答 (1) $a_n=(2n+3)\cdot 2^n$　(2) $a_n=(2^n-1)\cdot 3^n$

解説

(1) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+2$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 2 の等差数列で　$b_n=5+(n-1)\cdot 2=2n+3$

$a_n=b_n\cdot 2^n$ であるから　$a_n=(2n+3)\cdot 2^n$

(2) $a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$

この式を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　$b_1+1=\dfrac{a_1}{3}+1=2$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列で　$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって　$b_n=2^n-1$

$a_n=b_n\cdot 3^n$ であるから　$a_n=(2^n-1)\cdot 3^n$

56 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3n$

解答 $a_n=7\cdot 2^{n-1}-3n-3$

解説

$a_{n+1}=2a_n+3n$　…… ① とすると　$a_{n+2}=2a_{n+1}+3(n+1)$　…… ②

② − ① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+3$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+3$

この式を変形すると　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$

また，① から　$a_2=2a_1+3\cdot 1=5$

$b_1=a_2-a_1=5-1=4$

よって　$b_1+3=7$

ゆえに，数列 $\{b_n+3\}$ は初項 7，公比 2 の等比数列で　$b_n+3=7\cdot 2^{n-1}$

よって　$b_n=7\cdot 2^{n-1}-3$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(7\cdot 2^{k-1}-3)=1+\dfrac{7(2^{n-1}-1)}{2-1}-3(n-1)$

よって　$a_n=7\cdot 2^{n-1}-3n-3$　…… ③

初項は $a_1=1$ であるから，③ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=7\cdot 2^{n-1}-3n-3$

参考 $b_n=7\cdot 2^{n-1}-3$ を求めた後は，次のようにして a_n を求めてもよい。

$b_n=7\cdot 2^{n-1}-3$ から　$a_{n+1}-a_n=7\cdot 2^{n-1}-3$

これと $a_{n+1}=2a_n+3n$ から a_{n+1} を消去して　$a_n=7\cdot 2^{n-1}-3n-3$

別解 $f(n)=\alpha n+\beta$ とおく。$a_{n+1}=2a_n+3n$ が

$a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$　…… ①

の形に変形できるための条件を求める。

① から　$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$

よって　$a_{n+1}=2a_n-\alpha n+\alpha-\beta$

これと $a_{n+1}=2a_n+3n$ の右辺の係数を比較して　$-\alpha=3$，$\alpha-\beta=0$

ゆえに　$\alpha=-3$，$\beta=-3$

このとき　$a_{n+1}-\{-3(n+1)-3\}=2\{a_n-(-3n-3)\}$

また　$a_1-(-3-3)=7$

よって，数列 $\{a_n-(-3n-3)\}$ は初項 7，公比 2 の等比数列で

$a_n-(-3n-3)=7\cdot 2^{n-1}$

したがって　$a_n=7\cdot 2^{n-1}-3n-3$

57 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=na_n$　　(2) $a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$

解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{n}$　(2) $a_n=n$

解説

(1) $b_n=na_n$ とおくと，漸化式から　$b_{n+1}=b_n$

また　$b_1=1\cdot a_1=1$

よって　$b_n=1$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

ゆえに　$na_n=1$　　したがって　$a_n=\dfrac{1}{n}$

(2) 漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$

よって　$b_n=1$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

ゆえに　$\dfrac{a_n}{n}=1$　　したがって　$a_n=n$

58 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n-n$ であるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=2^n-1$

解説

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ であるから　$a_{n+1}=\{2a_{n+1}-(n+1)\}-(2a_n-n)$

すなわち　$a_{n+1}=2a_n+1$

これを変形して　$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

また，$S_1=2a_1-1$ であるから　$a_1=2a_1-1$

よって　$a_1=1$　　ゆえに　$a_1+1=2$

したがって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列で　$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって　$a_n=2^n-1$

59 平面上に n 個の円があって，それらのどの 2 つも異なる 2 点で交わり，また，どの 3 つも 1 点で交わらないとする。これらの n 個の円が平面を a_n 個の部分に分けるとき，a_n を n の式で表せ。

解答 $a_n=n^2-n+2$

解説

1 個の円は平面を 2 個の部分に分けるから　$a_1=2$

n 個の円が平面を a_n 個の部分に分けているとする。

ここに，新たに $(n+1)$ 個目の円 C_{n+1} をかくと，C_{n+1} は他の n 個の円と $2n$ 個の点で交わる。

これらの交点で C_{n+1} は $2n$ 個の円弧に分かれ，これが新しい境界になるから，分割された部分は $2n$ 個増加する。

ゆえに　$a_{n+1}=a_n+2n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　$2n$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=2+2\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+2$　…… ①

$a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=n^2-n+2$

60 表の出る確率が $\dfrac{1}{3}$ である硬貨を投げて，表が出たら点数を 1 点増やし，裏が出たら点数はそのままとするゲームについて考える。0 点から始めて，硬貨を n 回投げたときの点数が偶数である確率 p_n を求めよ。ただし，0 は偶数と考える。

解答 $p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

解説

1 回投げたとき点数が偶数になる確率は，裏が出る確率と等しいから　$p_1=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$(n+1)$ 回投げたときの点数が偶数になるという事象は，次の 2 つの事象 [1]，[2] の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

[1] n 回投げたときの点数が偶数で，$(n+1)$ 回目に裏が出る

[2] n 回投げたときの点数が奇数で，$(n+1)$ 回目に表が出る

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{2}{3}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{3}$

すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$

これを変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

また　$p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

したがって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{6}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$\boxed{61}$ 条件 $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{4a_n+8}{a_n+6}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n=\frac{a_n-2}{a_n+4}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列である。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

解説

条件から　$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}=\left(\frac{4a_n+8}{a_n+6}-2\right)\div\left(\frac{4a_n+8}{a_n+6}+4\right)$

$$=\frac{2(a_n-2)}{a_n+6}\div\frac{8(a_n+4)}{a_n+6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+4}=\frac{1}{4}b_n$$

また　$b_1=\frac{a_1-2}{a_1+4}=\frac{1}{4}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$b_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって　$\frac{a_n-2}{a_n+4}=\frac{1}{4^n}$

ゆえに，$4^n(a_n-2)=a_n+4$ となるから　$(4^n-1)a_n=2(4^n+2)$

$4^n-1>0$ であるから　$a_n=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

$\boxed{62}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$

(2)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}+5a_{n+1}+6a_n=0$

(3)　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

解答　(1)　$a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$　(2)　$a_n=(-2)^{n-1}-(-3)^{n-1}$　(3)　$a_n=(n+2)\cdot 3^{n-2}$

解説

(1)　$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=-4b_n$，$b_1=a_2-a_1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 -4 の等比数列であるから　$b_n=(-4)^{n-1}$

したがって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-4)^{k-1}=1+\frac{1-(-4)^{n-1}}{1-(-4)}$

ゆえに　$a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$　…… ①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$

別解　$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n)$　…… ②

$a_{n+2}+4a_{n+1}=a_{n+1}+4a_n$　…… ③

③ から　$a_{n+1}+4a_n=a_n+4a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2+4a_1$

$a_2+4a_1=6$ であるから　$a_{n+1}+4a_n=6$　…… ④

② から，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比 -4 の等比数列であるから

$a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$　…… ⑤

④－⑤ から　$5a_n=6-(-4)^{n-1}$

したがって　$a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$

参考　④ から　$a_{n+1}-\frac{6}{5}=-4\left(a_n-\frac{6}{5}\right)$

この漸化式を利用して，a_n を求めてもよい。

(2)　$a_{n+2}+5a_{n+1}+6a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}+2a_{n+1}=-3(a_{n+1}+2a_n)$　…… ①

$a_{n+2}+3a_{n+1}=-2(a_{n+1}+3a_n)$　…… ②

① から，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 $a_2+2a_1=1$，公比 -3 の等比数列で

$a_{n+1}+2a_n=(-3)^{n-1}$　…… ③

② から，数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 $a_2+3a_1=1$，公比 -2 の等比数列で

$a_{n+1}+3a_n=(-2)^{n-1}$　…… ④

④－③ から　$a_n=(-2)^{n-1}-(-3)^{n-1}$

(3)　$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=1$，公比 3 の等比数列で

$a_{n+1}-3a_n=3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{9}$

数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\frac{a_1}{3^1}=\frac{1}{3}$，公差 $\frac{1}{9}$ の等差数列で

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{9}=(n+2)\cdot\frac{1}{9}$$

よって　$a_n=(n+2)\cdot 3^{n-2}$

$\boxed{63}$ 条件 $a_1=2$，$b_1=6$，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=3a_n+4b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{3a_n-b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(3)　(2) の結果を用いて，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答　(1)　$a_2=10$，$b_2=30$，$a_3=50$，$b_3=150$　(2)　$a_n+b_n=8\cdot 5^{n-1}$，$3a_n-b_n=0$

(3)　$a_n=2\cdot 5^{n-1}$，$b_n=6\cdot 5^{n-1}$

解説

(1)　$a_2=2a_1+b_1=10$，　$b_2=3a_1+4b_1=30$，

$a_3=2a_2+b_2=50$，　$b_3=3a_2+4b_2=150$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+b_n$　…… ①

$b_{n+1}=3a_n+4b_n$　…… ②

①＋② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=8$

ゆえに，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 8，公比 5 の等比数列で　$a_n+b_n=8\cdot 5^{n-1}$　…… ③

①×3－② から　$3a_{n+1}-b_{n+1}=3a_n-b_n$

ゆえに　$3a_n-b_n=3a_1-b_1=0$

よって　$3a_n-b_n=0$　…… ④

(3)　③＋④ から　$4a_n=8\cdot 5^{n-1}$

したがって　$a_n=2\cdot 5^{n-1}$

このとき，④ から　$b_n=3a_n=6\cdot 5^{n-1}$

$\boxed{64}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$$

解答　$a_n=\frac{3}{n+2}$

解説

$a_1>0$ であるから，漸化式により　$a_2>0$

同様にして　$a_3>0$

これを繰り返して，すべての自然数 n について　$a_n>0$

よって，各項の逆数が存在して，漸化式から　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{3a_n}$

すなわち　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}$

ここで，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}$，$b_1=\frac{1}{a_1}=1$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列で　$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}$

ゆえに　$b_n=\frac{n+2}{3}$

$a_n=\frac{1}{b_n}$ であるから　$a_n=\frac{3}{n+2}$

$\boxed{65}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=0,\quad a_2=1,\quad a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$$

解答　$a_n=\frac{2^{n-1}-(-3)^{n-1}}{5}$

解説

$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-3(a_{n+1}-2a_n)$　また　$a_2-2a_1=1$

$a_{n+2}+3a_{n+1}=2(a_{n+1}+3a_n)$　また　$a_2+3a_1=1$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 1，公比 -3 の等比数列で　$a_{n+1}-2a_n=(-3)^{n-1}$　…… ①

数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で　$a_{n+1}+3a_n=2^{n-1}$　…… ②

②－① から　$5a_n=2^{n-1}-(-3)^{n-1}$

よって　$a_n=\frac{2^{n-1}-(-3)^{n-1}}{5}$

66 条件 $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答 $a_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

解説

$a_{n+1}=2a_n+b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ ……② とする。

①+② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=4$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列で　$a_n+b_n=4\cdot3^{n-1}$ ……③

①−② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

ゆえに　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_1-b_1$

$a_1-b_1=-2$ であるから　$a_n-b_n=-2$ ……④

③+④ から　$2a_n=4\cdot3^{n-1}-2$　よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$

③−④ から　$2b_n=4\cdot3^{n-1}+2$　よって　$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

別解 $a_{n+1}=2a_n+b_n$ から　$b_n=a_{n+1}-2a_n$ ……①

よって　$b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$ ……②

①，② を $b_{n+1}=a_n+2b_n$ に代入して　$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_n+2(a_{n+1}-2a_n)$

ゆえに　$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

よって　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

また　$a_2-a_1=(2a_1+b_1)-a_1=a_1+b_1=4$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列で　$a_{n+1}-a_n=4\cdot3^{n-1}$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $4\cdot3^{n-1}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot3^{k-1}=1+4\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=2\cdot3^{n-1}-1$$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

また　$b_n=a_{n+1}-2a_n=(2\cdot3^n-1)-2(2\cdot3^{n-1}-1)\quad=2\cdot3^{n-1}+1$

よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

67 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が

$$a_1=\frac{5}{4},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{n}{5}+\frac{1}{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとき，$a_n=\dfrac{\boxed{ア}}{n^2+\boxed{イ}n+\boxed{ウ}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立ち，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{28}a_n=\boxed{エ}$ である。

解答 (ア) 10　(イ) 4　(ウ) 3　(エ) $\dfrac{119}{31}$

解説

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の階差数列の第 n 項は　$\dfrac{n}{5}+\dfrac{1}{2}$

したがって，$n\geqq2$ のとき

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}+\frac{1}{10}(n-1)n+\frac{1}{2}(n-1)$$

よって　$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n^2+4n+3}{10}$ ……①

初項は $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{4}{5}$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$a_n=\dfrac{10}{n^2+4n+3}$

ここで

$$\frac{10}{n^2+4n+3}=\frac{10}{(n+1)(n+3)}=5\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{28}a_n&=5\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)\right\}\\&=5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)\\&=5\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{31}\right)=4-\frac{5}{31}=\frac{119}{31}\end{aligned}$$

よって　(ア) 10　(イ) 4　(ウ) 3　(エ) $\dfrac{119}{31}$

68 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1=2$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n-\dfrac{3}{4}b_n+\dfrac{1}{2}$，

$b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{5}{4}b_n-\dfrac{1}{2}$ によって定義されている。

(1) a_n+b_n を n の式で表せ。　(2) a_n-b_n を n の式で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

解答 (1) $a_n+b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　(2) $a_n-b_n=2^{n+1}-1$　(3) $a_n=2^n+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2}$

解説

$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n-\dfrac{3}{4}b_n+\dfrac{1}{2}$ ……①

$b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{5}{4}b_n-\dfrac{1}{2}$ ……②

(1) ①+② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$

$a_1+b_1=1$ であるから，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$a_n+b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……③

(2) ①−② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)+1$

変形して　$a_{n+1}-b_{n+1}+1=2(a_n-b_n+1)$

$a_1-b_1+1=4$ であるから，数列 $\{a_n-b_n+1\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列で

$a_n-b_n+1=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$

すなわち　$a_n-b_n=2^{n+1}-1$ ……④

(3) ③+④ から　$2a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2^{n+1}-1$

よって　$a_n=2^n+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2}$

69 $a_1=5$，$a_{n+1}=8a_n{}^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=\dfrac{1}{8}\cdot40^{2^{n-1}}$

解説

初項と漸化式から，数列の各項は正である。

漸化式において，両辺の 2 を底とする対数をとると　$\log_2a_{n+1}=\log_28a_n{}^2$

よって　$\log_2a_{n+1}=2\log_2a_n+3$

$b_n=\log_2a_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+3$

この式を変形すると　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$

また　$b_1+3=\log_25+3=\log_240$

ゆえに，数列 $\{b_n+3\}$ は初項 $\log_240$，公比 2 の等比数列であるから

$b_n+3=(\log_240)\cdot2^{n-1}$

よって　$b_n=(\log_240)\cdot2^{n-1}-3$

$b_n=\log_2a_n$ より $a_n=2^{b_n}$ であるから

$$\begin{aligned}a_n&=2^{(\log_240)\cdot2^{n-1}-3}=2^{(\log_240)\cdot2^{n-1}}\cdot2^{-3}\\&=\frac{1}{8}\cdot40^{2^{n-1}}\end{aligned}$$

70 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=4$，$a_{n+1}=4-\dfrac{3}{a_n}$ で定め，$b_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n$，$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおく。

(1) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。　(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 (1) $c_n=3^{n+1}$　(2) $b_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$　(3) $a_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$

解説

(1) $c_n=b_{n+1}-b_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n(a_{n+1}-1)$

$a_{n+1}=4-\dfrac{3}{a_n}$ から　$a_{n+1}-1=3\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n}$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}c_n&=a_1a_2\cdots\cdots a_n\cdot3\cdot\frac{a_n-1}{a_n}=3a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}(a_n-1)\quad\cdots\cdots①\\&=3c_{n-1}\end{aligned}$$

また　$c_1=b_2-b_1=a_1a_2-a_1=a_1(a_2-1)$

$=a_1\left(3-\dfrac{3}{a_1}\right)=3a_1-3=9$

したがって，数列 $\{c_n\}$ は初項 9，公比 3 の等比数列で　$c_n=9\cdot3^{n-1}=3^{n+1}$

別解 ① に同様に代入していくと

$$\begin{aligned}c_n&=3^2a_1a_2\cdots\cdots a_{n-2}(a_{n-1}-1)\\&=3^3a_1a_2\cdots\cdots a_{n-3}(a_{n-2}-1)\\&\cdots\cdots\\&=3^{n-1}a_1(a_2-1)=3^n(a_1-1)=3^{n+1}\end{aligned}$$

よって　$c_n=3^{n+1}$

(2) (1) から　$b_{n+1}-b_n=3^{n+1}$

$b_1=a_1=4$ であるから，$n\geqq2$ のとき　$b_n=4+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k+1}=4+\frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}$

よって　$b_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ ……②

初項は $b_1=4$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$b_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

(3) $n\geqq 2$ のとき　$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}a_n}{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}=a_n$

(2) から　$a_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}\div\dfrac{3^n-1}{2}$

ゆえに　$a_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$　……③

初項は $a_1=4$ であるから，③ は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$

71 数直線上を動く動点が原点を出発点として，1 個のさいころを投げるたびに 2 以下の目が出たら 1，3 以上の目が出たら 2 だけ正の方向へ進むものとする。動点が点 n に到達する確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。

(1) 2 以上の n について，p_{n+1}，p_n，p_{n-1} の関係式を求めよ。

(2) p_n を求めよ。

解答　(1) $p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{3}p_{n-1}$　(2) $p_n=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{15}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

解説

(1) 動点が点 $n+1$ に到達するには，次の 2 つの場合がある。

[1] 点 n において 2 以下の目が出る場合

[2] 点 $n-1$ において 3 以上の目が出る場合

[1]，[2] の事象は互いに排反である。

よって　$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{3}p_{n-1}$　……①

(2) ① を変形すると　$p_{n+1}-p_n=-\dfrac{2}{3}(p_n-p_{n-1})$

$p_1=\dfrac{1}{3}$，$p_2=\dfrac{1}{3}p_1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{9}$ であるから　$p_2-p_1=\dfrac{7}{9}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$

よって，数列 $\{p_{n+1}-p_n\}$ は初項 $p_2-p_1=\dfrac{4}{9}$，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1}-p_n=\frac{4}{9}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$p_n=p_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{9}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}-\frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$p_n=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{15}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

別解　① を変形すると

$$p_{n+1}-p_n=-\frac{2}{3}(p_n-p_{n-1})\quad\cdots\cdots②,$$

$$p_{n+1}+\frac{2}{3}p_n=p_n+\frac{2}{3}p_{n-1}\quad\cdots\cdots③$$

③ から　$p_{n+1}+\dfrac{2}{3}p_n=p_n+\dfrac{2}{3}p_{n-1}=\cdots\cdots=p_2+\dfrac{2}{3}p_1$

$p_2+\dfrac{2}{3}p_1=1$ であるから　$p_{n+1}+\dfrac{2}{3}p_n=1$　……④

② から，数列 $\{p_{n+1}-p_n\}$ は初項 $p_2-p_1=\dfrac{4}{9}$，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1}-p_n=\frac{4}{9}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots⑤$$

④－⑤ から　$\dfrac{5}{3}p_n=1-\dfrac{4}{9}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$p_n=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{15}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

参考　④ から　$p_{n+1}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{2}{3}\left(p_n-\dfrac{3}{5}\right)$

この漸化式を利用して，p_n を求めてもよい。

72 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[　] で示したおき換えを利用することにより求めよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=4n+1$　$\left[b_n=\dfrac{1}{a_n}\right]$

(2) $a_1=6$，$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$　$\left[b_n=\dfrac{a_n}{3^n}\right]$

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+4}$　$\left[b_n=\dfrac{1}{a_n}\right]$

解答　(1) $a_n=\dfrac{1}{2n^2-n+4}$　(2) $a_n=3^n(3\cdot 2^{n-1}-1)$　(3) $a_n=\dfrac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

解説

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=4n+1$

また　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{\frac{1}{5}}=5$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $4n+1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=5+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)$$

よって　$b_n=2n^2-n+4$

初項は $b_1=5$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=2n^2-n+4$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より　$a_n=\dfrac{1}{2n^2-n+4}$

(2) $a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$　……①

また　$b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{6}{3}=2$

① を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=3$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+1=3\cdot 2^{n-1}$$

すなわち　$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=3^nb_n$ より　$a_n=3^n(3\cdot 2^{n-1}-1)$

注意　$a_n=3^{n+1}\left(2^{n-1}-\dfrac{1}{3}\right)$ と答えてもよい。

(3) $a_1=1>0$ であるから　$a_2=\dfrac{a_1}{3a_1+4}>0$

$a_2>0$ であるから　$a_3=\dfrac{a_2}{3a_2+4}>0$

同様に考えると，すべての自然数 n について $a_n>0$ が成り立つ。

よって，$a_n\neq 0$ であるから，漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+4}{a_n}$

すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3+\dfrac{4}{a_n}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=3+4b_n$　……①

また　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$

① を変形すると　$b_{n+1}+1=4(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2$，公比 4 の等比数列であるから

$$b_n+1=2\cdot 4^{n-1}$$

すなわち　$b_n=2\cdot 4^{n-1}-1$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より　$a_n=\dfrac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

注意　$2\cdot 4^{n-1}=2\cdot 2^{2(n-1)}=2^{1+2(n-1)}=2^{2n-1}$ であるから，$a_n=\dfrac{1}{2^{2n-1}-1}$ と答えてもよい。

73 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[　] で示したおき換えを利用することにより求めよ。

(1) $a_1=-1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$　$\left[b_n=\dfrac{a_n}{n}\right]$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$　$[b_n=a_{n+1}-a_n]$

解答　(1) $a_n=-n$　(2) $a_n=2^n-n$

解説

(1) $na_{n+1}=(n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n$

よって　$b_n=b_{n-1}=b_{n-2}=\cdots\cdots=b_2=b_1$

ここで　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=\dfrac{-1}{1}=-1$　ゆえに　$b_n=-1$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=nb_n$ より　$a_n=-n$

(2) 条件から　$a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)-1$

$a_{n+1}=2a_n+n-1$

辺々を引くと　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$　……①

また　$a_2=2a_1+1-1=2a_1=2\cdot 1=2$

したがって　$b_1=a_2-a_1=2-1=1$

① を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}$$

すなわち　$b_n=2^n-1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

すなわち　$a_n=2^n-n$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^n-n$

別解　$b_n=2^n-1$ を求めた後は，次のようにして a_n を求めてもよい。

$b_n=a_{n+1}-a_n$ から　$a_{n+1}-a_n=2^n-1$

これに $a_{n+1}=2a_n+n-1$ を代入して　$(2a_n+n-1)-a_n=2^n-1$

よって　$a_n=2^n-n$

参考　漸化式は $a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$ と変形できる。

よって，数列 $\{a_n+n\}$ は初項 $a_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n+n=2\cdot2^{n-1}$$

すなわち　$a_n=2^n-n$

74 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_2=5$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(2) $a_1=1$，$a_2=6$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

(3) $a_1=0$，$a_2=3$，$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$

解答　(1) $a_n=3^{n-1}+2^{n-1}$　(2) $a_n=n\cdot3^{n-1}$　(3) $a_n=1-(-2)^{n-1}$

解説

(1) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$　……①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$　……②

① より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は

公比 3，初項 $a_2-2a_1=5-2\cdot2=1$

の等比数列であるから　$a_{n+1}-2a_n=3^{n-1}$　……③

② より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は

公比 2，初項 $a_2-3a_1=5-3\cdot2=-1$

の等比数列であるから　$a_{n+1}-3a_n=-2^{n-1}$　……④

③−④ から　$a_n=3^{n-1}+2^{n-1}$

(2) $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は

公比 3，初項 $a_2-3a_1=6-3\cdot1=3$

の等比数列であるから　$a_{n+1}-3a_n=3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列であるから

$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}$　すなわち　$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{n}{3}$

したがって　$a_n=3^n\cdot\dfrac{n}{3}=n\cdot3^{n-1}$

(3) $a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は

公比 −2，初項 $a_2-a_1=3-0=3$

の等比数列であるから　$a_{n+1}-a_n=3(-2)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $3(-2)^{n-1}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3(-2)^{k-1}=0+\frac{3\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$$

すなわち　$a_n=1-(-2)^{n-1}$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=1-(-2)^{n-1}$

別解　$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$　……①

$a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n$　……②

① より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は

公比 −2，初項 $a_2-a_1=3-0=3$

の等比数列であるから

$a_{n+1}-a_n=3(-2)^{n-1}$　……③

② より　$a_{n+1}+2a_n=a_n+2a_{n-1}=\cdots\cdots=a_3+2a_2=a_2+2a_1$

ここで　$a_2+2a_1=3+2\cdot0=3$

ゆえに　$a_{n+1}+2a_n=3$　……④

④−③ から　$3a_n=3-3(-2)^{n-1}$

したがって　$a_n=1-(-2)^{n-1}$

75 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=2$，$a_2=3$，$2a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0$

解答　$a_n=\dfrac{2}{3}\left\{5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^{n-1}\right\}$

解説

$2a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}+a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$　……①

$a_{n+2}-\dfrac{1}{2}a_{n+1}=-\left(a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\right)$　……②

① より，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$，初項 $a_2+a_1=3+2=5$ の等比数列であるから

$a_{n+1}+a_n=5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　……③

② より，数列 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\right\}$ は公比 −1，初項 $a_2-\dfrac{1}{2}a_1=3-\dfrac{1}{2}\cdot2=2$ の等比数列であるから　$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n=2(-1)^{n-1}$　……④

③−④ から　$\dfrac{3}{2}a_n=5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^{n-1}$

したがって　$a_n=\dfrac{2}{3}\left\{5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2(-1)^{n-1}\right\}$

76 1，2，3，4，5，6，7，8 の数字が書かれた 8 枚のカードの中から，無作為に 1 枚取り出してもとに戻すという試行を n 回行う。このとき，数字 8 のカードが奇数回出る確率を p_n とする。

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。　(2) p_n を求めよ。

解答　(1) $p_{n+1}=\dfrac{3}{4}p_n+\dfrac{1}{8}$　(2) $p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}$

解説

(1) $(n+1)$ 回の試行で 8 のカードが奇数回出るのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1] n 回目の試行終了時に，8 のカードが奇数回出ていて，$(n+1)$ 回目の試行で 8 のカードが出ない

[2] n 回目の試行終了時に，8 のカードが偶数回出ていて，$(n+1)$ 回目の試行で 8 のカードが出る

[1] の確率は　$p_n\cdot\dfrac{7}{8}$

[2] の確率は　$(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{8}$

[1]，[2] は互いに排反であるから　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{7}{8}+(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{8}$

すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{3}{4}p_n+\dfrac{1}{8}$

(2) 試行を 1 回行うとき，8 のカードが奇数回出る確率は，その試行で 8 のカードを取り出す確率であるから　$p_1=\dfrac{1}{8}$

$p_{n+1}=\dfrac{3}{4}p_n+\dfrac{1}{8}$ を変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

したがって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 $\dfrac{3}{4}$ の等比数列で，初項は

$$p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$

ゆえに　$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

よって　$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}$

77 数直線上を原点から出発し，次の規則で移動する点 P がある。

1 個のさいころを投げて，出た目が 5 以上の場合は，正の向きに 2 進み，
出た目が 4 以下の場合は，正の向きに 1 進む。

さいころを n 回投げたとき，P の座標が偶数になる確率を a_n とする。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。　(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。

解答　(1) $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2=\dfrac{5}{9}$，$a_3=\dfrac{13}{27}$　(2) $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}a_n$

(3) $a_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

解説

1 個のさいころを投げて，5 以上の目が出ることを A，4 以下の目が出ることを B とする。

A が起こる確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

B が起こる確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(1) さいころを 1 回投げたとき，P の座標が偶数になるのは，A が起こるときであるから　$a_1=\dfrac{1}{3}$

さいころを 2 回投げたとき，P の座標が偶数になるのは，A が 2 回または B が 2 回起こるときであるから　$a_2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

さいころを 3 回投げたとき，P の座標が偶数になるのは，A が 1 回，B が 2 回または

A が 3 回起こるときであるから　　$a_3={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{12}{27}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$

(2)　さいころを $(n+1)$ 回投げたとき，P の座標が偶数になるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　n 回投げたときの P の座標が奇数で，$(n+1)$ 回目に B が起こる

[2]　n 回投げたときの P の座標が偶数で，$(n+1)$ 回目に A が起こる

[1] の確率は　　$(1-a_n)\cdot\frac{2}{3}$

[2] の確率は　　$a_n\cdot\frac{1}{3}$

[1]，[2] は互いに排反であるから　　$a_{n+1}=(1-a_n)\cdot\frac{2}{3}+a_n\cdot\frac{1}{3}$

すなわち　　$a_{n+1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n$

(3)　$a_{n+1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n$ を変形すると　　$a_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

したがって，数列 $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$$a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$$

ゆえに　　$a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　　$a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

78　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$$a_1=1,\ b_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=4a_n+3b_n$$

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{2a_n-b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答　(1)　$a_n+b_n=2\cdot5^{n-1}$，$2a_n-b_n=(-1)^{n-1}$

(2)　$a_n=\frac{1}{3}\{2\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}\}$，$b_n=\frac{1}{3}\{4\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$

解説

(1)　$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=4a_n+3b_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

①+② から　　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

また　　$a_1+b_1=1+1=2$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 2，公比 5 の等比数列であるから

$a_n+b_n=2\cdot5^{n-1}$　……③

①×2−② から　　$2a_{n+1}-b_{n+1}=-(2a_n-b_n)$

また　　$2a_1-b_1=2\cdot1-1=1$

数列 $\{2a_n-b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列であるから

$2a_n-b_n=(-1)^{n-1}$　……④

(2)　③+④ から　　$3a_n=2\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}$

よって　　$a_n=\frac{1}{3}\{2\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}\}$

③×2−④ から　　$3b_n=4\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}$

よって　　$b_n=\frac{1}{3}\{4\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$

79　$a_1=2$，$a_{n+1}=16a_n{}^5$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2^{2\cdot5^{n-1}-1}$

解説

$a_1=2>0$

よって，漸化式からすべての自然数 n について $a_n>0$ であることがわかる。

$a_{n+1}=16a_n{}^5$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2a_{n+1}=\log_2 16a_n{}^5$

ここで　　$\log_2 16a_n{}^5=\log_2(2^4\cdot a_n{}^5)=4+5\log_2a_n$

よって　　$\log_2a_{n+1}=4+5\log_2a_n$

$\log_2a_n=b_n$ とおくと

$b_{n+1}=4+5b_n$　……①

また　　$b_1=\log_2a_1=\log_2 2=1$

① を変形すると　　$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2$，公比 5 の等比数列であるから

$b_n+1=2\cdot5^{n-1}$

よって　　$b_n=2\cdot5^{n-1}-1$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=2^{b_n}$ より　　$a_n=2^{2\cdot5^{n-1}-1}$

80　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$

解答　$a_n=2\cdot4^{n-1}-3^{n-1}$

解説

$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$　……①

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$　……②

① より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 4，初項 $a_2-3a_1=5-3\cdot1=2$ の等比数列であるから

$a_{n+1}-3a_n=2\cdot4^{n-1}$　……③

② より，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は公比 3，初項 $a_2-4a_1=5-4\cdot1=1$ の等比数列であるから

$a_{n+1}-4a_n=3^{n-1}$　……④

③−④ から　　$a_n=2\cdot4^{n-1}-3^{n-1}$

参考　漸化式 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $(p\neq0)$ について，a_n は以下の方法で求められる。

漸化式の a_{n+2}，a_{n+1}，a_n をそれぞれ x^2，x，1 でおき換えた 2 次方程式

$px^2+qx+r=0$ の解を α，β とする。

[1]　$\alpha\neq\beta$ の場合

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ ……　$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ ……　$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は公比 α の等比数列

と変形する。

この問題では，2 次方程式 $x^2-7x+12=0$ の解が $x=3$，4 であるから，①，② のように変形できる。

[2]　$\alpha=\beta$（重解）の場合

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ ……　$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 α の等比数列

と変形する。

これより　　$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$

この両辺を α^{n+1} で割る。

[3]　特に，α，β の一方が 1（このとき，$p+q+r=0$）の場合，階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が等比数列になる。

81　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$$a_1=1,\ b_1=3,\ a_{n+1}=3a_n+2b_n,\ b_{n+1}=2a_n+3b_n$$

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答　(1)　$a_n+b_n=4\cdot5^{n-1}$，$a_n-b_n=-2$

(2)　$a_n=2\cdot5^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot5^{n-1}+1$

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n+2b_n$　……①，　$b_{n+1}=2a_n+3b_n$　……②　とする。

①+② から　　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

また　　$a_1+b_1=1+3=4$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列であるから

$a_n+b_n=4\cdot5^{n-1}$　……③

①−② から　　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

また　　$a_1-b_1=1-3=-2$

よって　　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-b_2=a_1-b_1=-2$

したがって　　$a_n-b_n=-2$　……④

(2)　③+④ から　　$2a_n=4\cdot5^{n-1}-2$　　　よって　　$a_n=2\cdot5^{n-1}-1$

③−④ から　　$2b_n=4\cdot5^{n-1}+2$　　　よって　　$b_n=2\cdot5^{n-1}+1$