和と一般項クイズ

1 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2+4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n+3$

解説

初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2+4\cdot1=5$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$

$=(n^2+4n)-(n^2+2n-3)$

よって　$a_n=2n+3$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=5$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n+3$

2 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=3n^2-2n$　　(2)　$S_n=3^n-1$

解答　(1)　$a_n=6n-5$　(2)　$a_n=2\cdot3^{n-1}$

解説

(1)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=3\cdot1^2-2\cdot1=1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2-2n)-\{3(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=(3n^2-2n)-(3n^2-8n+5)$

よって　$a_n=6n-5$ ……①

① で $n=1$ とすると，$a_1=1$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=6n-5$

(2)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=3^1-1=2$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)$

よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}$ ……①

① で $n=1$ とすると，$a_1=2$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2\cdot3^{n-1}$

3 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n\cdot2^n$　　(2)　$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(3)　$S_n=n^3+2n+6$

解答　(1)　$a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$　(2)　$a_n=n^2+n$

(3)　$a_1=9$，$n\geqq2$ のとき $a_n=3(n^2-n+1)$

解説

(1)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=1\cdot2^1=2$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n\cdot2^n)-\{(n-1)\cdot2^{n-1}\}$

$=\{2n-(n-1)\}\cdot2^{n-1}$

よって　$a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=2$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　$a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$

(2)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3=2$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

$=\frac{1}{3}n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}=\frac{1}{3}n(n+1)\cdot3=n^2+n$

よって　$a_n=n^2+n$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=2$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　$a_n=n^2+n$

(3)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^3+2\cdot1+6=9$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^3+2n+6)-\{(n-1)^3+2(n-1)+6\}$

$=(n^3+2n+6)-(n^3-3n^2+5n+3)$

よって　$a_n=3(n^2-n+1)$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=3$ が得られるから，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって，一般項 a_n は

$a_1=9$，$n\geqq2$ のとき $a_n=3(n^2-n+1)$

4 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n+1$

解説

初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

すなわち　$a_n=2n+1$

① より $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n+1$

5 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n-2$

解説

初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2-1=0$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

すなわち　$a_n=2n-2$

① より $a_1=0$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n-2$

6 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき　$a_n=2n-1$

解説

初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2+1=2$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+1)-\{(n-1)^2+1\}$

すなわち　$a_n=2n-1$

よって，一般項は　$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき　$a_n=2n-1$

7 (1)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が　(ア)　$S_n=4^n-1$

(イ)　$S_n=3n^2+4n+2$　で表されるとき，一般項 a_n をそれぞれ求めよ。

(2)　(1) の (イ) の数列 $\{a_n\}$ について，和 ${a_1}^2+{a_3}^2+{a_5}^2+\cdots\cdots+{a_{2n-1}}^2$ を求めよ。

解答　(1)　(ア)　$a_n=3\cdot4^{n-1}$　(イ)　$a_1=9$，$n\geqq2$ のとき　$a_n=6n+1$

(2)　$48n^3+12n^2-11n+32$

解説

(1)　(ア)　$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(4^n-1)-(4^{n-1}-1)=4^{n-1}(4-1)$

$=3\cdot4^{n-1}$ ……①

また　$a_1=S_1=4^1-1=3$

① において，$n=1$ とすると　$a_1=3\cdot4^{1-1}=3$

よって，$n=1$ のときも ① は成り立つ。

したがって　$a_n=3\cdot4^{n-1}$

(イ)　$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2+4n+2)-\{3(n-1)^2+4(n-1)+2\}$

$=6n+1$ ……①

また　$a_1=S_1=3\cdot1^2+4\cdot1+2=9$

① において，$n=1$ とすると　$6\cdot1+1=7\neq9$

すなわち，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=9$，　$n\geqq2$ のとき　$a_n=6n+1$

(2)　(1) (イ) から　$a_1=9$

$k\geqq2$ のとき　$a_{2k-1}=6(2k-1)+1=12k-5$

したがって，$n\geqq2$ のとき

${a_1}^2+{a_3}^2+{a_5}^2+\cdots\cdots+{a_{2n-1}}^2$

$=\sum_{k=1}^{n}{a_{2k-1}}^2=9^2+\sum_{k=2}^{n}(12k-5)^2=81+\sum_{k=1}^{n}(12k-5)^2-(12\cdot1-5)^2$

$=81+\sum_{k=1}^{n}(144k^2-120k+25)-49$

$=32+144\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-120\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+25n$

$=48n^3+12n^2-11n+32$ ……①

① において，$n=1$ とすると　$48\cdot1^3+12\cdot1^2-11\cdot1+32=81$

よって，$n=1$ のときも ① は成り立つ。

したがって，求める和は　$48n^3+12n^2-11n+32$

8 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=n^2-3n$　(2) $S_n=n^3+2$　(3) $S_n=2^{n+2}-4$

解答 (1) $a_n=2n-4$　(2) $a_1=3$，$n\geqq2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$

(3) $a_n=2^{n+1}$

解説

(1) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=-2$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$

よって　$a_n=2n-4$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=-2$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n-4$

(2) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=3$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}$

よって　$a_n=3n^2-3n+1$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ となり，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって，一般項は　$a_1=3$，$n\geqq2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$

(3) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=4$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-4)-(2^{n+1}-4)$

よって　$a_n=2^{n+1}$ ……①

① で $n=1$ とすると $a_1=4$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2^{n+1}$

9 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=n^2-4n$　(2) $S_n=n^3+1$　(3) $S_n=2^n-1$

解答 (1) $a_n=2n-5$　(2) $a_1=2$，$n\geqq2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$

(3) $a_n=2^{n-1}$

解説

(1) 初項は　$a_1=S_1=1^2-4\cdot1=-3$ ……①

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

すなわち　$a_n=2n-5$

① より $a_1=-3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n-5$

(2) 初項は　$a_1=S_1=1^3+1=2$ ……①

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+1)-\{(n-1)^3+1\}=(n^3+1)-(n^3-3n^2+3n)$

すなわち　$a_n=3n^2-3n+1$

① より $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって，一般項は

$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(3) 初項は　$a_1=S_1=2^1-1=1$ ……①

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)$

すなわち　$a_n=2^{n-1}$

① より $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2^{n-1}$

10 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=4n^2-3n$　(2) $S_n=n^3+2$　(3) $S_n=3^n-1$

解答 (1) $a_n=8n-7$　(2) $a_1=3$，$n\geqq2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(3) $a_n=2\cdot3^{n-1}$

解説

(1) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=4\cdot1^2-3\cdot1=1$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(4n^2-3n)-\{4(n-1)^2-3(n-1)\}$

すなわち　$a_n=8n-7$

① より $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=8n-7$

(2) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^3+2=3$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}$

すなわち　$a_n=3n^2-3n+1$

① より $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ では成り立たない。

したがって，一般項は　$a_1=3$，$n\geqq2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(3) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=3^1-1=2$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)$

すなわち　$a_n=2\cdot3^{n-1}$

① より $a_1=2$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2\cdot3^{n-1}$