真偽クイズ

$\boxed{1}$ 次の命題の真偽を述べよ。

(1) x を実数とするとき，$x^2=4$ ならば $x=2$ である。

(2) x，y を実数とするとき，$x=y$ ならば $x^2=y^2$ である。

(3) 長方形は平行四辺形である。

解答 (1) 偽　(2) 真　(3) 真

解説

(1) 偽 （$x=-2$ のときも $x^2=4$ が成り立つ）

(2) 真 （$x-y=0$ から $(x+y)(x-y)=0$）

(3) 真 （長方形は 4 つの内角がすべて直角であるから，向かい合う 2 組の辺はそれぞれ平行）

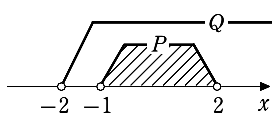
$\boxed{2}$ x は実数とする。集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。

(1) $-1<x<2 \Longrightarrow x>-2$　　(2) $x<2 \Longrightarrow -1<x<2$

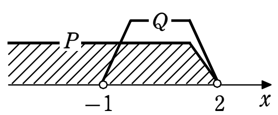
解答 (1) 真　(2) 偽

解説

(1) $P=\{x \mid -1<x<2,\ x$ は実数$\}$，
　$Q=\{x \mid x>-2,\ x$ は実数$\}$
とすると，$P\subset Q$ が成り立つ。
よって，命題は真である。

(1)


(2) $P=\{x \mid x<2,\ x$ は実数$\}$，
　$Q=\{x \mid -1<x<2,\ x$ は実数$\}$
とすると，$P\subset Q$ は成り立たない。
よって，命題は偽である。

(2)


$\boxed{3}$ n は自然数とする。次の命題

n は 3 の倍数である $\Longrightarrow$ n は 6 の倍数である

において，$n=9$ は反例であるから，この命題は偽である。

解説

$\boxed{4}$ n は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

n は素数である $\Longrightarrow$ n は奇数である

解答 略

解説

2 は素数であるが，奇数ではない。
よって，命題は偽である。

$\boxed{5}$ x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1) $x=0 \Longrightarrow xy=0$　　(2) $xy>0 \Longrightarrow$「$x>0$ かつ $y>0$」

解答 (1) 命題：真
　逆　：$xy=0 \Longrightarrow x=0$　偽
　対偶：$xy\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$　真
　裏　：$x\neq 0 \Longrightarrow xy\neq 0$　偽

(2) 命題：偽
　逆　：「$x>0$ かつ $y>0$」$\Longrightarrow xy>0$　真
　対偶：「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」$\Longrightarrow xy\leqq 0$　偽
　裏　：$xy\leqq 0 \Longrightarrow$「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」　真

解説

(1) 命題：真
　逆　：$xy=0 \Longrightarrow x=0$　偽 （反例：$x=1$，$y=0$）
　対偶：$xy\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$　真
　裏　：$x\neq 0 \Longrightarrow xy\neq 0$　偽 （反例：$x=1$，$y=0$）

(2) 命題：偽 （反例：$x=-1$，$y=-1$）
　逆　：「$x>0$ かつ $y>0$」$\Longrightarrow xy>0$　真
　対偶：「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」$\Longrightarrow xy\leqq 0$　偽 （反例：$x=-1$，$y=-1$）
　裏　：$xy\leqq 0 \Longrightarrow$「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」　真

$\boxed{6}$ 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての実数 x について $x+1>0$

(2) ある素数 n について $n+2$ は素数である。

解答 (1) ある実数 x について $x+1\leqq 0$，もとの命題は偽，その否定は真

(2) すべての素数 n について $n+2$ は素数でない，もとの命題は真，その否定は偽

解説

(1) 与えられた命題の否定は

ある実数 x について $x+1\leqq 0$

$x=-2$ のとき，$x+1\leqq 0$ である。
したがって，もとの命題は偽であり，その否定は真である。

(2) 与えられた命題の否定は

すべての素数 n について $n+2$ は素数でない。

$n=3$ のとき，$n+2$ は素数である。
したがって，もとの命題は真であり，その否定は偽である。

$\boxed{7}$ x は実数，m，n は自然数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $x^2-x-6=0 \Longrightarrow x=-2$

(2) n は 12 の正の約数 $\Longrightarrow$ n は 24 の正の約数

(3) mn は 3 の倍数 $\Longrightarrow$ m，n はともに 3 の倍数

解答 (1) 偽　(2) 真　(3) 偽

解説

(1) $x^2-x-6=0$ から $(x+2)(x-3)=0$
ゆえに，$x=3$ は $x^2-x-6=0$ を満たす。
よって，命題は偽である。 （反例：$x=3$）

(2) 12 の正の約数，24 の正の約数全体の集合を，それぞれ P，Q とすると

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

であるから，$P\subset Q$ が成り立つ。
よって，命題は真である。

(3) 偽 （反例：$m=3$，$n=2$）

$\boxed{8}$ a，b は実数とする。次の命題の真偽を調べ，真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ。

(1) a，b がともに無理数ならば，$a+b$ は無理数である。

(2) a，b がともに無理数ならば，$a+b$，$a-b$ の少なくとも一方は無理数である。

(3) a，b がともに無理数ならば，$a+b$，ab の少なくとも一方は無理数である。

(4) a が有理数かつ b が無理数ならば，ab は無理数である。

解答 (1) 偽，反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$　(2) 真，証明略
(3) 偽，反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$　(4) 偽，反例：$a=0$，$b=\sqrt{2}$

解説

(1) 偽，反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ のとき　$a+b=0$

(2) 真

証明 対偶「$a+b$，$a-b$ がともに有理数ならば，a，b の少なくとも一方は有理数である」 ……(A)

を証明する。
$a+b$，$a-b$ は有理数であるから，p，q を有理数として

$p=a+b$，$q=a-b$

とおくことができる。これを a，b について解くと

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{p-q}{2}$$

p，q はともに有理数であるから，a，b もともに有理数である。
「a，b がともに有理数ならば，a，b の少なくとも一方は有理数である」は真であるから，命題 (A) は真である。
したがって，与えられた命題は真である。

(3) 偽，反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ のとき　$a+b=0$，$ab=-2$

(4) 偽，反例：$a=0$，$b=\sqrt{2}$ のとき　$ab=0$

$\boxed{9}$ x は実数とする。集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。[各 8 点]

(1) $|x|<2$ ならば $-3<x<3$

(2) $x>-1$ ならば $|x|>1$

解答 (1) $|x|<2 \Longleftrightarrow -2<x<2$ であるから，$\{x \mid |x|<2\}\subset\{x \mid -3<x<3\}$ が成り立つ。よって　真

(2) $|x|>1 \Longleftrightarrow x<-1,\ 1<x$ であるから，$\{x \mid x>-1\}\subset\{x \mid |x|>1\}$ は成り立たない。よって　偽

解説

(1) $|x|<2 \Longleftrightarrow -2<x<2$ であるから，$\{x \mid |x|<2\}\subset\{x \mid -3<x<3\}$ が成り立つ。
よって　真

(2) $|x|>1 \Longleftrightarrow x<-1,\ 1<x$ であるから，$\{x \mid x>-1\}\subset\{x \mid |x|>1\}$ は成り立たない。
よって　偽

$\boxed{10}$ 2つの整数 a，b に関する次の命題は正しいかどうか判定し，それが正しいときは証明し，正しくないときは反例を1つあげよ。[各20点]

(1) a^2+b^2 が3の倍数ならば，a，b はともに3の倍数である。

(2) a^2+b^2 が5の倍数ならば，a，b はともに5の倍数である。

解答 (1) 真。対偶を証明する。

a，b の少なくとも一方は3の倍数でないとする。

一般に，整数 a の2乗 a^2 は，3で割ると余りが0か1である。

なぜならば，m を整数として

$a=3m$ ならば　$a^2=(3m)^2=3(3m^2)$

$a=3m+1$ ならば　$a^2=(3m+1)^2=3(3m^2+2m)+1$

$a=3m+2$ ならば　$a^2=(3m+2)^2=3(3m^2+4m+1)+1$

整数 b についても同様である。

よって，a，b の少なくとも一方が3の倍数でないとき，a^2+b^2 を3で割った余りは1か2で，0にならない。

(2) 偽。反例：$a=1$，$b=3$

このとき，$a^2+b^2=1+9=10$ は5の倍数であるが，a，b はともに5の倍数であるとはいえない。

解説

(1) 真。対偶を証明する。

a，b の少なくとも一方は3の倍数でないとする。

一般に，整数 a の2乗 a^2 は，3で割ると余りが0か1である。

なぜならば，m を整数として

$a=3m$ ならば　$a^2=(3m)^2=3(3m^2)$

$a=3m+1$ ならば　$a^2=(3m+1)^2=3(3m^2+2m)+1$

$a=3m+2$ ならば　$a^2=(3m+2)^2=3(3m^2+4m+1)+1$

整数 b についても同様である。

よって，a，b の少なくとも一方が3の倍数でないとき，a^2+b^2 を3で割った余りは1か2で，0にならない。

(2) 偽。反例：$a=1$，$b=3$

このとき，$a^2+b^2=1+9=10$ は5の倍数であるが，a，b はともに5の倍数であるとはいえない。

$\boxed{11}$ a，b，x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $x=0$ ならば $xy=0$　　　(2) $x^2=4$ ならば $x=2$

(3) $a+b$ と ab が整数ならば，a も b も整数である。

(4) 「$x+y>0$ かつ $xy>0$」ならば「$x>0$ かつ $y>0$」

解答 (1) 真　(2) 偽　(3) 偽　(4) 真

解説

(1) $x=0$ ならば　$xy=0\cdot y=0$　　　よって　真

(2) $x=-2$ は $x^2=4$ を満たすが，$x=2$ ではない。

よって　偽

(3) $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ のとき

$a+b=0$，　$ab=-2$　(ともに整数)

であるが，a，b は整数でない。

よって　偽

(4) $xy>0$ のとき「($x>0$ かつ $y>0$) または ($x<0$ かつ $y<0$)」

$x+y>0$ であるから，「$x<0$ かつ $y<0$」ではない。

ゆえに　$x>0$ かつ $y>0$　　　よって　真

$\boxed{12}$ 次の命題の真偽を調べよ。ただし，n は自然数，a，b，x，y は実数とする。

(1) n が8の倍数ならば，n は4の倍数である。

(2) 「$x>1$ かつ $y>1$」ならば「$xy+x>2$ かつ $xy+y>2$」

(3) $|a+b|=|a|+|b|$ ならば，$a\geqq 0$ かつ $b\geqq 0$ である。

(4) x，y がともに無理数ならば，$x+y$ は無理数である。

解答 (1) 真　(2) 真　(3) 偽　(4) 偽

解説

(1) n が8の倍数のとき，$n=8k$ (k は自然数) と表される。

このとき，$n=4\cdot 2k$ で，$2k$ は自然数であるから，n は4の倍数である。

したがって　真

(2) $x>1$ かつ $y>1$ ……① とする。

① ならば　$x>1$ かつ $y+1>2$

よって　$x(y+1)>1\cdot 2=2$

① ならば　$x+1>2$ かつ $y>1$

よって　$(x+1)y>2\cdot 1=2$

ゆえに，① ならば　$x(y+1)>2$ かつ $(x+1)y>2$

すなわち，$xy+x>2$ かつ $xy+y>2$ が成り立つ。

したがって　真

(3) $a=-1$，$b=-1$ のとき

$|a+b|=|-1-1|=2$，　$|a|+|b|=|-1|+|-1|=2$

で $|a+b|=|a|+|b|$ は成り立つが，「$a\geqq 0$ かつ $b\geqq 0$」ではない。

したがって　偽

(4) $x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき，x，y はともに無理数であるが，$x+y=0$ となり $x+y$ は無理数ではない。

したがって　偽

$\boxed{13}$ x は実数とする。集合を利用して，次の命題の真偽を調べよ。

(1) $|x|\leqq 1$ ならば $x^2<1$　　　(2) $|x-1|<2$ ならば $|x|<3$

解答 (1) 偽　(2) 真

解説

与えられた命題を $p \Longrightarrow q$ の形で表し，条件 p，q を満たす x 全体の集合をそれぞれ P，Q とする。

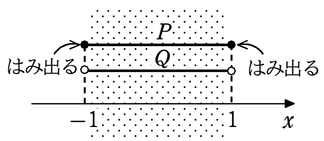
(1) $p:|x|\leqq 1$ から　$P=\{x\mid -1\leqq x\leqq 1\}$

次に，$q:x^2<1$ から　$x^2-1<0$

左辺を因数分解して　$(x+1)(x-1)<0$

ゆえに　$-1<x<1$

よって　$Q=\{x\mid -1<x<1\}$



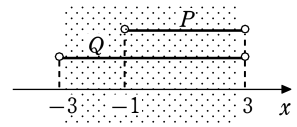
$x=\pm 1$ は P に属するが Q には属さない。

すなわち，$x=\pm 1$ は p を満たすが q を満たしていない。

したがって，$p \Longrightarrow q$ は　偽

(2) $p:|x-1|<2$ から　$P=\{x\mid -1<x<3\}$

$q:|x|<3$ から　$Q=\{x\mid -3<x<3\}$



右の図から　$P\subset Q$

すなわち，$x\in P$ ならば $x\in Q$ となり，p を満たす x は q も満たす。

したがって，$p \Longrightarrow q$ は　真

$\boxed{14}$ x は実数とする。集合を利用して，次の命題の真偽を調べよ。

(1) $-2<x<2$ ならば $-3<x<3$　　　(2) $x>-1$ ならば $x^2>(-1)^2$

(3) $|x-1|>1$ ならば $2|x-2|\geqq 1$

解答 (1) 真　(2) 偽　(3) 偽

解説

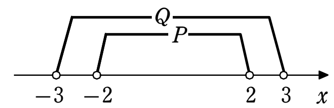
与えられた命題を $p \Longrightarrow q$ の形で表し，条件 p，q を満たす x 全体の集合をそれぞれ P，Q とする。

(1) $P=\{x\mid -2<x<2\}$

$Q=\{x\mid -3<x<3\}$

右の図から　$P\subset Q$

よって，$p \Longrightarrow q$ は　真

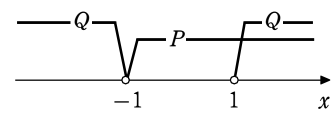


(2) $P=\{x\mid x>-1\}$

$Q=\{x\mid x<-1$ または $1<x\}$

右の図から　$P\not\subset Q$

よって，$p \Longrightarrow q$ は　偽



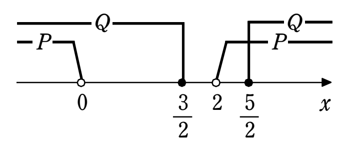
(3) $|x-1|>1$ から　$x-1<-1$，$1<x-1$

したがって　$x<0$，$2<x$

また，$2|x-2|\geqq 1$ から　$|x-2|\geqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$x-2\leqq -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq x-2$

よって　$x\leqq \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}\leqq x$



$P=\{x\mid x<0,\ 2<x\}$，$Q=\left\{x \,\middle|\, x\leqq \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\leqq x\right\}$ とすると，図から　$P\not\subset Q$

よって，$p \Longrightarrow q$ は　偽

$\boxed{15}$ 次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1) すべての実数 x について　$x^2>0$

(2) ある実数 x，y に対して　$x+y=3$ かつ $x-2y=6$

(3) ある素数 x について，x は偶数である。

解答 (1) 命題は偽，否定は真　(2) 命題は真，否定は偽

(3) 命題は真，否定は偽

解説

(1) $x=0$ のとき $x^2=0$ であり，$x^2>0$ は成り立たない。

よって，与えられた命題は　偽

否定は　「ある実数 x について　$x^2\leqq 0$」

$x=0$ で成り立つから　真

(2) $x+y=3$，$x-2y=6$ を連立して解くと　$x=4$，$y=-1$

よって，与えられた命題は　真

否定は　「すべての実数 x，y に対して　$x+y\neq 3$ または $x-2y\neq 6$」

$x=4$，$y=-1$ のとき，「$x+y \neq 3$ または $x-2y \neq 6$」は成り立たないから　偽

(3)　素数 2 は偶数であるから，与えられた命題は　真

否定は　「すべての素数 x について，x は奇数である。」

素数 2 は奇数でないから　偽

16 次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1)　すべての実数 x について　$x^2-6x+10>0$

(2)　任意の実数 x，y に対して　$x^2-4xy+4y^2>0$

(3)　$x^2-3x-10=0$ である自然数 x が存在する。

解答　(1)　命題は 真，否定は 偽　　(2)　命題は 偽，否定は 真

(3)　命題は 真，否定は 偽

解説

(1)　$x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0$　……①

よって，与えられた命題は　真

否定は　「ある実数 x について　$x^2-6x+10 \leqq 0$」

① から，否定は　偽

(2)　$x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$ となるから，$x=2$，$y=1$ のとき

$x^2-4xy+4y^2=(2-2\cdot 1)^2=0$

よって，与えられた命題は　偽

否定は　「ある実数 x，y に対して　$x^2-4xy+4y^2 \leqq 0$」

$x=2$，$y=1$ のとき $x^2-4xy+4y^2=0$ となるから，否定は　真

(3)　$x^2-3x-10=0$ から　　$(x+2)(x-5)=0$

よって，$x=5$ (自然数) のとき，$x^2-3x-10=0$ となるから，与えられた命題は　真

否定は　「すべての自然数 x に対して　$x^2-3x-10 \neq 0$」

これは偽である。(反例：$x=5$)

17 a，b，x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

(1)　4 の倍数は 2 の倍数である。

(2)　$ab=0$　ならば　$a=0$　かつ　$b=0$

(3)　$x^2>9$　ならば　$x \neq 3$

(4)　$x+y \leqq 4$　ならば　$x \leqq 2$　または　$y \leqq 2$

解答　(1)　逆：2 の倍数は 4 の倍数である　偽

裏：4 の倍数でないならば 2 の倍数でない　偽

対偶：2 の倍数でないならば 4 の倍数でない　真

(2)　逆：$a=0$ かつ $b=0$　ならば　$ab=0$　真

裏：$ab \neq 0$　ならば　$a \neq 0$ または $b \neq 0$　真

対偶：$a \neq 0$ または $b \neq 0$　ならば　$ab \neq 0$　偽

(3)　逆：$x \neq 3$　ならば　$x^2>9$　偽

裏：$x^2 \leqq 9$　ならば　$x=3$　偽

対偶：$x=3$　ならば　$x^2 \leqq 9$　真

(4)　逆：$x \leqq 2$ または $y \leqq 2$ ならば $x+y \leqq 4$　偽

裏：$x+y>4$ ならば $x>2$ かつ $y>2$　偽

対偶：$x>2$ かつ $y>2$ ならば $x+y>4$　真

解説

(1)　逆：2 の倍数は 4 の倍数である。　(偽)　反例は 6

裏：4 の倍数でないならば 2 の倍数でない。　(偽)　反例は 6

対偶：2 の倍数でないならば 4 の倍数でない。

2 の倍数でない数は奇数であるから　(真)

(2)　逆：$a=0$ かつ $b=0$　ならば　$ab=0$　(真)

裏：$ab \neq 0$　ならば　$a \neq 0$ または $b \neq 0$

$ab \neq 0$ のとき，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ であるから　(真)

対偶：$a \neq 0$ または $b \neq 0$　ならば　$ab \neq 0$　(偽)　反例は $a=1$，$b=0$

(3)　逆：$x \neq 3$　ならば　$x^2>9$　(偽)　反例は $x=1$

裏：$x^2 \leqq 9$　ならば　$x=3$　(偽)　反例は $x=1$

対偶：$x=3$　ならば　$x^2 \leqq 9$　(真)

(4)　逆：$x \leqq 2$ または $y \leqq 2$　ならば　$x+y \leqq 4$　(偽)　反例は $x=1$，$y=5$

裏：$x+y>4$　ならば　$x>2$ かつ $y>2$　(偽)　反例は $x=1$，$y=5$

対偶：$x>2$ かつ $y>2$　ならば　$x+y>4$

$x>2$ かつ $y>2$ のとき

$x>2$ であるから　$x+y>2+y$

$y>2$ であるから　$2+y>4$

よって　$x+y>4$　(真)

18 a，b，x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽をいえ。

(1)　$x+y=3$　ならば　$x=2$　かつ　$y=1$　　(2)　$x=0$　ならば　$x^2+x=0$

(3)　$a+b>0$　ならば　$a>0$　かつ　$b>0$

解答　(1)　逆：$x=2$ かつ $y=1$　ならば　$x+y=3$　(真)

裏：$x+y \neq 3$　ならば　$x \neq 2$ または $y \neq 1$　(真)

対偶：$x \neq 2$ または $y \neq 1$　ならば　$x+y \neq 3$　(偽)

(2)　逆：$x^2+x=0$　ならば　$x=0$　(偽)

裏：$x \neq 0$　ならば　$x^2+x \neq 0$　(偽)

対偶：$x^2+x \neq 0$　ならば　$x \neq 0$　(真)

(3)　逆：$a>0$ かつ $b>0$　ならば　$a+b>0$　(真)

裏：$a+b \leqq 0$　ならば　$a \leqq 0$ または $b \leqq 0$　(真)

対偶：$a \leqq 0$ または $b \leqq 0$　ならば　$a+b \leqq 0$　(偽)

解説

(1)　逆：$x=2$ かつ $y=1$　ならば　$x+y=3$　(真)

裏：$x+y \neq 3$　ならば　$x \neq 2$ または $y \neq 1$　(真)

対偶：$x \neq 2$ または $y \neq 1$　ならば　$x+y \neq 3$　(偽)　反例は $x=0$，$y=3$

(2)　逆：$x^2+x=0$　ならば　$x=0$　(偽)　反例は $x=-1$

裏：$x \neq 0$　ならば　$x^2+x \neq 0$　(偽)　反例は $x=-1$

対偶：$x^2+x \neq 0$　ならば　$x \neq 0$　(真)

(3)　逆：$a>0$ かつ $b>0$　ならば　$a+b>0$　(真)

裏：$a+b \leqq 0$　ならば　$a \leqq 0$ または $b \leqq 0$　(真)

対偶：$a \leqq 0$ または $b \leqq 0$　ならば　$a+b \leqq 0$　(偽)　反例は $a=2$，$b=-1$

19 次の事柄は命題であるか。命題である場合は，その真偽をいえ。

(1)　23 を 3 で割ると 2 余る。　　(2)　二等辺三角形は正三角形である。

(3)　3.14 は円周率 π のよい近似値である。

解答　(1)　命題である，真　　(2)　命題である，偽　　(3)　命題でない

解説

(1)　「23 を 3 で割ると 2 余る。」は正しい。

正しいか正しくないかが決まるから，命題である。　真

(2)　「二等辺三角形は正三角形である。」は正しくない。

正しいか正しくないかが決まるから，命題である。　偽

(3)　「よい近似値」の意味が明確でないから，正しいか正しくないかが決まらない。

よって，命題でない。

20 x は実数とする。集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。

(1)　$1<x<2 \Longrightarrow 1<x<3$　　(2)　$x<1 \Longrightarrow 0<x<1$

(3)　$x>3 \Longrightarrow |x+1|>2$　　(4)　$|x| \leqq 2 \Longrightarrow |x-1|<3$

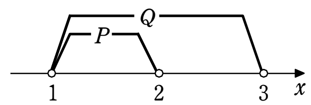
解答　(1)　真　　(2)　偽　　(3)　真　　(4)　偽

解説

(1)　$P=\{x \mid 1<x<2\}$，$Q=\{x \mid 1<x<3\}$ とする。

P，Q は下の図のようになり　$P \subset Q$

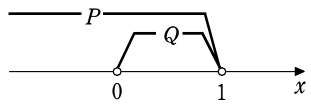
よって，命題は真である。



(2)　$P=\{x \mid x<1\}$，$Q=\{x \mid 0<x<1\}$ とする。

P，Q は下の図のようになり，$P \subset Q$ は成り立たない。

よって，命題は偽である。



(3)　$P=\{x \mid x>3\}$，$Q=\{x \mid |x+1|>2\}$ とする。

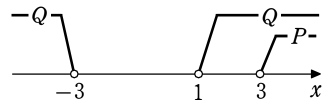
$|x+1|>2$ から　$x+1<-2$，$2<x+1$

よって　$x<-3$，$1<x$

ゆえに　$Q=\{x \mid x<-3,\ 1<x\}$

よって，P，Q は下の図のようになり　$P \subset Q$

ゆえに，命題は真である。



(4)　$P=\{x \mid |x| \leqq 2\}$，$Q=\{x \mid |x-1|<3\}$ とする。

$|x| \leqq 2$ から　$-2 \leqq x \leqq 2$

よって　$P=\{x \mid -2 \leqq x \leqq 2\}$

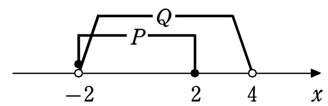
$|x-1|<3$ から　$-3<x-1<3$

各辺に 1 を加えて　$-2<x<4$

よって　$Q=\{x \mid -2<x<4\}$

ゆえに，P，Q は下の図のようになり，$P \subset Q$ は成り立たない。

よって，命題は偽である。



参考　(4)　$x=-2$ は P に属するが Q に属さないから，$P \subset Q$ は成り立たない。

21 a，b は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1)　$ab=0$ ならば $a^2+b^2=0$ である。

(2) $a^2=4$ ならば $|a+1|\geqq 1$ である。

(3) ab が有理数ならば，a，b はともに有理数である。

(4) $a+b$，ab がともに有理数ならば，a，b はともに有理数である。

解答 (1) 偽 (2) 真 (3) 偽 (4) 偽

解説

(1) $a=0$，$b=1$ とすると，$ab=0$ であるが，$a^2+b^2=1$ となり，$a^2+b^2=0$ でない。
よって，命題は偽である。

(2) $a^2=4$ から $a=\pm 2$
$a=2$ のとき $|a+1|=|2+1|=3\geqq 1$
$a=-2$ のとき $|a+1|=|-2+1|=1\geqq 1$
よって，命題は真である。

(3) $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$ とすると，$ab=2$ (有理数) であるが，a，b は有理数でない。
よって，命題は偽である。

(4) $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b=0$，$ab=-2$ (ともに有理数) であるが，a，b は有理数ではない。
よって，命題は偽である。

22 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての実数 x について $(x-1)^2\neq 0$

(2) ある自然数 n について $n^2=5n$

解答 (1) ある実数 x について $(x-1)^2=0$；もとの命題は 偽，否定は 真
(2) すべての自然数 n について $n^2\neq 5n$；もとの命題は 真，否定は 偽

解説

(1) 否定：ある実数 x について $(x-1)^2=0$
$x=1$ のとき $(x-1)^2=0$ であるから
もとの命題は偽，否定は真

(2) 否定：すべての自然数 n について $n^2\neq 5n$
$n=5$ のとき $n^2=5n$ であるから
もとの命題は真，否定は偽

23 n は自然数，x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1) n は 9 の倍数である $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数である

(2) $x\neq 2 \Longrightarrow x^2-3x+2\neq 0$

(3) $x^2-x=0 \Longrightarrow$「$x=0$ または $x=1$」

解答 (1) 真；逆：n は 3 の倍数である $\Longrightarrow$ n は 9の倍数である (偽)，
対偶：n は 3 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 9 の倍数でない (真)，
裏：n は 9 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数でない (偽)
(2) 偽；逆：$x^2-3x+2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2$ (真)，
対偶：$x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=2$ (偽)，
裏：$x=2 \Longrightarrow x^2-3x+2=0$ (真)
(3) 真；逆：「$x=0$ または $x=1$」$\Longrightarrow x^2-x=0$ (真)，
対偶：「$x\neq 0$ かつ $x\neq 1$」$\Longrightarrow x^2-x\neq 0$ (真)，
裏：$x^2-x\neq 0 \Longrightarrow$「$x\neq 0$ かつ $x\neq 1$」(真)

解説

(1) 与えられた命題は真である。
逆：n は 3 の倍数である $\Longrightarrow$ n は 9 の倍数である
6 は 3 の倍数であるが，9 の倍数ではない。
よって，逆は偽である。
対偶：n は 3 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 9 の倍数でない
対偶は真である。
裏：n は 9 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数でない
6 は 9 の倍数でないが，3 の倍数である。
よって，裏は偽である。

(2) $x^2-3x+2=0$ とすると $(x-1)(x-2)=0$
よって $x=1$ または $x=2$
$x=1$ のとき，$x\neq 2$ であるが $x^2-3x+2=0$ である。
よって，与えられた命題は偽である。
逆：$x^2-3x+2\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2$
$x^2-3x+2\neq 0$ とすると $x\neq 1$ かつ $x\neq 2$
よって，逆は真である。
対偶：$x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=2$
$x=1$ のとき，$x^2-3x+2=0$ であるが $x\neq 2$ である。
よって，対偶は偽である。
裏：$x=2 \Longrightarrow x^2-3x+2=0$
$x=2$ のとき $x^2-3x+2=0$
よって，裏は真である。

(3) $x^2-x=0$ とすると $x(x-1)=0$
よって $x=0$ または $x=1$
ゆえに，与えられた命題は真である。
逆：「$x=0$ または $x=1$」$\Longrightarrow x^2-x=0$
$x=0$ および $x=1$ は，ともに $x^2-x=0$ を満たす。
よって，逆は真である。
対偶：「$x\neq 0$ かつ $x\neq 1$」$\Longrightarrow x^2-x\neq 0$
$x^2-x=0$ を満たす x は 0 と 1 以外にはない。
よって，対偶は真である。
裏：$x^2-x\neq 0 \Longrightarrow$「$x\neq 0$ かつ $x\neq 1$」
$x^2-x\neq 0$ とすると $x\neq 0$ かつ $x\neq 1$
よって，裏は真である。

24 a，b，c は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $a=3 \Longrightarrow a^2+4a-21=0$　　(2) $ac=bc \Longrightarrow a=b$

(3) $a+b$，ab がともに整数ならば，a，b はともに整数である。

解答 (1) 真 (2) 偽 (3) 偽

解説

(1) $a=3$ のとき $a^2+4a-21=3^2+4\cdot 3-21=0$
よって，この命題は真である。

(2) $a=1$，$b=2$，$c=0$ のとき，$ac=bc$ であるが，$a=b$ でない。
よって，この命題は偽である。

(3) $a=1+\sqrt{2}$，$b=1-\sqrt{2}$ のとき，$a+b=2$，$ab=-1$ (ともに整数) であるが，a，b は整数でない。
よって，この命題は偽である。

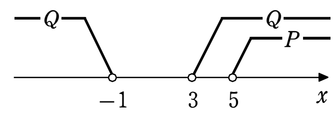
25 x は実数とする。集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。

$$x>5 \Longrightarrow |x-1|>2$$

解答 真

解説

$P=\{x \mid x>5\}$，$Q=\{x \mid |x-1|>2\}$ とする。
$|x-1|>2$ から $x-1<-2$ または $2<x-1$ よって $x<-1$ または $3<x$
ゆえに $Q=\{x \mid x<-1$ または $3<x\}$
よって，P，Q は右の図のようになり
$P\subset Q$
したがって，与えられた命題は真である。



26 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての素数 n について，n は奇数である。

(2) ある実数 x について $x^2\leqq 0$

解答 (1) ある素数 n について，n は偶数である。；もとの命題は偽，否定は真
(2) すべての実数 x について $x^2>0$；もとの命題は真，否定は偽

解説

(1) 否定は 「ある素数 n について，n は偶数である。」
2 は素数であり，かつ偶数であるから，もとの命題は偽，否定は真である。

(2) 否定は 「すべての実数 x について $x^2>0$」
$x=0$ のとき $x^2=0$ となるから，もとの命題は真，否定は偽である。

27 x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

$$xy=15 \Longrightarrow \text{「}x=3 \text{ かつ } y=5\text{」}$$

解答 もとの命題は偽
逆：「$x=3$ かつ $y=5$」$\Longrightarrow xy=15$；真
対偶：「$x\neq 3$ または $y\neq 5$」$\Longrightarrow xy\neq 15$；偽
裏：$xy\neq 15 \Longrightarrow$「$x\neq 3$ または $y\neq 5$」；真

解説

もとの命題は偽である。(反例：$x=5$，$y=3$)
逆は 「$x=3$ かつ $y=5$」$\Longrightarrow xy=15$ これは真である。
対偶は 「$x\neq 3$ または $y\neq 5$」$\Longrightarrow xy\neq 15$
もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=5$，$y=3$)
裏は $xy\neq 15 \Longrightarrow$「$x\neq 3$ または $y\neq 5$」
逆が真であるから，裏も真である。

28 a，b は実数，n は自然数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $a=0 \Longrightarrow ab=0$　　(2) $a^2=2a \Longrightarrow a=2$

(3) n は偶数 $\Longrightarrow$ $n+2$ は 4 の倍数

解答 (1) 真 (2) 偽 (3) 偽

解説

(1)　$a=0$ のとき　$ab=0\cdot b=0$　よって，この命題は真である。

(2)　$a=0$ のとき，$a^2=2a$ であるが，$a=2$ でない。
よって，この命題は偽である。

(3)　$n=4$ のとき $n+2=6$ となり，n は偶数であるが，$n+2$ は 4 の倍数でない。
よって，この命題は偽である。

29 x は実数，n は自然数とする。集合を用いて，次の命題の真偽を調べよ。

(1)　$x>1 \Longrightarrow x>0$　　(2)　$x\leqq -1 \Longrightarrow |x|>2$

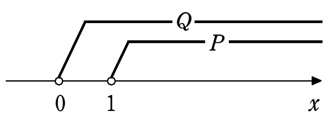
(3)　$|x|\leqq 1 \Longrightarrow |x-1|<3$

(4)　n は 18 の正の約数 $\Longrightarrow$ n は 36 の正の約数

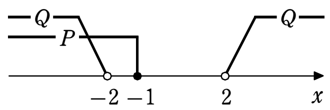
解答　(1)　真　(2)　偽　(3)　真　(4)　真

解説

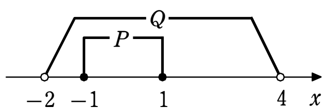
(1)　$P=\{x \mid x>1\}$，$Q=\{x \mid x>0\}$ とする。
P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$
したがって，与えられた命題は真。



(2)　$P=\{x \mid x\leqq -1\}$，$Q=\{x \mid |x|>2\}$ とする。
$|x|>2$ から　$x<-2$ または $2<x$
ゆえに　$Q=\{x \mid x<-2$ または $2<x\}$
よって，P，Q は右の図のようになり，$P\subset Q$ でない。
したがって，与えられた命題は偽。



(3)　$P=\{x \mid |x|\leqq 1\}$，$Q=\{x \mid |x-1|<3\}$ とする。
$|x|\leqq 1$ から　$-1\leqq x\leqq 1$
$|x-1|<3$ から　$-3<x-1<3$
各辺に 1 を加えて　$-2<x<4$
ゆえに　$P=\{x \mid -1\leqq x\leqq 1\}$
　　　　$Q=\{x \mid -2<x<4\}$
よって，P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$
したがって，与えられた命題は真。



(4)　$P=\{n \mid n$ は 18 の正の約数$\}$，$Q=\{n \mid n$ は 36 の正の約数$\}$ とすると
$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$
$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$
よって　$P\subset Q$
したがって，与えられた命題は真。

30 x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1)　$x+y=2 \Longrightarrow$「$x>1$ または $y>1$」

(2)　$xy=0 \Longrightarrow x+y=0$

(3)　n が自然数ならば，n^2-n+17 は素数である。

解答　(1)　偽　(2)　偽　(3)　偽

解説

(1)　$x=1$，$y=1$ のとき，$x+y=2$ であるが，$x>1$ または $y>1$ でない。
よって，この命題は偽である。

(2)　$x=0$，$y=1$ のとき，$xy=0$ であるが，$x+y=1$ となり，$x+y=0$ でない。
よって，この命題は偽である。

(3)　$n=17$ のとき　$n^2-n+17=17^2-17+17=17^2$
17^2 は素数でないから，この命題は偽である。

31 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1)　すべての実数 x について　$(x+1)^2>0$

(2)　ある自然数 n について　$n^2=5$

解答　(1)　ある実数 x について $(x+1)^2\leqq 0$；もとの命題は偽，否定は真
　　(2)　すべての自然数 n について　$n^2\neq 5$；もとの命題は偽，否定は真

解説

(1)　否定は「ある実数 x について　$(x+1)^2\leqq 0$」
$x=-1$ のとき，$(x+1)^2=0$ となるから，もとの命題は偽，否定は真である。

(2)　否定は「すべての自然数 n について　$n^2\neq 5$」
$n^2=5$ を満たす自然数はないから，もとの命題は偽，否定は真である。

32 x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1)　長方形ならば，平行四辺形である。　(2)　$x\neq 1 \Longrightarrow (x-1)(x-2)\neq 0$

(3)　「$x<0$ または $y<0$」$\Longrightarrow x+y<0$

解答　(1)　もとの命題は真
　逆：平行四辺形ならば，長方形である。；偽
　対偶：平行四辺形でないならば，長方形でない。；真
　裏：長方形でないならば，平行四辺形でない。；偽
(2)　もとの命題は偽
　逆：$(x-1)(x-2)\neq 0 \Longrightarrow x\neq 1$；真
　対偶：$(x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow x=1$；偽
　裏：$x=1 \Longrightarrow (x-1)(x-2)=0$；真
(3)　もとの命題は偽
　逆：$x+y<0 \Longrightarrow$「$x<0$ または $y<0$」；真
　対偶：$x+y\geqq 0 \Longrightarrow$「$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$」；偽
　裏：「$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$」$\Longrightarrow x+y\geqq 0$；真

解説

(1)　もとの命題は真である。
逆は　「平行四辺形ならば，長方形である。」　これは偽である。
対偶は「平行四辺形でないならば，長方形でない。」
もとの命題が真であるから，対偶も真である。
裏は　「長方形でないならば，平行四辺形でない。」
逆が偽であるから，裏も偽である。

(2)　もとの命題は偽である。(反例：$x=2$)
逆は　$(x-1)(x-2)\neq 0 \Longrightarrow x\neq 1$
対偶は　$(x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow x=1$
もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=2$)
裏は　$x=1 \Longrightarrow (x-1)(x-2)=0$　これは真である。
裏が真であるから，逆も真である。

(3)　もとの命題は偽である。(反例：$x=-1$，$y=2$)
逆は　$x+y<0 \Longrightarrow$「$x<0$ または $y<0$」
対偶は　$x+y\geqq 0 \Longrightarrow$「$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$」
もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=-1$，$y=2$)
裏は　「$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$」$\Longrightarrow x+y\geqq 0$　これは真である。
裏が真であるから，逆も真である。

注意　(2)，(3) では，逆の真偽は判定しにくいため，まず裏の真偽を調べた。

33 次の中で命題であるものを選び，その真偽を答えよ。

①　3 は不等式 $x-2>3$ の解である。

②　-3000 は小さい数である。

③　正三角形は二等辺三角形である。

④　方程式 $|x-2|=1$ の解は 1 である。ただし，x は実数とする。

解答　命題であるのは　①，③，④
　① は偽，③ は真，④ は偽

解説

①　$3-2<3$ であるから，① は正しくない。

②　「小さい」の意味が明確でないから，② は正しいか正しくないかが定まらない。

③　正三角形は 3 辺の長さが等しい。
よって，2 辺の長さが等しいから，二等辺三角形である。
したがって，③ は正しい。

④　$|x-2|=1$ を解くと，$x-2=\pm 1$ から　$x=1,\ 3$
よって，$|x-2|=1$ の解は，$x=1,\ 3$ であるから，④ は正しくない。

命題は正しいか正しくないかが定まるものであるから，命題であるのは　①，③，④
① は偽，③ は真，④ は偽である。

34 x は実数，n は自然数とする。次の条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を，集合を用いて調べよ。

(1)　p：$-3\leqq x$，q：$-1\leqq x\leqq 1$

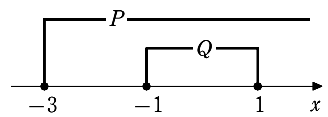
(2)　p：n は 18 の正の約数，q：n は 36 の正の約数

(3)　p：$|x|<2$，q：$|x-1|<3$

解答　(1)　偽　(2)　真　(3)　真

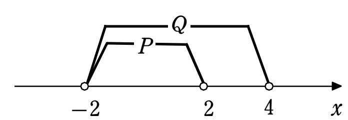
解説

(1)　$P=\{x \mid -3\leqq x\}$，$Q=\{x \mid -1\leqq x\leqq 1\}$ とする。
P，Q は右の図のようになり，$P\subset Q$ は成り立たない。
よって，命題は偽である。



(2)　$P=\{n \mid n$ は 18 の正の約数$\}$，$Q=\{n \mid n$ は 36 の正の約数$\}$ とする。
$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$，$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$
であるから　$P\subset Q$
よって，命題は真である。

(3)　$P=\{x \mid |x|<2\}$，$Q=\{x \mid |x-1|<3\}$ とする。
$P=\{x \mid -2<x<2\}$，$Q=\{x \mid -2<x<4\}$ であるから，P，Q は右の図のようになり
$P\subset Q$
よって，命題は真である。



35 a，b，c は実数，n は自然数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

(1)　$a=0 \Longrightarrow ab=0$　　(2)　$a^2=3a \Longrightarrow a=3$

(3)　$ac=bc \Longrightarrow a=b$　　(4)　n は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 2 の倍数

解答　(1)　真　　(2)　偽（反例：$a=0$）　　(3)　偽（反例：$a=1$，$b=2$，$c=0$）
(4)　真

解説

(1)　$a=0$ のとき　　$ab=0\times b=0$
よって　　真

(2)　$a^2=3a$ から　　$a(a-3)=0$
よって　　$a=0$，3
$a=0$ のとき，$a^2=3a$ を満たすが，$a=3$ を満たさない。
したがって　　偽　（反例：$a=0$）

(3)　$a=1$，$b=2$，$c=0$ は，$ac=bc$ を満たすが，$a=b$ を満たさない。
よって　　偽　（反例：$a=1$，$b=2$，$c=0$）

(4)　n が 4 の倍数であるとき，$n=4k$（k は自然数）とおける。
このとき，$n=2\cdot 2k$ であり，$2k$ は自然数であるから，n は 2 の倍数である。
よって　　真

36　n は自然数，a，b は実数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

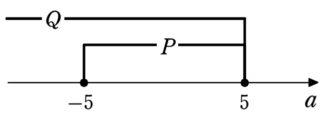
(1)　n は 16 の正の約数 $\Longrightarrow$ n は 24 の正の約数
(2)　$|a|\leqq 5 \Longrightarrow a\leqq 5$
(3)　$a+b$ と ab はともに整数 $\Longrightarrow$ a と b はともに整数

解答　(1)　偽（反例：$n=16$）　　(2)　真　　(3)　偽（反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$）

解説

(1)　16 の正の約数は　　1，2，4，8，16
24 の正の約数は　　1，2，3，4，6，8，12，24
$n=16$ のとき，n は 16 の正の約数であるが，24 の正の約数ではない。
よって　　偽　（反例：$n=16$）

(2)　$P=\{a \mid |a|\leqq 5\}$，$Q=\{a \mid a\leqq 5\}$ とする。
$|a|\leqq 5$ から　　$-5\leqq a\leqq 5$
P，Q は右の図のようになり　　$P\subset Q$
よって　　真



(3)　$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b=0$（整数），$ab=-2$（整数）であるが，a と b はともに整数ではない。
よって　　偽　（反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$）

37　x，a，b は実数とする。次の命題の逆を述べよ。また，もとの命題とその逆の真偽を調べよ。

(1)　$x=-3 \Longrightarrow x^2=9$
(2)　$ab<0 \Longrightarrow a>0$ かつ $b<0$
(3)　△ABC が正三角形ならば，△ABC の 2 つの内角は等しい。

解答　(1)　逆：$x^2=9 \Longrightarrow x=-3$　もとの命題は真，逆は偽
(2)　逆：$a>0$ かつ $b<0 \Longrightarrow ab<0$　もとの命題は偽，逆は真
(3)　逆：△ABC の 2 つの内角が等しいならば，△ABC は正三角形である。
もとの命題は真，逆は偽

解説

(1)　逆：「$x^2=9 \Longrightarrow x=-3$」
もとの命題は真。
逆は偽。（反例：$x=3$）

(2)　逆：「$a>0$ かつ $b<0 \Longrightarrow ab<0$」
もとの命題は偽。（反例：$a=-1$，$b=1$）
逆は真。

(3)　逆：「△ABC の 2 つの内角が等しいならば，△ABC は正三角形である。」
もとの命題は真。
逆は偽。（反例：AB＝AC である直角二等辺三角形 ABC）

38　x は実数，n は自然数とする。次の命題の対偶を述べよ。また，もとの命題とその対偶の真偽を調べよ。

(1)　n が 5 の倍数ならば，n は 10 の倍数である。
(2)　$x^2\neq x \Longrightarrow x\neq 1$ かつ $x\neq 0$
(3)　$x^2\geqq 1 \Longrightarrow x\geqq 1$

解答　(1)　n が10 の倍数でないならば，n は 5 の倍数でない，もとの命題と対偶は偽
(2)　$x=1$ または $x=0 \Longrightarrow x^2=x$，もとの命題と対偶は真
(3)　$x<1 \Longrightarrow x^2<1$，もとの命題と対偶は偽

解説

(1)　対偶：「n が 10 の倍数でないならば，n は 5 の倍数でない。」
対偶は偽。（反例：$n=5$）
よって，もとの命題も　偽

(2)　対偶：「$x=1$ または $x=0 \Longrightarrow x^2=x$」
$x=1$ のとき　　$x^2=1$　　　よって　　$x^2=x$
$x=0$ のとき　　$x^2=0$　　　よって　　$x^2=x$
したがって，対偶は真。
ゆえに，もとの命題も　真

(3)　対偶：「$x<1 \Longrightarrow x^2<1$」
対偶は偽。（反例：$x=-2$）
よって，もとの命題も　偽

39　x，p，q は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1)　$|x|=2 \Longrightarrow x^2=4$
(2)　$p^2=pq \Longrightarrow p=q$
(3)　4 の倍数かつ 6 の倍数である整数は，24 の倍数である。

解答　(1)　与えられた命題は真
逆：$x^2=4 \Longrightarrow |x|=2$，真
対偶：$x^2\neq 4 \Longrightarrow |x|\neq 2$，真
裏：$|x|\neq 2 \Longrightarrow x^2\neq 4$，真
(2)　与えられた命題は偽
逆：$p=q \Longrightarrow p^2=pq$，真
対偶：$p\neq q \Longrightarrow p^2\neq pq$，偽
裏：$p^2\neq pq \Longrightarrow p\neq q$，真
(3)　与えられた命題は偽
逆：24 の倍数である整数は，4 の倍数かつ 6 の倍数である，真
対偶：24 の倍数でない整数は，4 の倍数でないまたは 6 の倍数でない，偽
裏：4 の倍数でないまたは 6 の倍数でない整数は，24 の倍数でない，真

解説

(1)　$|x|=2$ ならば　　$x=\pm 2$
よって　　$x^2=4$
したがって，与えられた命題は真。
また，逆は　　「$x^2=4 \Longrightarrow |x|=2$」
対偶は　　「$x^2\neq 4 \Longrightarrow |x|\neq 2$」
裏は　　「$|x|\neq 2 \Longrightarrow x^2\neq 4$」
与えられた命題が真であるから，対偶も真。
逆について，$x^2=4$ ならば　　$x=\pm 2$
よって　　$|x|=2$
したがって，逆は真。
逆が真であるから，裏も真。

(2)　与えられた命題は偽。（反例：$p=0$，$q=1$）
また，逆は　　「$p=q \Longrightarrow p^2=pq$」
対偶は　　「$p\neq q \Longrightarrow p^2\neq pq$」
裏は　　「$p^2\neq pq \Longrightarrow p\neq q$」
与えられた命題が偽であるから，対偶も偽。
逆について，$p=q$ ならば，両辺に p を掛けて　　$p^2=pq$
したがって，逆は真。
逆が真であるから，裏も真。

(3)　与えられた命題は偽。（反例：整数 12）
また，逆は　　「24 の倍数である整数は，4 の倍数かつ 6 の倍数である。」
対偶は　　「24 の倍数でない整数は，4 の倍数でないまたは 6 の倍数でない。」
裏は　　「4 の倍数でないまたは 6 の倍数でない整数は，24 の倍数でない。」
与えられた命題が偽であるから，対偶も偽。
逆は真。
逆が真であるから，裏も真。

40　x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1)　$x=2$ かつ $y=3 \Longrightarrow xy+2=x+2y$
(2)　xy は無理数 $\Longrightarrow$ x，y の少なくとも一方は無理数
(3)　$|x|<1$ かつ $|y|<1 \Longrightarrow xy+1>x+y$

解答　(1)　与えられた命題は真
逆：$xy+2=x+2y \Longrightarrow x=2$ かつ $y=3$，偽
対偶：$xy+2\neq x+2y \Longrightarrow x\neq 2$ または $y\neq 3$，真
裏：$x\neq 2$ または $y\neq 3 \Longrightarrow xy+2\neq x+2y$，偽
(2)　与えられた命題は真
逆：x，y の少なくとも一方は無理数 $\Longrightarrow$ xy は無理数，偽
対偶：x，y はともに有理数 $\Longrightarrow$ xy は有理数，真
裏：xy は有理数 $\Longrightarrow$ x，y はともに有理数，偽
(3)　与えられた命題は真
逆：$xy+1>x+y \Longrightarrow |x|<1$ かつ $|y|<1$，偽
対偶：$xy+1\leqq x+y \Longrightarrow |x|\geqq 1$ または $|y|\geqq 1$，真
裏：$|x|\geqq 1$ または $|y|\geqq 1 \Longrightarrow xy+1\leqq x+y$，偽

解説

(1)　$x=2$ かつ $y=3$ のとき　　$xy+2=2\cdot 3+2=8$
$x+2y=2+2\cdot 3=8$

よって　$xy+2=x+2y$

したがって，与えられた命題は真。

逆は　「$xy+2=x+2y \Longrightarrow x=2$ かつ $y=3$」

対偶は　「$xy+2 \neq x+2y \Longrightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$」

裏は　「$x \neq 2$ または $y \neq 3 \Longrightarrow xy+2 \neq x+2y$」

与えられた命題が真であるから，対偶も真。

また　$xy+2=x+2y \Longleftrightarrow xy-x-2y+2=0$

$\Longleftrightarrow x(y-1)-2(y-1)=0$

$\Longleftrightarrow (x-2)(y-1)=0$

$\Longleftrightarrow x=2$ または $y=1$

よって，逆は偽。(反例：$x=2$，$y=0$)

逆が偽であるから，裏も偽。

(2)　逆は　「x，y の少なくとも一方は無理数 $\Longrightarrow$ xy は無理数」

対偶は　「x，y はともに有理数 $\Longrightarrow$ xy は有理数」

裏は　「xy は有理数 $\Longrightarrow$ x，y はともに有理数」

対偶は真である。

よって，与えられた命題も真。

逆は偽である。(反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$)

逆が偽であるから，裏も偽。

(3)　$|x|<1 \Longleftrightarrow -1<x<1$

$|y|<1 \Longleftrightarrow -1<y<1$

$xy+1>x+y \Longleftrightarrow xy-x-y+1>0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(y-1)>0$

$\Longleftrightarrow$ ($x-1>0$ かつ $y-1>0$) または ($x-1<0$ かつ $y-1<0$)

$\Longleftrightarrow$ ($x>1$ かつ $y>1$) または ($x<1$ かつ $y<1$)　……(＊)

$|x|<1$ かつ $|y|<1$ のとき，$x<1$ かつ $y<1$ が成り立つから，(＊)より，$xy+1>x+y$ が成り立つ。

よって，与えられた命題は真。

逆は　「$xy+1>x+y \Longrightarrow |x|<1$ かつ $|y|<1$」

対偶は　「$xy+1 \leqq x+y \Longrightarrow |x| \geqq 1$ または $|y| \geqq 1$」

裏は　「$|x| \geqq 1$ または $|y| \geqq 1 \Longrightarrow xy+1 \leqq x+y$」

与えられた命題は真であるから，対偶も真。

(＊)から，逆は偽。(反例：$x=2$，$y=2$)

逆が偽であるから，裏も偽。

$\boxed{41}$ 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題と否定の真偽を述べよ。

(1)　すべての実数 x について　$(x+1)^2>1$

(2)　ある実数 x について　$2x+1=0$

解答　(1)　否定：ある実数 x について　$(x+1)^2 \leqq 1$

もとの命題は偽，否定は真

(2)　否定：すべての実数 x について　$2x+1 \neq 0$

もとの命題は真，否定は偽

解説

(1)　否定：「ある実数 x について　$(x+1)^2 \leqq 1$」

もとの命題は　偽　(反例：$x=-1$)

よって，否定は　真

(2)　否定：「すべての実数 x について　$2x+1 \neq 0$」

$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$2x+1=0$ となるから，もとの命題は　真

よって，否定は　偽

$\boxed{42}$ n は自然数，a は実数とする。次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を 1 つ示せ。

(1)　n が 3 の倍数ならば，n は 9 の倍数である。

(2)　$a=5$ ならば $a^2=25$

(3)　$a \leqq 3 \Longrightarrow |a| \leqq 3$

解答　(1)　偽　(反例：$n=3$)　(2)　真　(3)　偽　(反例：$a=-4$)

解説

(1)　偽　(反例：$n=3$)

(2)　$a=5$ ならば　$a^2=5^2=25$　よって　真

(3)　偽　(反例：$a=-4$)

$\boxed{43}$ x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

$$x+y=3 \Longrightarrow x=1 \text{ かつ } y=2$$

解答　与えられた命題は偽

逆：「$x=1$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=3$」，真

対偶：「$x \neq 1$ または $y \neq 2 \Longrightarrow x+y \neq 3$」，偽

裏：「$x+y \neq 3 \Longrightarrow x \neq 1$ または $y \neq 2$」，真

解説

与えられた命題は　偽　(反例：$x=0$，$y=3$)

逆：「$x=1$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=3$」　これは　真

対偶：「$x \neq 1$ または $y \neq 2 \Longrightarrow x+y \neq 3$」

与えられた命題は偽であるから，対偶も　偽

裏：「$x+y \neq 3 \Longrightarrow x \neq 1$ または $y \neq 2$」

与えられた命題の逆は真であるから，裏も　真

$\boxed{44}$ 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を述べよ。

(1)　すべての実数 x について　$x^2 \geqq 0$

(2)　ある自然数 n について　$n^2=3$

解答　(1)　ある実数 x について　$x^2<0$

もとの命題は真，否定は偽

(2)　すべての自然数 n について　$n^2 \neq 3$

もとの命題は偽，否定は真

解説

(1)　否定：「ある実数 x について　$x^2<0$」

もとの命題は　真

よって，否定は　偽

(2)　否定：「すべての自然数 n について　$n^2 \neq 3$」

$n^2=3$ となる自然数 n はないから，もとの命題は　偽

よって，否定は　真