階差数列クイズ

$\boxed{1}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1，4，11，22，37，56，……

解答　$a_n=2n^2-3n+2$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

3，7，11，15，19，……

となり，これは初項 3，公差 4 の等差数列である。

よって　$b_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

すなわち　$a_n=2n^2-3n+2$　……①

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2-3n+2$

$\boxed{2}$ 次の数列の一般項を求めよ。

(1)　2，7，14，23，34，47，……

(2)　1，4，13，40，121，364，……

解答　(1)　n^2+2n-1　　(2)　$\frac{1}{2}(3^n-1)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　階差数列 $\{b_n\}$ は

5，7，9，11，13，……

となり，これは初項 5，公差 2 の等差数列である。

よって　$b_n=2n+3$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}3$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1)$$

すなわち　$a_n=n^2+2n-1$　……①

初項は $a_1=2$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=n^2+2n-1$

(2)　階差数列 $\{b_n\}$ は

3，9，27，81，243，……

となり，これは初項 3，公比 3 の等比数列である。

よって　$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$

すなわち　$a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$　……①

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$

$\boxed{3}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。[18 点]

2，5，11，20，32，47，……

解答　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$ は 3，6，9，12，15，…… であるから　$b_n=3n$

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}3k=2+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

すなわち　$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$　……①

初項は $a_1=2$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2=\frac{1}{2}(3n^2-3n+4)$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$ は 3，6，9，12，15，…… であるから　$b_n=3n$

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}3k=2+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

すなわち　$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$　……①

初項は $a_1=2$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2=\frac{1}{2}(3n^2-3n+4)$

$\boxed{4}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

6，15，28，45，66，……

解答　$a_n=2n^2+3n+1$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：6，15，28，45，66，……

$\{b_n\}$：　9，13，17，21，　……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 9，公差 4 の等差数列であるから

$b_n=9+(n-1)\cdot 4=4n+5$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+5)=6+4\sum_{k=1}^{n-1}k+5\sum_{k=1}^{n-1}1$

$$=6+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+5(n-1)$$

$$=2n^2+3n+1\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=6$

初項は $a_1=6$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=(n+1)(2n+1)$

$\boxed{5}$ 次の数列の一般項を求めよ。

(1)　2，10，24，44，70，102，……　　(2)　3，4，7，16，43，124，……

解答　(1)　$3n^2-n$　　(2)　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　$\{a_n\}$：2，10，24，44，70，102，……

$\{b_n\}$：8，14，20，26，32，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 8，公差 6 の等差数列であるから　$b_n=8+(n-1)\cdot 6=6n+2$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+2)=2+6\sum_{k=1}^{n-1}k+2\sum_{k=1}^{n-1}1$

$$=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=3n^2-n\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$3n^2-n=3\cdot 1^2-1=2$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-n$

(2)　$\{a_n\}$：3，4，7，16，43，124，……

$\{b_n\}$：1，3，9，27，81，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=3^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=3+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$　……①

$n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)=\frac{1}{2}(1+5)=3$

初項は $a_1=3$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$

$\boxed{6}$ 次の数列の一般項を求めよ。

6，24，60，120，210，336，504，……

解答　n^3+3n^2+2n

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：6，24，60，120，210，336，504，……

$\{b_n\}$：18，36，60，90，126，168，……

$\{c_n\}$：　18，24，30，36，42，……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 18，公差 6 の等差数列であるから

$c_n=18+(n-1)\cdot 6=6n+12$

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+12)$

$$=18+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+12(n-1)=3n^2+9n+6$$

初項は $b_1=18$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$b_n=3n^2+9n+6$　$(n\geqq 1)$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+9k+6)$$
$$=6+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$$
$$=\frac{n}{2}\cdot 2(n^2+3n+2)=n^3+3n^2+2n$$

初項は $a_1=6$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=n^3+3n^2+2n$

7 次の数列の一般項を求めよ。

2，10，38，80，130，182，230，……

解答　$-n^3+16n^2-33n+20$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：2，10，38，80，130，182，230，……

$\{b_n\}$：8，28，42，50，52，48，……

$\{c_n\}$：20，14，8，2，-4，……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 20，公差 -6 の等差数列であるから

$$c_n=20+(n-1)\cdot(-6)=-6n+26$$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=8+\sum_{k=1}^{n-1}(-6k+26)=8-6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+26(n-1)$$
$$=-3n^2+29n-18$$

初項は $b_1=8$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$b_n=-3n^2+29n-18$ $(n\geqq 1)$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(-3k^2+29k-18)$$
$$=2-3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+29\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-18(n-1)$$
$$=\frac{1}{2}\{4-n(n-1)(2n-1)+29n(n-1)-36(n-1)\}$$
$$=-n^3+16n^2-33n+20$$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=-n^3+16n^2-33n+20$

8 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2，7，18，35，58，……

解答　$a_n=3n^2-4n+3$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：2，7，18，35，58，……

$\{b_n\}$：5，11，17，23，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 5，公差 6 の等差数列であるから

$$b_n=5+(n-1)\cdot 6=6n-1$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=2+6\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=3n^2-4n+3 \quad \cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$3n^2-4n+3=3\cdot 1^2-4\cdot 1+3=2$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+3$

9 次の数列の階差数列の第 k 項を求めよ。また，もとの数列の第 n 項を求めよ。

(1)　2，3，5，8，12，……　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　5，6，5，2，-3，……　(4)　1，2，5，14，41，……

解答　順に

(1)　k，$\frac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2)　k^2，$\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$ $\left(\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\text{ でもよい}\right)$

(3)　$-2k+3$，$-n^2+4n+2$　(4)　3^{k-1}，$\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

解説

(1)　階差数列は 1，2，3，4，…… となるから，この数列の第 k 項は　k

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=2+\frac{1}{2}(n-1)n$$

すなわち　$a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+4)$　……①

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は　$\frac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2)　階差数列は 1，4，9，16，…… となるから，この数列の第 k 項は　k^2

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

すなわち　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　……①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は

$$\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\quad\left[\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\text{ でもよい}\right]$$

(3)　階差数列は 1，-1，-3，-5，…… となるから，この数列の第 k 項は　$-2k+3$

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k+3)=5-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)$$

すなわち　$a_n=-n^2+4n+2$　……①

初項は $a_1=5$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は　$-n^2+4n+2$

(4)　階差数列は 1，3，9，27，…… となるから，この数列の第 k 項は　3^{k-1}

$n\geqq 2$ のとき，もとの数列の第 n 項 a_n は

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$$

すなわち　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$　……①

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，もとの数列の第 n 項は　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

10 次の数列の一般項を求めよ。

(1)　0，4，18，48，100，180，294，……

(2)　6，24，60，120，210，336，504，……

解答　順に

(1)　n^3-n^2　(2)　$n(n+1)(n+2)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，$\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$\{b_n\}$：4，14，30，52，80，114，……

$\{c_n\}$：10，16，22，28，34，……

よって　$c_n=10+(n-1)\cdot 6=6n+4$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+4)=4+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+4(n-1)$$

すなわち　$b_n=3n^2+n$　……①

初項は $b_1=4$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+k)=0+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$$

すなわち　$a_n=n^3-n^2$　……②

初項は $a_1=0$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$n^2(n-1)$

(2)　$\{b_n\}$：18，36，60，90，126，168，……

$\{c_n\}$：18，24，30，36，42，……

よって　$c_n=18+(n-1)\cdot 6=6n+12$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+12)=18+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+12(n-1)$$

すなわち　$b_n=3n^2+9n+6$　……①

初項は $b_1=18$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+9k+6)$$
$$=6+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n\{(n-1)(2n-1)+9(n-1)+12\}$$
$$=n(n^2+3n+2)$$

すなわち　$a_n=n(n+1)(n+2)$　……②

初項は $a_1=6$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$n(n+1)(n+2)$

11 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，3，5，8，12，……　　(2)　5，7，11，19，35，……

(3)　3，4，8，17，33，……　　(4)　1，6，15，28，45，……

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+4)$　(2)　$a_n=2^n+3$　(3)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+18)$

(4)　$a_n=2n^2-n$

解説

与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　$\{b_n\}$ は 1，2，3，4，…… となり　$b_n=n$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}k=2+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-n+4)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2)　$\{b_n\}$ は 2，4，8，16，…… となり　$b_n=2^n$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=5$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^n+3$

(3)　$\{b_n\}$ は 1，4，9，16，…… となり　$b_n=n^2$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=3+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+18)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=3$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+18)$

(4)　$\{b_n\}$ は 5，9，13，17，…… となり，これは初項 5，公差 4 の等差数列である。

ゆえに　$b_n=5+(n-1)\cdot4=4n+1$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

$$=2n^2-n\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n^2-n$

12 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，2，3，6，12，22，……　　(2)　1，2，4，9，19，36，……

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n+12)$　(2)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-9n^2+19n-6)$

解説

与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とし，$\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。

(1)　$\{b_n\}$：0，1，3，6，10，……

$\{c_n\}$：1，2，3，4，……

よって　$c_n=n$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=0+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$　……①

$b_1=0$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=\frac{1}{2}n(n-1)$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k-1)=2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k)$$

$$=2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n+12)\quad\cdots\cdots②$$

$a_1=2$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n+12)$

(2)　$\{b_n\}$：1，2，5，10，17，……

$\{c_n\}$：1，3，5，7，……

よって　$c_n=2n-1$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$

$=n^2-2n+2$　……①

$b_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=n^2-2n+2$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-2k+2)$$

$$=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3-9n^2+19n-6)\quad\cdots\cdots②$$

$a_1=1$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-9n^2+19n-6)$

13 次の数列 (1) ～ (4) について，それぞれ問い [1]，[2] に答えよ。

[1]　階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[2]　与えられた数列の一般項を求めよ。

(1)　2，3，5，8，12，……　　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　1，0，1，0，1，……　　(4)　1，2，5，14，41，……

解答　(1)　[1]　n　[2]　$\frac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2)　[1]　n^2　[2]　$\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　[1]　$(-1)^n$　[2]　$\frac{1}{2}\{1+(-1)^{n-1}\}$

(4)　[1]　3^{n-1}　[2]　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

解説

(1)　[1]　数列 $\{b_n\}$ は　1，2，3，4，……　ゆえに，$b_n=n$ である。

[2]　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$

一般項を a_n とすると，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=2+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-n+4)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=2$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，一般項は　$\frac{1}{2}(n^2-n+4)$

(2)　[1]　数列 $\{b_n\}$ は　1，4，9，16，……　ゆえに，$b_n=n^2$ である。

[2]　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

一般項を a_n とすると，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，一般項は　$\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　[1]　数列 $\{b_n\}$ は　-1，1，-1，1，……　ゆえに，$b_n=(-1)^n$ である。

[2]　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k=\frac{-\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}=-\frac{1}{2}\{1-(-1)^{n-1}\}$

一般項を a_n とすると，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k=1-\frac{1}{2}\{1-(-1)^{n-1}\}=\frac{1}{2}\{1+(-1)^{n-1}\}\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，一般項は　$\frac{1}{2}\{1+(-1)^{n-1}\}$

(4)　[1]　数列 $\{b_n\}$ は　1，3，9，27，……　ゆえに，$b_n=3^{n-1}$ である。

[2]　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$

一般項を a_n とすると，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，一般項は　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

14 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1，5，13，25，31，……　　(2)　5，7，11，19，35，……

(3)　1，2，6，15，31，……　　(4)　2，9，20，35，54，……

解答　(1)　$a_n=2n^2-2n+1$　(2)　$a_n=2^n+3$　(3)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(4)　$a_n=2n^2+n-1$

$\left((3)\text{ は } a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)，(4)\text{ は } a_n=(n+1)(2n-1)\text{ と答えてもよい}\right)$

解説

(1)　この数列の階差数列は　4，8，12，16，……

その一般項を b_n とすると，$b_n=4n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

すなわち　$a_n=2n^2-2n+1$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，一般項は　$a_n=2n^2-2n+1$

(2)　この数列の階差数列は　2，4，8，16，……

その一般項を b_n とすると，$b_n=2^n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

すなわち　$a_n=2^n+3$

初項は $a_1=5$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，一般項は　$a_n=2^n+3$

(3)　この数列の階差数列は　1，4，9，16，……

その一般項を b_n とすると，$b_n=n^2$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

すなわち　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，一般項は　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

注意　$f(n)=2n^3-3n^2+n+6$ とおくと $f(-1)=0$ であるから，因数定理 (数学Ⅱ) により，$f(n)$ は $n+1$ を因数にもつ。

$a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)$ と表してもよい。

(4)　この数列の階差数列は　7，11，15，19，……

この階差数列は初項 7，公差 4 の等差数列であるから，その一般項を b_n とすると

$$b_n=7+(n-1)\cdot 4$$

すなわち　$b_n=4n+3$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=2+4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}3=2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)$$

すなわち　$a_n=2n^2+n-1$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2+n-1$

注意　$a_n=(n+1)(2n-1)$ と表してもよい。

15　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

0，5，16，33，56，……

解答　$a_n=3n^2-4n+1$

解説

この数列の階差数列は　5，11，17，23，……

この階差数列は初項 5，公差 6 の等差数列であるから，その一般項を b_n とすると

$$b_n=5+(n-1)\cdot 6$$

すなわち　$b_n=6n-1$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=0+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=(n-1)\cdot 3n-(n-1)$$

すなわち　$a_n=3n^2-4n+1$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=3n^2-4n+1$

16　数列 3，4，7，16，35，68，…… を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_n=2n^2-4n+3$　(2)　$a_n=\frac{1}{3}(2n^3-9n^2+16n)$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は　1，3，9，19，33，……

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると，$\{c_n\}$ は　2，6，10，14，……

数列 $\{c_n\}$ は初項 2，公差 4 の等差数列であるから，その一般項は

$$c_n=2+(n-1)\cdot 4$$

すなわち　$c_n=4n-2$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)=1+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-2(n-1)$$

すなわち　$b_n=2n^2-4n+3$

初項は $b_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$b_n=2n^2-4n+3$

(2)　(1) から，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4k+3)\\&=3+2\cdot\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}-4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1)\\&=\frac{1}{3}n(n-1)(2n-1)-2n(n-1)+3n\\&=\frac{1}{3}n\{(n-1)(2n-1)-6(n-1)+9\}\end{aligned}$$

すなわち　$a_n=\frac{1}{3}(2n^3-9n^2+16n)$

初項は $a_1=3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{3}(2n^3-9n^2+16n)$