和の計算クイズ(難)

$\boxed{1}$ n が2以上の自然数のとき，1，2，3，……，n の中から異なる2個の自然数を取り出して作った積すべての和 S を求めよ。

解答　$S=\dfrac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

解説

求める和 S について，次の等式が成り立つ。

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+2S$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

$\boxed{2}$ n が2以上の自然数のとき，数列1，3，5，……，$2n-1$ において，異なる2項を取り出して作った積すべての和 S を求めよ。

解答　$S=\dfrac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1)$

解説

求める和 S について，次の等式が成り立つ。

$$\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}^2=1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2+2S$$

よって　$\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+2S$　……①

ここで　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$$

よって，①から　$(n^2)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)+2S$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\left\{n^4-\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)\right\}=\dfrac{1}{6}n(3n^3-4n^2+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1)$$

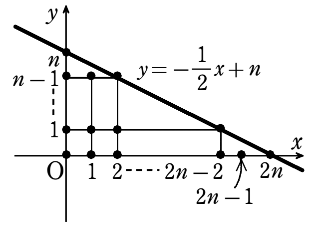
$\boxed{3}$ 次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(1)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y\leqq 2n$　　　(2)　$x\geqq 0$，$y\leqq n^2$，$y\geqq x^2$

解答　(1)　$(n+1)^2$ 個　　(2)　$\dfrac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$ 個

解説

(1)　領域は，右図のように，x 軸，y 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。



直線 $y=k$ ($k=n$，$n-1$，……，0) 上には，$(2n-2k+1)$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=(2n-2\cdot 0+1)+\sum_{k=1}^{n}(-2k+2n+1)$$

$$=2n+1-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(2n+1)n$$

$$=n^2+2n+1=(n+1)^2\ \text{（個）}$$

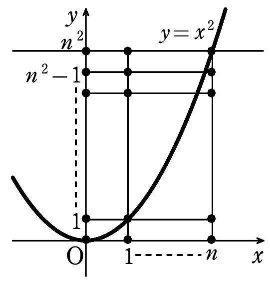
別解　線分 $x+2y=2n$ ($0\leqq y\leqq n$) 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，……，$(2n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は　$(2n+1)(n+1)$

ゆえに，求める格子点の個数を N とすると　$2N-(n+1)=(2n+1)(n+1)$

よって　$N=\dfrac{1}{2}\{(2n+1)(n+1)+(n+1)\}=\dfrac{1}{2}(n+1)(2n+2)=(n+1)^2$ （個）

(2)　領域は，右図のように，y 軸，直線 $y=n^2$，放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分である（境界線を含む）。



直線 $x=k$ ($k=0$，1，2，……，$n-1$，n) 上には，(n^2-k^2+1) 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)=(n^2-0^2+1)+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=(n+1)(n^2+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{6(n^2+1)-n(2n+1)\}=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\ \text{（個）}$$

別解　4点 $(0,\ 0)$，$(n,\ 0)$，$(n,\ n^2)$，$(0,\ n^2)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は　$(n+1)(n^2+1)$

また，直線 $x=k$ ($k=1$，2，……，n) 上の格子点のうち，$0\leqq y<k^2$ を満たすものの個数は　k^2

ゆえに，求める格子点の個数は

$$(n+1)(n^2+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)(n^2+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\ \text{（個）}$$

$\boxed{4}$ 次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(1)　$|x|\leqq n$，$n\leqq |y|\leqq 2n$　　　(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+3y\leqq 3n$

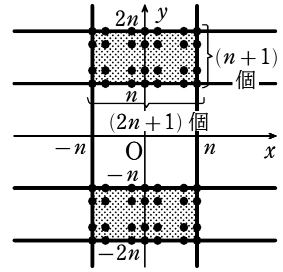
(3)　$0\leqq x\leqq n$，$y\geqq x^2$，$y\leqq 2x^2$　　　(4)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$5x+2y\leqq 100$

解答　(1)　$2(n+1)(2n+1)$ 個　　(2)　$\dfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)$ 個

(3)　$\dfrac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)$ 個　　(4)　541 個

解説

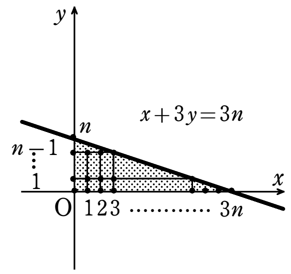
(1)　領域は，右図の黒く塗った2つの部分の周および内部である。



直線 $x=k$ ($k=-n$，$-n+1$，……，$n-1$，n) 上には，$2(2n-n+1)=2(n+1)$ 個の格子点が並んでいるから，格子点の総数は

$$2(n+1)\times\{n-(-n)+1\}=2(n+1)(2n+1)\ \text{（個）}$$

(2)　領域は，右図の黒く塗った部分の周および内部である。



ここで，$x+3y=3n$ とすると　$x=3n-3y$

ゆえに，直線 $y=k$ ($k=0$，1，……，n) 上には，$(3n-3k+1)$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(3n-3k+1)$$

$$=-3\sum_{k=0}^{n}k+(3n+1)\sum_{k=0}^{n}1$$

$$=-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(3n+1)(n+1)$$

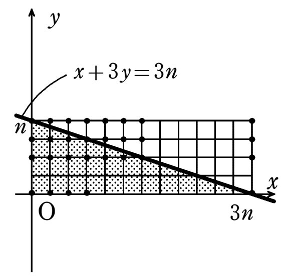
$$=\frac{1}{2}(n+1)\{-3n+2(3n+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)\ \text{（個）}$$

別解　線分 $x+3y=3n$ ($0\leqq y\leqq n$) 上の格子点 $(0,\ n)$，$(3,\ n-1)$，……，$(3n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(3n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は

$(3n+1)(n+1)$

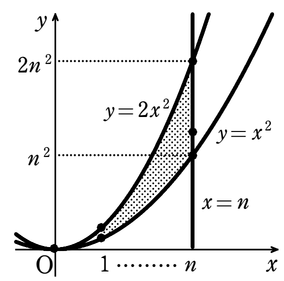


ゆえに，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(3n+1)(n+1)+(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)\ \text{（個）}$$

(3)　領域は，右図の黒く塗った部分の周および内部である。



直線 $x=k$ ($k=0$，1，……，n) 上には，

$2k^2-k^2+1=(k^2+1)$ （個）の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

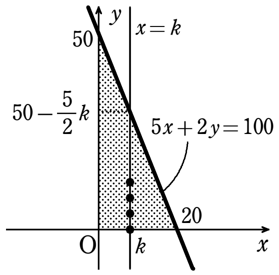
$$\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)=(0^2+1)+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)\ \text{（個）}$$

(4)　領域は，右図の黒く塗った部分の周および内部である。
直線 $x=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 20$）と直線 $5x+2y=100$ ……① の交点の座標は

$$\left(k,\ 50-\frac{5}{2}k\right)$$



よって，領域に含まれる格子点のうち，直線 $x=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 20$）上にあるものの個数を l_k とすると

k が偶数のとき　$l_k=50-\frac{5}{2}k+1=51-\frac{5}{2}k$

k が奇数のとき　$l_k=50-\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}+1=\frac{101}{2}-\frac{5}{2}k$

k が偶数のとき，$k=2m$（$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10$）とおけるから

$$l_{2m}=51-\frac{5}{2}\cdot 2m=51-5m$$

k が奇数のとき，$k=2m-1$（$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10$）とおけるから

$$l_{2m-1}=\frac{101}{2}-\frac{5}{2}(2m-1)=53-5m$$

ゆえに，求める格子点の個数は

$$\sum_{m=0}^{10} l_{2m}+\sum_{m=1}^{10} l_{2m-1}=l_0+\sum_{m=1}^{10} l_{2m}+\sum_{m=1}^{10} l_{2m-1}=l_0+\sum_{m=1}^{10}(l_{2m}+l_{2m-1})$$

$$=51+\sum_{m=1}^{10}\{(51-5m)+(53-5m)\}$$

$$=51+104\sum_{m=1}^{10}1-10\sum_{m=1}^{10}m$$

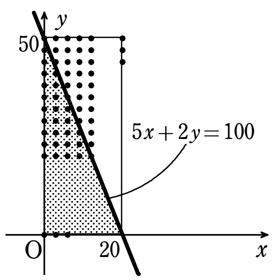
$$=51+104\cdot 10-10\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=541\ (\text{個})$$

別解　線分 $5x+2y=100$（$0\leqq x\leqq 20$）上の格子点 $(0,\ 50)$，$(2,\ 45)$，……，$(20,\ 0)$ の個数は 11 個である。
4 点 $(0,\ 0)$，$(20,\ 0)$，$(20,\ 50)$，$(0,\ 50)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は

$$21\cdot 51=1071$$

よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}(1071+11)=541\ (\text{個})$$



5　数列 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ において，次の積の和を求めよ。
(1)　異なる 2 つの項の積の和（$n\geqq 2$）
(2)　互いに隣り合わない異なる 2 つの項の積の和（$n\geqq 3$）

解答　(1)　$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$　　(2)　$\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n-2)$

解説

(1)　求める和を S とする。

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots\cdots+2\cdot 3+\cdots\cdots)$$

であるから　$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2S$

よって

$$2S=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2)$$

ゆえに，求める和は　$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

(2)　(1) より，求める和は

$$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n\cdot 3(n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n-2)$$

6　$(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(x+n)$ の展開式において，次の係数を求めよ。
(1)　x^{n-1} の係数　　　(2)　x^{n-2} の係数　($n\geqq 2$)

解答　(1)　$\frac{1}{2}n(n+1)$　　(2)　$\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

解説

(1)　x^{n-1} の項は，$(n-1)$ 個の因数の x と残りの因数の定数 k（$=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）の積である。

よって，x^{n-1} の係数は　$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　x^{n-2} の項は，$(n-2)$ 個の因数の x と残り 2 個の因数の定数の積である。
よって，x^{n-2} の係数は $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ の異なる 2 つの数の積の和に一致する。
ゆえに，求める係数は

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

参考　(2) では，問題 224 (1) で使う計算を利用している。

7　n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点の個数を求めよ。

解答　$\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$

解説

2 点 $(3n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を通る直線 ℓ の方程式は　$x+3y=3n$

直線 $y=k$（$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$）と直線 ℓ の交点の座標は $(3n-3k,\ k)$ であるから，条件を満たす格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は $3n-3k+1$ である。

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(3n-3k+1)=\sum_{k=0}^{0}(3n-3k+1)+\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1)$$

$$=(3n+1)+(3n+1)\sum_{k=1}^{n}1-3\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=(3n+1)+(3n+1)n-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

別解　直線 $x+3y=3n$（$0\leqq y\leqq n$）上の格子点 $(0,\ n)$，$(3,\ n-1)$，……，$(3n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(3n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$$(n+1)(3n+1)$$

よって，求める格子点の個数は

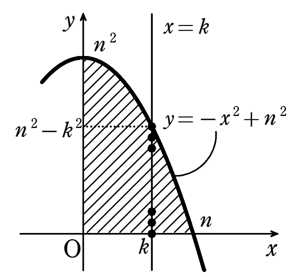
$$\frac{1}{2}\{(n+1)(3n+1)-(n+1)\}+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

8　n は自然数とする。連立不等式 $0\leqq x\leqq n$，$y\geqq 0$，$y\leqq n^2-x^2$ の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。

解答　$\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$

解説

連立不等式の表す領域は，右図のように，x 軸，y 軸，放物線 $y=-x^2+n^2$ で囲まれた部分である。
ただし，境界線を含む。



直線 $x=k$（$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$）と放物線 $y=-x^2+n^2$ の交点の座標は $(k,\ n^2-k^2)$ であるから，条件を満たす格子点のうち，直線 $x=k$　上にある点の個数は n^2-k^2+1 である。
よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)=(n^2+1)+\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{6(n^2+1)-n(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$$

9　n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を求めよ。

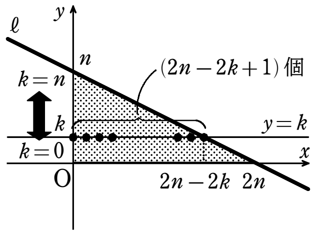
解答　$(n+1)^2$

解説

2 点 $(2n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$x+2y=2n$

直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 ℓ の交点の座標は $(2n-2k,\ k)$ であるから，条件を満たす格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は $2n-2k+1$ である。



よって，求める格子点の個数は

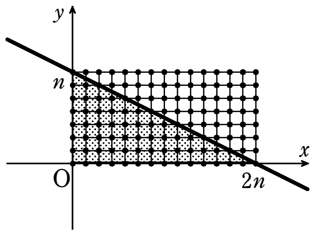
$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=\sum_{k=0}^{0}(2n-2k+1)+\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)$$
$$=(2n+1)+(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1-2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=(2n+1)+(2n+1)n-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=(n+1)^2$$

別解　直線 $x+2y=2n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，$\cdots\cdots$，$(2n,\ 0)$ の個数は

$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(n+1)(2n+1)$



よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(2n+1)-(n+1)\}+(n+1)=(n+1)^2$$

$\boxed{10}$ 座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という。次の連立不等式が表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(1) $\begin{cases} x\geqq 0 \\ y\geqq 0 \\ x+y\leqq n \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y\leqq -x^2+nx \\ y\geqq 0 \end{cases}$

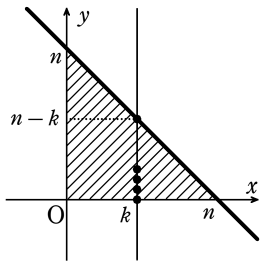
解答　(1)　$\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$　　(2)　$\dfrac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$

解説

(1)　直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 $x+y=n$ の交点の座標は　　$(k,\ n-k)$

よって，領域に含まれる格子点のうち，直線 $x=k$ 上にあるものの個数は　　$n-k+1$

したがって，求める格子点の個数は

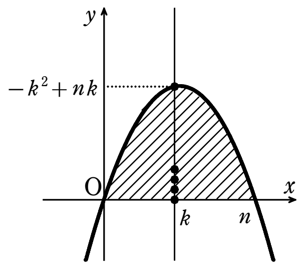


$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)=n+1+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$
$$=n+1-\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=n+1-\frac{1}{2}n(n+1)+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(2)　直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ と放物線 $y=-x^2+nx$ の交点の座標は　　$(k,\ -k^2+nk)$

よって，領域に含まれる格子点のうち，直線 $x=k$ 上にあるものの個数は　　$-k^2+nk+1$

したがって，求める格子点の個数は



$$\sum_{k=0}^{n}(-k^2+nk+1)=1+\sum_{k=1}^{n}(-k^2+nk+1)$$
$$=1-\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=1-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$