漸化式クイズ

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=-2a_n$

解答 (1) $a_n=3n-1$　(2) $a_n=(-2)^{n-1}$

解説

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=3$ であるから，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 3 の等差数列である。

よって，一般項は　$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$

(2) $a_1 \neq 0$ であるから，$a_n \neq 0$ で　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

また，$a_1=1$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 -2 の等比数列である。

よって，一般項は　$a_n=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n-5$　　(2) $a_1=-2,\ a_{n+1}=3a_n$

解答 (1) $a_n=-5n+8$　(2) $a_n=-2\cdot 3^{n-1}$

解説

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=-5$ であるから，数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 -5 の等差数列である。

よって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\cdot(-5)=-5n+8$

(2) $a_1 \neq 0$ であるから，$a_n \neq 0$ で　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3$

また，$a_1=-2$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 -2，公比 3 の等比数列である。

よって，一般項は　$a_n=-2\cdot 3^{n-1}$

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n+2^n$$

解答 $a_n=2^n+1$

解説

条件より　$a_{n+1}-a_n=2^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

よって　$a_n=2^n+1$

初項は $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2^n+1$

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3^n$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n^2+n$

解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{2}(3^n+1)$　(2) $a_n=\dfrac{1}{3}(n^3-n+6)$

解説

(1) 条件より　$a_{n+1}-a_n=3^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 3^n であるから，

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^n+1)$

初項は $a_1=2$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^n+1)$

(2) 条件より　$a_{n+1}-a_n=n^2+n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が n^2+n であるから，

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)=2+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &=2+\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}+\frac{1}{2}(n-1)n \\ &=2+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

よって　$a_n=\dfrac{1}{3}(n^3-n+6)$

初項は $a_1=2$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{1}{3}(n^3-n+6)$

5 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2$$

解答 $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

解説

$a_{n+1}=3a_n+2$ を変形すると　$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

ここで，$b_n=a_n+1$ とおくと

$$b_{n+1}=3b_n,\quad b_1=a_1+1=1+1=2$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列で

$$b_n=2\cdot 3^{n-1}$$

$a_n=b_n-1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$$

6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3$　　(2) $a_1=0,\ a_{n+1}=1-\dfrac{1}{2}a_n$

解答 (1) $a_n=2^{n+1}-3$　(2) $a_n=-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$　$\left(a_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right)$

解説

(1) 漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3$ を変形すると

$$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$$

ここで，$b_n=a_n+3$ とおくと

$$b_{n+1}=2b_n,\quad b_1=a_1+3=1+3=4$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列で

$$b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$

$a_n=b_n-3$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=2^{n+1}-3$$

(2) 漸化式 $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{2}a_n$ を変形すると

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

ここで，$b_n=a_n-\dfrac{2}{3}$ とおくと

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n,\quad b_1=a_1-\frac{2}{3}=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$$b_n=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$a_n=b_n+\dfrac{2}{3}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\quad\left(a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right)$$

別解 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) $a_{n+1}=2a_n+3,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+3$ から　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

すなわち　$b_{n+1}=2b_n$　　また　$b_1=a_2-a_1=5-1=4$

よって，$\{b_n\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列で　$b_n=4\cdot 2^{n-1}$

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot 2^{k-1}=1+4\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$

よって　$a_n=2^{n+1}-3$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^{n+1}-3$

(2) $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{2}a_n,\ a_{n+2}=1-\dfrac{1}{2}a_{n+1}$ から　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

すなわち　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n$　　また　$b_1=a_2-a_1=1-0=1$

よって，$\{b_n\}$ は初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で　$b_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

よって　$a_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

初項は $a_1=0$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=-3,\ a_{n+1}=a_n+4$　　(2) $a_1=4,\ 2a_{n+1}+3a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$

解答　(1)　$a_n=4n-7$　　(2)　$a_n=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$　　(3)　$a_n=\frac{1}{2}(2^{n+1}-3n^2+5n-4)$

解説

(1)　$a_{n+1}-a_n=4$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=-3$，公差 4 の等差数列であるから

$$a_n=-3+(n-1)\cdot 4=4n-7$$

(2)　$a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=4$，公比 $-\frac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(3)　$a_{n+1}-a_n=2^n-3n+1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は 2^n-3n+1 であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3k+1)=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k-3\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1\\&=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\\&=2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2\\&=\frac{1}{2}(2^{n+1}-3n^2+5n-4)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

$n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(2^{1+1}-3\cdot 1^2+5\cdot 1-4)=\frac{1}{2}(4-3+5-4)=1$

$a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(2^{n+1}-3n^2+5n-4)$

8　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n+\frac{1}{2}=0$　　(2)　$a_1=-1$，$a_{n+1}+a_n=0$

(3)　$a_1=3$，$2a_{n+1}-2a_n=4n^2+2n-1$

解答　(1)　$a_n=-\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}$　　(2)　$a_n=(-1)^n$　　(3)　$a_n=\frac{1}{6}(4n^3-3n^2-4n+21)$

解説

(1)　$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=2$，公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$a_n=2+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}$$

(2)　$a_{n+1}=-a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=-1$，公比 -1 の等比数列であるから

$$a_n=-1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n$$

(3)　$2a_{n+1}-2a_n=4n^2+2n-1$ から　$a_{n+1}-a_n=2n^2+n-\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $2n^2+n-\frac{1}{2}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2k^2+k-\frac{1}{2}\right)=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}1\\&=3+2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n-\frac{1}{2}(n-1)\\&=\frac{1}{6}\{18+2n(n-1)(2n-1)+3n(n-1)-3(n-1)\}\\&=\frac{1}{6}(4n^3-3n^2-4n+21)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

$n=1$ のとき　$\frac{1}{6}(4\cdot 1^3-3\cdot 1^2-4\cdot 1+21)=3$

$a_1=3$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(4n^3-3n^2-4n+21)$

9　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-3$

解答　$a_n=5\cdot 4^{n-1}+1$

解説

$a_{n+1}=4a_n-3$ を変形すると　$a_{n+1}-1=4(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$，$b_1=a_1-1=6-1=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 4 の等比数列であるから

$b_n=5\cdot 4^{n-1}$　ゆえに　$a_n=b_n+1=5\cdot 4^{n-1}+1$

別解　$a_{n+1}=4a_n-3$ ……① で n の代わりに $n+1$ とおくと

$a_{n+2}=4a_{n+1}-3$　……②

②−① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_{n+1}=4b_n$，$b_1=a_2-a_1=(4\cdot 6-3)-6=15$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 15，公比 4 の等比数列であるから　$b_n=15\cdot 4^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}15\cdot 4^{k-1}=6+\frac{15(4^{n-1}-1)}{4-1}=5\cdot 4^{n-1}+1\quad\cdots\cdots③$$

$n=1$ のとき　$5\cdot 4^0+1=6$

$a_1=6$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=5\cdot 4^{n-1}+1$

10　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=3$，$2a_{n+1}-a_n+2=0$

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+1$　　(2)　$a_n=5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n-2$ を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

また　$a_1-1=2-1=1$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列であるから　$a_n-1=1\cdot 3^{n-1}$

したがって　$a_n=3^{n-1}+1$

別解　$a_{n+1}=3a_n-2$　……① とする。

① で n の代わりに $n+1$ とおくと　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2$　……②

②−① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=3b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=(3\cdot 2-2)-2=2$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 3^{k-1}=2+2\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=3^{n-1}+1$

初項は $a_1=2$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3^{n-1}+1$

(2)　$2a_{n+1}-a_n+2=0$ を変形すると　$a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$

また　$a_1+2=3+2=5$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は初項 5，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから　$a_n+2=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

11　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=5$　　(2)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-2$

(3)　$a_1=2$，$a_{n+1}=5a_n$　　(4)　$a_1=5$，$a_{n+1}=-3a_n$

解答　(1)　$a_n=5n-4$　　(2)　$a_n=-2n+6$　　(3)　$a_n=2\cdot 5^{n-1}$　　(4)　$a_n=5(-3)^{n-1}$

解説

(1)　条件より，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 5 の等差数列であるから

$$a_n=1+(n-1)\cdot 5=5n-4$$

(2)　条件より，数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公差 -2 の等差数列であるから

$$a_n=4+(n-1)(-2)=-2n+6$$

(3)　条件より，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 5 の等比数列であるから

$$a_n=2\cdot 5^{n-1}$$

(4)　条件より，数列 $\{a_n\}$は初項 5，公比 -3 の等比数列であるから

$$a_n=5(-3)^{n-1}$$

12　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2n$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=3n^2+n$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n^2$　　(4)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

解答　(1)　$a_n=n^2-n+1$　　(2)　$a_n=n^3-n^2+2$

(3)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　$\left(a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\text{ でもよい}\right)$

(4)　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　$2n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

よって　$a_n=n^2-n+1$　……①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=n^2-n+1$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　$3n^2+n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+k)=2+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって　$a_n=n^3-n^2+2$　……①

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=n^3-n^2+2$

(3)　$a_{n+1}-a_n=n^2$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　n^2

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

よって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　……①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　$\left[a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\text{ でもよい}\right]$

(4)　$a_{n+1}-a_n=4^n$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は　4^n

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

よって　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$　……①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

$\boxed{13}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=9-2a_n$　　(4)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+3$

(5)　$a_1=1$，$a_{n+1}=-2a_n+1$　　(6)　$a_1=0$，$2a_{n+1}-3a_n=1$

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+1$　(2)　$a_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$　(3)　$a_n=(-2)^n+3$

(4)　$a_n=2\cdot4^{n-1}-1$　(5)　$a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$　(6)　$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n-2$ を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

ここで，$b_n=a_n-1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=a_1-1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列で　$b_n=3^{n-1}$

$a_n=b_n+1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=3^{n-1}+1$

(2)　$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$ を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

ここで，$b_n=a_n-3$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$，$b_1=a_1-3=-2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で　$b_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n+3$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(3)　$a_{n+1}=9-2a_n$ を変形すると　$a_{n+1}-3=-2(a_n-3)$

ここで，$b_n=a_n-3$ とおくと　$b_{n+1}=-2b_n$，$b_1=a_1-3=-2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 -2 の等比数列で　$b_n=(-2)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$

$a_n=b_n+3$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=(-2)^n+3$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+3$ を変形すると　$a_{n+1}+1=4(a_n+1)$

ここで，$b_n=a_n+1$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$，$b_1=a_1+1=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 4 の等比数列で　$b_n=2\cdot4^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2\cdot4^{n-1}-1$

(5)　$a_{n+1}=-2a_n+1$ を変形すると　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-2\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

ここで，$b_n=a_n-\frac{1}{3}$ とおくと　$b_{n+1}=-2b_n$，$b_1=a_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{2}{3}$，公比 -2 の等比数列で　$b_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}$

$a_n=b_n+\frac{1}{3}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$

(6)　$2a_{n+1}-3a_n=1$ から　$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}$

これを変形すると　$a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$

ここで，$b_n=a_n+1$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n$，$b_1=a_1+1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列で　$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

$\boxed{14}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2$　　(2)　$a_1=5$，$a_{n+1}=-3a_n$

解答　(1)　$a_n=2n+1$　(2)　$a_n=5(-3)^{n-1}$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 2 の等差数列であるから，その一般項は

$a_n=3+(n-1)\cdot2$

すなわち　$a_n=2n+1$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 5，公比 -3 の等比数列であるから，その一般項は

$a_n=5(-3)^{n-1}$

$\boxed{15}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+5^n$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4n+3$

解答　(1)　$a_n=\frac{5^n+3}{4}$　(2)　$a_n=2n^2+n-1$

解説

(1)　条件から　$a_{n+1}-a_n=5^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が 5^n であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=2+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$

よって　$a_n=\frac{5^n+3}{4}$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{5^n+3}{4}$

(2)　条件から　$a_{n+1}-a_n=4n+3$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $4n+3$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=2+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1)$$

よって　$a_n=2n^2+n-1$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2+n-1$

$\boxed{16}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-3$

(3)　$a_1=2$，$a_{n+1}=-2a_n+1$　　(4)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3}-\frac{2}{5}$

解答　(1)　$a_n=3^n+1$　(2)　$a_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-6$　(3)　$a_n=\frac{5}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}$

(4)　$a_n=\frac{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{5}$

解説

(1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$b_n=a_n-1$ とすると　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-1=4-1=3$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+1$ より　$a_n=3^n+1$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}+6=\frac{1}{2}(a_n+6)$

$b_n=a_n+6$ とすると　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で，初項は

$b_1=a_1+6=1+6=7$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-6$ より　$a_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-6$

(3)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-2\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

$b_n=a_n-\frac{1}{3}$ とすると　$b_{n+1}=-2b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 -2 の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-\frac{1}{3}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\frac{5}{3}(-2)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+\frac{1}{3}$ より　$a_n=\frac{5}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}$

注意　$a_n=\frac{1}{3}\{5(-2)^{n-1}+1\}$ と答えてもよい。

(4)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}+\frac{3}{5}=\frac{1}{3}\left(a_n+\frac{3}{5}\right)$

$b_n=a_n+\frac{3}{5}$ とすると　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1+\frac{3}{5}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n=\dfrac{8}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-\dfrac{3}{5}$ より　　$a_n=\dfrac{8}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{5}$

注意　$a_n=\dfrac{1}{5}\left\{8\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}-3\right\}$ と答えてもよい。

$\boxed{17}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=-1,\ 2a_{n+1}+a_n=1$$

解答　$a_n=-\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

解説

$2a_{n+1}+a_n=1$ から　　$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

これを変形すると　　$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$

$b_n=a_n-\dfrac{1}{3}$ とすると　　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-\frac{1}{3}=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n=-\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+\dfrac{1}{3}$ より　　$a_n=-\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

注意　$a_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ または $a_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$ と答えてもよい。