和の計算クイズ(等比の利用)

1 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。[各 15 点]

(1) $2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7,\ 5\cdot9,\ \cdots\cdots,\ (n+1)(2n+1),\ \cdots\cdots$

(2) $2^2-1,\ 2^3-2,\ 2^4-3,\ 2^5-4,\ \cdots\cdots,\ 2^{n+1}-n,\ \cdots\cdots$

解答　(1)　この数列の第 k 項は，$(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k+1)=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n}{6}\{2(n+1)(2n+1)+9(n+1)+6\}=\frac{n}{6}(4n^2+15n+17)$$

(2)　この数列の第 k 項は，$2^{k+1}-k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-k)=4\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k=4\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=2^{n+2}-\frac{n(n+1)}{2}-4=\frac{2^{n+3}-n^2-n-8}{2}$$

解説

(1)　この数列の第 k 項は，$(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k+1)=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n}{6}\{2(n+1)(2n+1)+9(n+1)+6\}=\frac{n}{6}(4n^2+15n+17)$$

(2)　この数列の第 k 項は，$2^{k+1}-k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-k)=4\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k=4\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=2^{n+2}-\frac{n(n+1)}{2}-4=\frac{2^{n+3}-n^2-n-8}{2}$$

2 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $2\cdot5,\ 3\cdot7,\ 4\cdot9,\ 5\cdot11,\ \cdots\cdots$　　(2) $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$S_n=\dfrac{1}{6}n(4n^2+21n+35)$　　(2)　$S_n=2^{n+1}-n-2$

解説

与えられた数列の第 k 項を a_k とする。

(1)　$a_k=(k+1)(2k+3)$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+5k+3)$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$

$$=\frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+15(n+1)+18\}$$

$$=\frac{1}{6}n(4n^2+21n+35)$$

(2)　$a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\dfrac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

3 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $1\cdot1\cdot3,\ 2\cdot3\cdot5,\ 3\cdot5\cdot7,\ \cdots\cdots$　　(2) $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ \cdots\cdots$

(3) $7,\ 77,\ 777,\ 7777,\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$S_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$　　(2)　$S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3)　$S_n=\dfrac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

解説

(1)　この数列の第 k 項は　$k(2k-1)(2k+1)$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$

$$=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

(2)　この数列の第 k 項は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=\frac{1}{2}k\{2\cdot1+(k-1)\cdot2\}=k^2$$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3)　この数列は　$7,\ 7(1+10),\ 7(1+10+10^2),\ \cdots\cdots$

であるから，第 k 項は

$$7(1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1})=7\cdot\frac{1\cdot(10^k-1)}{10-1}=\frac{7}{9}(10^k-1)$$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{9}(10^k-1)=\frac{7}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$

$$=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

4 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $2,\ 2+4,\ 2+4+6,\ 2+4+6+8,\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ 1+3,\ 1+3+9,\ 1+3+9+27,\ \cdots\cdots$

解答　順に

(1)　$k(k+1)$，$\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　　(2)　$\dfrac{1}{2}(3^k-1)$，$\dfrac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}2i=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)$

$$=k(k+1)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2)　$a_k=1+3+9+\cdots\cdots+3^{k-1}=\dfrac{3^k-1}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^k-1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

5 数列 $3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ 33333,\ \cdots\cdots$ の第 k 項 a_k と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

解答　$a_k=\dfrac{1}{3}(10^k-1)$，$S_n=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$

解説

第 k 項は 3 が k 個並ぶから　$a_k=3+3\cdot10+3\cdot10^2+\cdots\cdots+3\cdot10^{k-1}$

よって，a_k は初項 3，公比 10，項数 k の等比数列の和であるから

$$a_k=\frac{3(10^k-1)}{10-1}=\frac{1}{3}(10^k-1)$$

また　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}(10^k-1)=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$

$$=\frac{10^{n+1}}{27}-\frac{1}{3}n-\frac{10}{27}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$$

別解　(前半)　階差数列 $\{b_k\}$ は　$30,\ 300,\ 3000,\ 30000,\ \cdots\cdots$

よって　$b_k=30\cdot10^{k-1}$

したがって，$k\geqq2$ のとき　$a_k=a_1+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}30\cdot10^{i-1}=3+\frac{30(10^{k-1}-1)}{10-1}$

ゆえに　$a_k=\dfrac{1}{3}(10^k-1)$　……①

初項は $a_1=3$ であるから，① は $k=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_k=\dfrac{1}{3}(10^k-1)$

6 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+6)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9k^2-4k+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}(2l-3)(l^2+5)$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}n(n+13)$　　(2)　$\dfrac{1}{2}n(2n+1)(3n+1)$　　(3)　$\dfrac{1}{2}n(n^3+8n-21)$

(4)　3^n-1

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+6)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}6=\frac{1}{2}n(n+1)+6n=\frac{1}{2}n(n+13)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9k^2-4k+1)=9\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-4(n+1)+2\}$$

$$=\frac{1}{2}n(6n^2+5n+1)=\frac{1}{2}n(2n+1)(3n+1)$$

(3) $\sum_{l=1}^{n}(2l-3)(l^2+5)=\sum_{l=1}^{n}(2l^3-3l^2+10l-15)=2\sum_{l=1}^{n}l^3-3\sum_{l=1}^{n}l^2+10\sum_{l=1}^{n}l-\sum_{l=1}^{n}15$

$$=2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+10\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-15n$$

$$=\frac{1}{2}n\{n(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+10(n+1)-30\}$$

$$=\frac{1}{2}n\{n^3+2n^2+n-(2n^2+3n+1)+10n+10-30\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n^3+8n-21)$$

(4) $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}=2\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}=2\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=3^n-1$

$\boxed{7}$ 数列 1，11，111，1111，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

解答 $a_n=\frac{1}{9}(10^n-1)$，$S_n=\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

解説

この数列は　1，$1+10$，$1+10+10^2$，……

となるから，一般項は　$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\frac{1(10^n-1)}{10-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$

したがって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

$\boxed{8}$ 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}$　　(2) $\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

解答 (1) $\frac{1}{4}(5^n-1)$　(2) $\frac{1}{2}(3^n-3)$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}=\frac{5^n-1}{5-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1}3^k=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-3)$

$\boxed{9}$ (1) $\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1}2^k=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-2$

解説

$\boxed{10}$ 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)$　(3) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot2^{i-1}\right)$

解答 (1) $(n+1)(19n^2+13n-1)$　(2) $n(n+1)$　(3) $3\cdot2^{n+1}-3n-6$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2+5k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^2+3n+1+5n+5-2)=\frac{1}{2}n(2n^2+8n+4)$$

$$=n(n^2+4n+2)$$

よって

$$\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)=\sum_{k=1}^{3n}(3k^2+5k-1)-\sum_{k=1}^{2n-1}(3k^2+5k-1)$$

$$=3n\{(3n)^2+4\cdot3n+2\}-(2n-1)\{(2n-1)^2+4(2n-1)+2\}$$

$$=3n(9n^2+12n+2)-(2n-1)(4n^2+4n-1)$$

$$=19n^3+32n^2+12n-1$$

$$=(n+1)(19n^2+13n-1)$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot2^{i-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(2^k-1)}{2-1}=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot2^k-3)=\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^k-\sum_{k=1}^{n}3$

$$=\sum_{k=1}^{n}6\cdot2^{k-1}-3\sum_{k=1}^{n}1=\frac{6(2^n-1)}{2-1}-3n$$

$$=3\cdot2^{n+1}-3n-6$$

$\boxed{11}$ 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}4^k$　(2) $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$　(3) $\sum_{k=1}^{n-1}6^k$

解答 (1) $\frac{4}{3}(4^n-1)$　(2) 2^n-1　(3) $\frac{6}{5}(6^{n-1}-1)$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}4^k=\frac{4(4^n-1)}{4-1}=\frac{4}{3}(4^n-1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1}6^k=\frac{6(6^{n-1}-1)}{6-1}=\frac{6}{5}(6^{n-1}-1)$