(等差)×(等比)クイズ

1 次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$$

解答 $(n-1)\cdot2^n+1$

解説

$$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$$

この等式の両辺に 2 を掛けると

$$2S=\qquad 1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$$

辺々引くと

$$S-2S=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n$$

よって　$-S=(1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1})-n\cdot2^n$

すなわち　$-S=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n\cdot2^n$

したがって　$S=(n-1)\cdot2^n+1$

2 次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

解答 $(n-1)\cdot3^n+1$

解説

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

$$3S=\qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$

辺々引くと

$$S-3S=1+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n$$

よって　$-2S=1+2\cdot\dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n$

したがって　$S=(n-1)\cdot3^n+1$

3 和 $S=3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n$ を求めよ。

解答 $(2n-1)\cdot2^{n+1}+2$

解説

$$S=3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n$$

この両辺に 2 を掛けると

$$2S=3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^n+(2n+1)\cdot2^{n+1}$$

辺々引くと

$$\begin{aligned}-S&=3\cdot2+2\cdot2^2+2\cdot2^3+\cdots\cdots+2\cdot2^n-(2n+1)\cdot2^{n+1}\\&=6+(2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{n+1})-(2n+1)\cdot2^{n+1}\\&=6+\frac{2^3(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n+1)\cdot2^{n+1}\\&=2^{n+2}-2-(2n+1)\cdot2^{n+1}\\&=-(2n-1)\cdot2^{n+1}-2\end{aligned}$$

ゆえに　$S=(2n-1)\cdot2^{n+1}+2$

4 次の和 S を求めよ。[20 点]

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

解答　$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$

この等式の両辺に 3 を掛けると

$$3S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$$

辺々引くと

$$S-3S=1+3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n$$

よって

$$-2S=(1+3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1})-n\cdot3^n$$

すなわち

$$-2S=\frac{3^n-1}{3-1}-n\cdot3^n$$

したがって　$S=\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

解説

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

この等式の両辺に 3 を掛けると

$$3S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$$

辺々引くと

$$S-3S=1+3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n$$

よって

$$-2S=(1+3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1})-n\cdot3^n$$

すなわち

$$-2S=\frac{3^n-1}{3-1}-n\cdot3^n$$

したがって　$S=\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

5 次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

解答 $(2n-3)\cdot2^n+3$

解説

$$S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

この等式の両辺に 2 を掛けると

$$2S=\qquad 1\cdot2+3\cdot2^2+5\cdot2^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-1}+(2n-1)\cdot2^n$$

辺々引くと

$$-S=1+2(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot2^n$$

よって　$-S=1+2\cdot\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot2^n$

$$=-(2n-3)\cdot2^n-3$$

したがって　$S=(2n-3)\cdot2^n+3$

6 $\{a_n\}$ は初項が 1，公差が 5 である等差数列で，$\{b_n\}$ は初項が $\dfrac{1}{4}$，公比が 4 である等比数列である。数列 $\{c_n\}$ が $c_n=(a_n+4)b_n$ で定められるとき，$\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

解答 $\dfrac{5}{36}\{(3n-1)4^n+1\}$

解説

$a_n=1+(n-1)\cdot5=5n-4,\quad b_n=\dfrac{1}{4}\cdot4^{n-1}=4^{n-2}$

よって　$c_n=(a_n+4)b_n=5n\cdot4^{n-2}$

ゆえに，数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S とすると

$$S=\frac{5}{4}+10+15\cdot4+20\cdot4^2+\cdots\cdots+5n\cdot4^{n-2}$$

$$4S=\qquad 5+10\cdot4+15\cdot4^2+\cdots\cdots+5(n-1)\cdot4^{n-2}+5n\cdot4^{n-1}$$

辺々引くと　$-3S=\dfrac{5}{4}+5+5\cdot4+5\cdot4^2+\cdots\cdots+5\cdot4^{n-2}-5n\cdot4^{n-1}$

よって　$-3S=\dfrac{5}{4}(1+4+4^2+4^3+\cdots\cdots+4^{n-1})-5n\cdot4^{n-1}$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}-5n\cdot4^{n-1}=\frac{5}{12}(4^n-1-3n\cdot4^n)$$

$$=-\frac{5}{12}\{(3n-1)4^n+1\}$$

したがって　$S=\dfrac{5}{36}\{(3n-1)4^n+1\}$

7 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot5^k$ を求めよ。

解答 $\dfrac{(4n-1)5^{n+1}+5}{16}$

解説

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot5^k=S$ とおくと

$$S=1\cdot5+2\cdot5^2+3\cdot5^3+\cdots\cdots+(n-1)5^{n-1}+\qquad n\cdot5^n$$

$$5S=\qquad 1\cdot5^2+2\cdot5^3+\cdots\cdots+(n-2)5^{n-1}+(n-1)5^n+n\cdot5^{n+1}$$

辺々を引くと

$$S-5S=5+5^2+5^3+\cdots\cdots+5^{n-1}+5^n-n\cdot5^{n+1}$$

$$=\frac{5(5^n-1)}{5-1}-n\cdot5^{n+1}=-\frac{(4n-1)5^{n+1}+5}{4}$$

よって　$-4S=-\dfrac{(4n-1)5^{n+1}+5}{4}$

したがって　$S=\dfrac{(4n-1)5^{n+1}+5}{16}$

8 次の和 S を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot5^{k-1}$

(2)　$S=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{3^{n-1}}$

(3)　$S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

解答　(1)　$S=\dfrac{(4n-1)\cdot 5^n+1}{16}$　　(2)　$S=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$

(3)　$x=1$ のとき　$S=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$，

$x\fallingdotseq 1$ のとき　$S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 5^{k-1}=S$ とおくと

$S=1\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 5^2+\cdots\cdots+n\cdot 5^{n-1}$

この両辺に 5 を掛けると

$5S=1\cdot 5+2\cdot 5^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 5^{n-1}+n\cdot 5^n$

辺々引くと　$-4S=1+5+5^2+\cdots\cdots+5^{n-1}-n\cdot 5^n$

よって　$-4S=\dfrac{5^n-1}{5-1}-n\cdot 5^n$　すなわち　$-4S=\dfrac{(1-4n)\cdot 5^n-1}{4}$

したがって　$S=\dfrac{(4n-1)\cdot 5^n+1}{16}$

(2)　$S=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{3^{n-1}}$

この両辺を 3 で割ると

$\dfrac{1}{3}S=\quad\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n}$

辺々引くと　$\dfrac{2}{3}S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}-\dfrac{n}{3^n}$

よって　$\dfrac{2}{3}S=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^n}$

ゆえに　$\dfrac{2}{3}S=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{n}{3^n}$　すなわち　$\dfrac{2}{3}S=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^n}$

$\dfrac{2}{3}S=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3+2n}{2\cdot 3^n}$　したがって　$S=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$

(3)　$x=1$ のとき

$S=1+4+7+10+\cdots\cdots+(3n-2)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$

$=3\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-2n=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

$x\fallingdotseq 1$ のとき

$S=1+4x+7x^2+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

この両辺に x を掛けると

$xS=\quad x+4x^2+\cdots\cdots+(3n-5)x^{n-1}+(3n-2)x^n$

辺々引くと　$(1-x)S=1+3(x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-(3n-2)x^n$

よって　$(1-x)S=1+\dfrac{3x(1-x^{n-1})}{1-x}-(3n-2)x^n$

すなわち　$(1-x)S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{1-x}$

したがって　$S=\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

9　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k-1}$ を求めよ。

解答　$\dfrac{(3n-1)\cdot 4^n+1}{9}$

解説

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 4^{k-1}=S$ とおくと　$S=1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot 4^2+\cdots\cdots+n\cdot 4^{n-1}$

$S=1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot 4^2+\cdots\cdots+n\cdot 4^{n-1}$

$4S=\quad 1\cdot 4+2\cdot 4^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 4^{n-1}+n\cdot 4^n$

辺々を引くと　$S-4S=1+4+4^2+\cdots\cdots+4^{n-1}-n\cdot 4^n$

よって　$-3S=\dfrac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}-n\cdot 4^n=\dfrac{4^n-1}{3}-n\cdot 4^n$

$=\dfrac{4^n-1-3n\cdot 4^n}{3}=\dfrac{(1-3n)\cdot 4^n-1}{3}$

したがって　$S=\dfrac{(3n-1)\cdot 4^n+1}{9}$

10　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4k\cdot 3^{k-1}$ を求めよ。

解答　$S=(2n-1)\cdot 3^n+1$

解説

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4k\cdot 3^{k-1}=S$ とおくと　$S=4\cdot 1+8\cdot 3+12\cdot 3^2+\cdots\cdots+4n\cdot 3^{n-1}$

$S=4\cdot 1+8\cdot 3+12\cdot 3^2+\cdots\cdots+4n\cdot 3^{n-1}$　……① とする。

① の両辺に 3 を掛けると

$3S=\quad 4\cdot 3+8\cdot 3^2+\cdots\cdots+4(n-1)\cdot 3^{n-1}+4n\cdot 3^n$　……②

①－② から　$S-3S=(4+4\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots\cdots+4\cdot 3^{n-1})-4n\cdot 3^n$

$=\dfrac{4(3^n-1)}{3-1}-4n\cdot 3^n=2(3^n-1)-4n\cdot 3^n$

$=-2(2n-1)\cdot 3^n-2$

よって，$-2S=-2(2n-1)\cdot 3^n-2$ であるから　$S=(2n-1)\cdot 3^n+1$

11　次の和を求めよ。

$1\cdot 1+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

解答　$6-(2n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

$S=1\cdot 1+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ とする。

両辺に $\dfrac{1}{2}$ を掛けると

$\dfrac{1}{2}S=\quad 1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって

$S-\dfrac{1}{2}S=1+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=1+2\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=1+2\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=1+2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=3-4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=3-(2n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

ゆえに，$\dfrac{1}{2}S=3-(2n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であるから　$S=6-(2n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

12　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}$ を求めよ。

解答　$2-\dfrac{n+2}{2^n}$

解説

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}$ とすると　$S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}$

両辺に $\dfrac{1}{2}$ を掛けると　$\dfrac{1}{2}S=\quad\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}$

辺々を引くと　$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$

$=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$

よって　$S=2-\dfrac{n+2}{2^n}$