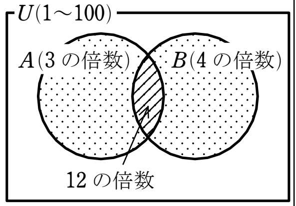
倍数の個数クイズ

1 1 から 100 までの整数のうち，3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか。

解答　50 個

解説



1 から 100 までの整数のうち，3 の倍数全体の集合を A，4 の倍数全体の集合を B とすると，3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ である。

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$

$B=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$

から　$n(A)=33,\quad n(B)=25$

また，$A\cap B$ は 3 と 4 の最小公倍数 12 の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ 12\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$

よって　$n(A\cap B)=8$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=33+25-8=50$

答　50 個

2 1 から 100 までの整数のうち，6 と 8 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか。

解答　24 個

解説

1 から 100 までの整数のうち，6 の倍数全体の集合を A，8 の倍数全体の集合を B とすると，6 と 8 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ である。

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$

$B=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ 8\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot12\}$

から　$n(A)=16,\ n(B)=12$

また，$A\cap B$ は 6 と 8 の最小公倍数 24 の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ 24\cdot3,\ 24\cdot4\}$

よって　$n(A\cap B)=4$

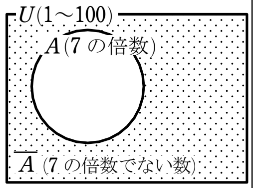
ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=16+12-4=24$　　答　24 個

3 1 から 100 までの整数のうち，7 の倍数でない数は何個あるか。

解答　86 個

解説



1 から 100 までの整数全体の集合を全体集合 U とすると

$n(U)=100$

また，そのうち 7 の倍数全体の集合を A とすると

$A=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$

であるから

$n(A)=14$

7 の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ であるから

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-14=86$　　答　86 個

4 1 から 200 までの整数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　3 の倍数でない数

(2)　5 の倍数であるが，3 の倍数でない数

解答　(1)　134 個　　(2)　27 個

解説

1 から 200 までの整数全体の集合を全体集合 U とすると　$n(U)=200$

また，そのうち 3 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\}$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$

であるから　$n(A)=66,\ n(B)=40$

(1)　3 の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ であるから

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=200-66=134$　　答　134 個

(2)　3 の倍数かつ 5 の倍数は 15 の倍数であり，このような数全体の集合は $A\cap B$ であるから　$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot13\}$

よって　$n(A\cap B)=13$

5 の倍数であるが，3 の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}\cap B$ で表され

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=40-13=27$　　答　27 個

5 1 から 100 までの整数のうち，2，3，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

解答　74 個

解説

1 から 100 までの整数のうち，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると　$n(A)=50,\ n(B)=33,\ n(C)=20$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 6 の倍数，15 の倍数，10 の倍数，30 の倍数全体の集合であるから

$n(A\cap B)=16,\ n(B\cap C)=6,\ n(C\cap A)=10,\ n(A\cap B\cap C)=3$

2，3，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=50+33+20-16-6-10+3=74$　　答　74 個

6 100 から 200 までの整数のうち，4 でも 6 でも割り切れない数の個数を求めよ。

解答　66 個

解説

100 から 200 までの整数全体の集合を U とし，そのうち 4 の倍数全体の集合を A，6 の倍数全体の集合を B とする。

このとき，4 でも 6 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ で表され，その要素の個数は　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

ここで　$n(U)=200-100+1=101$

$A=\{4\cdot25,\ 4\cdot26,\ 4\cdot27,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50\}$ から

$n(A)=50-25+1=26$

$B=\{6\cdot17,\ 6\cdot18,\ 6\cdot19,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot33\}$ から

$n(B)=33-17+1=17$

$A\cap B$ は 4 と 6 の最小公倍数 12 の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{12\cdot9,\ 12\cdot10,\ 12\cdot11,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot16\}$

よって　$n(A\cap B)=16-9+1=8$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=26+17-8=35$

したがって　$n(\overline{A\cup B})=101-35=66$　　答　66 個

7 1 から 50 までの整数のうち，次のような整数は何個あるか。[各 10 点]

(1)　3 でも 5 でも割り切れる整数

(2)　3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数

(3)　3 でも 5 でも割り切れない整数

解答　1 から 50 までの整数のうち，3 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot16\}$，$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot10\}$

(1)　$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3\}$ であるから　$n(A\cap B)=3$

答　3 個

(2)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+10-3=23$

答　23 個

(3)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=50-23=27$

答　27 個

解説

1 から 50 までの整数のうち，3 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot16\}$，$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot10\}$

(1)　$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3\}$ であるから　$n(A\cap B)=3$

答　3 個

(2)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+10-3=23$

答　23 個

(3)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=50-23=27$

答　27 個

8 1 から 700 までの自然数のうち，12 では割り切れるが，18 では割り切れない数は何個あるか。[20 点]

解答　12 と 18 の最小公倍数は 36 であるから，求める自然数の個数は，1 から 700 までの自然数のうち，12 の倍数の個数から 36 の倍数の個数を引けばよい。

$700\div12$ は商 58，余り 4，$700\div36$ は商 19，余り 16 であるから，求める個数は

$58-19=39$ (個)

解説

12 と 18 の最小公倍数は 36 であるから，求める自然数の個数は，1 から 700 までの自然数のうち，12 の倍数の個数から 36 の倍数の個数を引けばよい。

$700\div12$ は商 58，余り 4，$700\div36$ は商 19，余り 16 であるから，求める個数は

$58-19=39$ (個)

9 100 から 200 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　3 の倍数かつ 4 の倍数　　(2)　3 の倍数または 4 の倍数

(3)　3 で割り切れるが 4 で割り切れない数　　(4)　3 でも 4 でも割り切れない数

解答　(1)　8　(2)　51　(3)　25　(4)　50

解説

100 から 200 までの整数全体の集合を U とし，そのうち 3 の倍数，4 の倍数全体の集合をそれぞれ A，B とすると

$$A=\{3\cdot34,\ 3\cdot35,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\},\ B=\{4\cdot25,\ 4\cdot26,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50\}$$

ゆえに　$n(A)=66-34+1=33$，$n(B)=50-25+1=26$

(1)　3 かつ 4 の倍数すなわち 12 の倍数全体の集合は $A\cap B$ であり

$$A\cap B=\{12\cdot9,\ 12\cdot10,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot16\}$$

よって　$n(A\cap B)=16-9+1=8$

(2)　3 または 4 の倍数全体の集合は $A\cup B$ であるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=33+26-8=51$$

(3)　3 で割り切れるが 4 で割り切れない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ であるから

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=33-8=25$$

(4)　3 でも 4 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ であるから

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=(200-100+1)-51=50$$

10 3 桁の自然数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　6 の倍数かつ 8 の倍数　　(2)　6 の倍数または 8 の倍数

(3)　6 で割り切れないが 8 で割り切れる数

(4)　6 と 8 の少なくとも一方で割り切れない数

解答　(1)　37　(2)　225　(3)　75　(4)　863

解説

3 桁の自然数全体の集合を U とし，そのうち 6 の倍数，8 の倍数全体の集合をそれぞれ A，B とすると

$$A=\{6\cdot17,\ 6\cdot18,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot166\},\ B=\{8\cdot13,\ 8\cdot14,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot124\}$$

よって　$n(A)=166-17+1=150$,

$n(B)=124-13+1=112$

(1)　6 かつ 8 の倍数すなわち 24 の倍数全体の集合は $A\cap B$ である。

$$A\cap B=\{24\cdot5,\ 24\cdot6,\ \cdots\cdots,\ 24\cdot41\}$$

よって　$n(A\cap B)=41-5+1=37$

(2)　6 または 8 の倍数全体の集合は $A\cup B$ であるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=150+112-37=225$$

(3)　6 で割り切れないが 8 で割り切れる数全体の集合は $\overline{A}\cap B$ であるから

$$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=112-37=75$$

(4)　6 と 8 の少なくとも一方で割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cup\overline{B}$ であるから

$$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$$
$$=(999-99)-37=863$$

11 1 から 100 までの自然数の中で，次のような数は何個あるか。

(1)　2 でも 3 でも 5 でも割り切れる数　　(2)　2 または 3 または 5 で割り切れる数

(3)　2 では割り切れるが，3 でも 5 でも割り切れない数

解答　(1)　3 個　(2)　74 個　(3)　27 個

解説

1 から 100 までの自然数の集合を U とし，そのうち 2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A，B，C とする。

(1)　求める数は $n(A\cap B\cap C)$ である。$A\cap B\cap C$ は 30 の倍数の集合である。

$100\div30=3.3\cdots$ であるから　$n(A\cap B\cap C)=3$（個）

(2)　求める数は $n(A\cup B\cup C)$ である。

$100\div2=50$，$100\div3=33.3\cdots$，$100\div5=20$ から

$$n(A)=50,\ n(B)=33,\ n(C)=20$$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$ はそれぞれ 6 の倍数，15 の倍数，10 の倍数の集合である。

$100\div6=16.6\cdots$，$100\div15=6.6\cdots$，$100\div10=10$ から

$$n(A\cap B)=16,\ n(B\cap C)=6,\ n(C\cap A)=10$$

よって　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=50+33+20-16-6-10+3=74$（個）

(3)　求める数は $n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ であり

$$n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)$$
$$=n(A\cup B\cup C)-\{n(B)+n(C)-n(B\cap C)\}$$
$$=74-(33+20-6)=27\text{（個）}$$

12 500 以下の自然数を全体集合として考え，A を 8 の倍数の集合，B を 12 の倍数の集合，C を 15 の倍数の集合とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

(1)　8 かつ 12 かつ 15 の倍数の集合　　(2)　8 または 12 または 15 の倍数の集合

(3)　$(A\cup C)\cap B$

解答　(1)　4　(2)　108　(3)　24

解説

全体集合を U とすると　$n(U)=500$

$A=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot62\}$ から　$n(A)=62$

$B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot41\}$ から　$n(B)=41$

$C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot33\}$ から　$n(C)=33$

(1)　求める数は $n(A\cap B\cap C)$ である。

$A\cap B\cap C$ は 8 と 12 と 15 の最小公倍数 120 の倍数の集合で

$A\cap B\cap C=\{120,\ 240,\ 360,\ 480\}$　よって　$n(A\cap B\cap C)=4$

(2)　求める数は $n(A\cup B\cup C)$ であり

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$$
$$+n(A\cap B\cap C)\quad\cdots\cdots①$$

$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$ はそれぞれ 24 の倍数，60 の倍数，120 の倍数の集合で

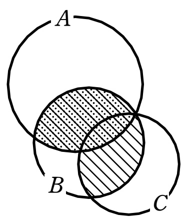
$A\cap B=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 24\cdot20\}$　よって　$n(A\cap B)=20$

$B\cap C=\{60\cdot1,\ 60\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 60\cdot8\}$　よって　$n(B\cap C)=8$

$A\cap C=\{120,\ 240,\ 360,\ 480\}$　よって　$n(A\cap C)=4$

ゆえに，① から　$n(A\cup B\cup C)=62+41+33-20-8-4+4=108$

(3)　$A\cap C\subset B$ であるから，A，B，C を図示すると，右のようになる。



$(A\cup C)\cap B$ は図の斜線部分である。

右の図で，黒く塗られた部分の要素の個数は

$$n(A\cap B)=20$$

斜線部分のうち，黒く塗られていない部分の要素の個数は

$$n(B\cap C)-n(A\cap C)=8-4=4$$

よって，求める個数は　$20+4=24$

別解　$n((A\cup C)\cap B)=n((A\cap B)\cup(C\cap B))$　（分配法則）

$=n(A\cap B)+n(C\cap B)-n((A\cap B)\cap(C\cap B))$

$=n(A\cap B)+n(C\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

$=20+8-4=24$

13 分母が 162 で，分子が 1 から 162 までの 162 個の分数のうち，約分できないものの個数を求めよ。

解答　54

解説

分母の 162 を素因数分解すると，$162=2\cdot3^4$ であるから，1 から 162 までの整数のうち，2 でも 3 でも割り切れないものの個数を求めればよい。

1 から 162 までの整数全体の集合を U とすると　$n(U)=162$

U の部分集合のうち，2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とすると，

$162=2\cdot81$，$162=3\cdot54$ から　$n(A)=81$，$n(B)=54$

また，$A\cap B$ は 6 の倍数全体の集合で，$162=6\cdot27$ から　$n(A\cap B)=27$

よって，求める個数は

$$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$$
$$=162-(81+54-27)=54$$

14 1 から 100 までの整数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　2 で割り切れる数　　(2)　9 で割り切れる数

(3)　2 と 9 の両方で割り切れる数

(4)　2 と 9 の少なくとも一方で割り切れる数

解答　(1)　50 個　(2)　11 個　(3)　5 個　(4)　56 個

解説

1 から 100 までの整数のうち，

2 で割り切れる数全体の集合を A，

9 で割り切れる数全体の集合を B

とする。

(1)　$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$ であるから　$n(A)=50$（個）

(2)　$B=\{9\cdot1,\ 9\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 9\cdot11\}$ であるから　$n(B)=11$（個）

(3)　2 と 9 の両方で割り切れる数全体の集合は $A\cap B$ で表される。

$A\cap B$ は 2 と 9 の最小公倍数 18 で割り切れる数全体の集合であるから

$$A\cap B=\{18\cdot1,\ 18\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 18\cdot5\}$$

よって　$n(A\cap B)=5$（個）

(4)　2 と 9 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ で表されるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+11-5=56\text{（個）}$$

15 1 から 100 までの整数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　8 の倍数　　(2)　12 の倍数

(3)　8 で割り切れない数　　(4)　12 で割り切れない数

(5)　8 の倍数であるが，12 の倍数でない数

(6)　8 でも 12 でも割り切れない数

(7)　8 で割り切れないかまたは 12 で割り切れない数

解答　(1)　12 個　(2)　8 個　(3)　88 個　(4)　92 個　(5)　8 個　(6)　84 個

(7) 96 個

解説

1 から 100 までの整数全体の集合を全体集合 U とする。そのうち，

8 の倍数全体の集合を A，12 の倍数全体の集合を B

とする。

$A=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot12\}$，$B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$

(1) 8 の倍数の個数は　$n(A)=12$（個）

(2) 12 の倍数の個数は　$n(B)=8$（個）

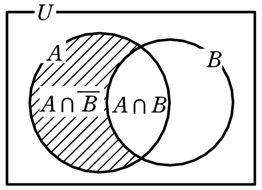
(3) 8 で割り切れない数全体の集合は $\overline{A}$ で表される。

よって　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-12=88$（個）

(4) 12 で割り切れない数全体の集合は $\overline{B}$ で表される。

よって　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=100-8=92$（個）

(5) 8 の倍数であるが 12 の倍数でない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ であり，その要素の個数は次の式で表される。



$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$A\cap B$ は 8 と 12 の最小公倍数 24 の倍数全体の集合であるから　$A\cap B=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ 24\cdot3,\ 24\cdot4\}$

ゆえに　$n(A\cap B)=4$

よって，求める数の個数は　$n(A)-n(A\cap B)=12-4=8$（個）

(6) 8 でも 12 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ であり，その要素の個数は次の式で表される。

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

ここで　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+8-4=16$

よって，求める数の個数は　$n(U)-n(A\cup B)=100-16=84$（個）

(7) 8 で割り切れないかまたは 12 で割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cup\overline{B}$ であり，その要素の個数は次の式で表される。

$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$

よって，求める数の個数は　$n(U)-n(A\cap B)=100-4=96$（個）

16 500 以上 1000 以下の整数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 11 の倍数でない整数　　(2) 11 の倍数であるが 3 の倍数でない整数

解答 (1) 456 個　(2) 30 個

解説

500 以上 1000 以下の整数全体の集合を全体集合 U とする。そのうち，11 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とする。

$n(U)=1000-500+1=501$

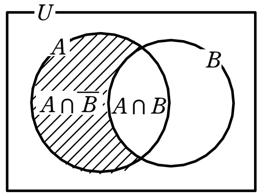
(1) 11 の倍数でない整数全体の集合は $\overline{A}$ で表される。

ここで　$A=\{11\cdot46,\ 11\cdot47,\ \cdots\cdots,\ 11\cdot90\}$

よって　$n(A)=90-46+1=45$

したがって，求める個数は　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=501-45=456$（個）

(2) 11 の倍数であるが 3 の倍数でない整数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ で表される。



ここで　$A\cap B=\{33\cdot16,\ 33\cdot17,\ \cdots\cdots,\ 33\cdot30\}$

よって　$n(A\cap B)=30-16+1=15$

したがって，求める個数は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=45-15=30$（個）

17 1 から 100 までの整数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 2，5，9 の少なくとも 1 つで割り切れる数

(2) 2 では割り切れるが，5 でも 9 でも割り切れない数

解答 (1) 65 個　(2) 36 個

解説

(1) 1 から 100 までの整数のうち，2 の倍数，5 の倍数，9 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$，$n(A)=50$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，$n(B)=20$

$C=\{9\cdot1,\ 9\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 9\cdot11\}$，$n(C)=11$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 10 の倍数，45 の倍数，18 の倍数，90 の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot10\}$，$n(A\cap B)=10$

$B\cap C=\{45\cdot1,\ 45\cdot2\}$，$n(B\cap C)=2$

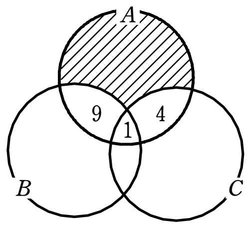
$C\cap A=\{18\cdot1,\ 18\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 18\cdot5\}$，$n(C\cap A)=5$

$A\cap B\cap C=\{90\}$，$n(A\cap B\cap C)=1$

2，5，9 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=50+20+11-10-2-5+1=65\ （個）$$

(2) 2 では割り切れるが，5 でも 9 でも割り切れない数全体の集合は，$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ であるから，右の図の斜線部分である。



$n(A\cap B\cap C)=1$，$n(A\cap B)=10$，$n(C\cap A)=5$ から，集合 A における各部分の要素の個数は，上のようになる。

よって，斜線部分の要素の個数は

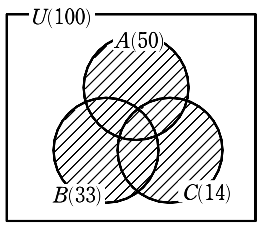
$n(A)-(9+4+1)=50-14=36$（個）

18 1 から 100 までの整数のうち，2，3，7 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

解答 72 個

解説

1 から 100 までの整数全体の集合を全体集合 U，そのうち，2 の倍数，3 の倍数，7 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると



$n(A)=50$，$n(B)=33$，$n(C)=14$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 6 の倍数，21 の倍数，14 の倍数，42 の倍数全体の集合であるから　$n(A\cap B)=16$，$n(B\cap C)=4$，

$n(C\cap A)=7$，$n(A\cap B\cap C)=2$

2，3，7 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=50+33+14-16-4-7+2$$
$$=72\ （個）$$

19 150 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 5 の倍数　　(2) 5 の倍数でない数

(3) 2 の倍数かつ 5 の倍数　　(4) 2 の倍数または 5 の倍数

解答 (1) 30 個　(2) 120 個　(3) 15 個　(4) 90 個

解説

150 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，5 の倍数全体の集合を A，2 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot30\}$

$B=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot75\}$

(1) $n(A)=30$（個）

(2) 求めるのは $n(\overline{A})$ である。

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=150-30=120$（個）

(3) 求めるのは $n(A\cap B)$ である。

$A\cap B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot15\}$

よって　$n(A\cap B)=15$（個）

(4) 求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=30+75-15=90$（個）

20 250 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 4 で割り切れる数　　(2) 10 で割り切れない数

(3) 4 と 10 の少なくとも一方で割り切れる数

解答 (1) 62 個　(2) 225 個　(3) 75 個

解説

250 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，4 で割り切れる数全体の集合を A，10 で割り切れる数全体の集合を B とすると

$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot62\}$

$B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot25\}$

(1) $n(A)=62$（個）

(2) 求めるのは $n(\overline{B})$ である。

$n(B)=25$ であるから

$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=250-25=225$（個）

(3) 求めるのは $n(A\cup B)$ で　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B$ は 20（4 と 10 の最小公倍数）の倍数全体の集合で

$A\cap B=\{20\cdot1,\ 20\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 20\cdot12\}$

したがって　$n(A\cap B)=12$

よって　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=62+25-12=75$（個）

21 200 以上 500 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 6 の倍数または 9 の倍数　　(2) 6 の倍数でも 9 の倍数でもない数

(3) 6 の倍数であるが 9 の倍数でない数

解答 (1) 67 個　(2) 234 個　(3) 34 個

解説

200 以上 500 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，6 の倍数全体の集合を A，9 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{6\cdot34,\ 6\cdot35,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot83\}$

$B=\{9\cdot23,\ 9\cdot24,\ \cdots\cdots,\ 9\cdot55\}$

よって　$n(A)=(83-34)+1=50$

$n(B)=(55-23)+1=33$

(1)　求めるのは $n(A\cup B)$ で　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B$ は 18 の倍数全体の集合で

$A\cap B=\{18\cdot12,\ 18\cdot13,\ \cdots\cdots,\ 18\cdot27\}$

よって　$n(A\cap B)=(27-12)+1=16$

したがって　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=50+33-16=67$ (個)

(2)　6 の倍数でも 9 の倍数でもない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

よって，求める個数は

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=\{(500-200)+1\}-67=234$ (個)

(3)　6 の倍数であるが 9 の倍数でない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ である。

よって，求める個数は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=50-16=34$ (個)

22 150 以下の自然数のうち，3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

解答　90 個

解説

150 以下の自然数のうち，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると　$n(A)=50$，$n(B)=37$，$n(C)=30$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 12 の倍数，20 の倍数，15 の倍数，60 の倍数全体の集合であるから

$n(A\cap B)=12$，$n(B\cap C)=7$，$n(C\cap A)=10$

$n(A\cap B\cap C)=2$

3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=50+37+30-12-7-10+2=90$ (個)

23 200 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　5 の倍数かつ 7 の倍数　　(2)　5 の倍数または 7 の倍数

解答　(1)　5 個　　(2)　63 個

解説

200 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，5 の倍数全体の集合を A，7 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$

$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot28\}$

よって　$n(A)=40$，$n(B)=28$

(1)　求めるのは $n(A\cap B)$ である。

$A\cap B=\{35\cdot1,\ 35\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 35\cdot5\}$

よって　$n(A\cap B)=5$ (個)

(2)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=40+28-5=63$ (個)

24 100 以上 400 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　4 の倍数または 6 の倍数

(2)　4 の倍数でも 6 の倍数でもない数

(3)　4 の倍数であるが 6 の倍数でない数

解答　(1)　101 個　　(2)　200 個　　(3)　51 個

解説

100 以上 400 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，4 の倍数全体の集合を A，6 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{4\cdot25,\ 4\cdot26,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot100\}$，$B=\{6\cdot17,\ 6\cdot18,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot66\}$

よって　$n(A)=(100-25)+1=76$，$n(B)=(66-17)+1=50$

(1)　求めるのは $n(A\cup B)$ で　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B$ は 12 の倍数全体の集合で　$A\cap B=\{12\cdot9,\ 12\cdot10,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot33\}$

よって　$n(A\cap B)=(33-9)+1=25$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=76+50-25=101$ (個)

(2)　4 の倍数でも 6 の倍数でもない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

よって，求める個数は

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=\{(400-100)+1\}-101=200$ (個)

(3)　4 の倍数であるが 6 の倍数でない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ である。

よって，求める個数は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=76-25=51$ (個)

25 100 以下の自然数のうち，2，3，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか。

解答　74 個

解説

100 以下の自然数のうち，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると　$n(A)=50$，$n(B)=33$，$n(C)=20$

また，$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ は，それぞれ 6 の倍数，15 の倍数，10 の倍数，30 の倍数全体の集合であるから

$n(A\cap B)=16$，$n(B\cap C)=6$，$n(C\cap A)=10$，$n(A\cap B\cap C)=3$

2，3，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ であるから

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=50+33+20-16-6-10+3=74$ (個)

26 次のような自然数は何個あるか。

(1)　100 以下の 4 の倍数　　(2)　500 以下の 7 の倍数　　(3)　1000 以下の 16 の倍数

解答　(1)　25 個　　(2)　71 個　　(3)　62 個

解説

(1)　100 以下の自然数のうち，4 の倍数全体の集合は

$\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$

よって，求める個数は　25 個

(2)　500 以下の自然数のうち，7 の倍数全体の集合は

$\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot71\}$

よって，求める個数は　71 個

(3)　1000 以下の自然数のうち，16 の倍数全体の集合は

$\{16\cdot1,\ 16\cdot2,\ 16\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 16\cdot62\}$

よって，求める個数は　62 個

27 100 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　7 の倍数　　(2)　7 の倍数でない数

(3)　5 の倍数かつ 7 の倍数　　(4)　5 の倍数または 7 の倍数

解答　(1)　14 個　　(2)　86 個　　(3)　2 個　　(4)　32 個

解説

100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，7 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とする。

$A=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$ であるから　$n(A)=14$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$ であるから　$n(B)=20$

(1)　$n(A)=14$ (個)

(2)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-14=86$ (個)

(3)　5 の倍数かつ 7 の倍数は，35 の倍数である。

求めるのは $n(A\cap B)$ で　$A\cap B=\{35\cdot1,\ 35\cdot2\}$

よって　$n(A\cap B)=2$ (個)

(4)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=14+20-2=32$ (個)

28 200 以下の自然数のうち，6 と 10 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか。

解答　47 個

解説

200 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，6 の倍数全体の集合を A，10 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot33\}$，$B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ 10\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot20\}$

よって　$n(A)=33$，$n(B)=20$

6 と 10 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ であり

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　…… ①

$A\cap B$ は 6 の倍数かつ 10 の倍数，すなわち 30 の倍数全体の集合で

$A\cap B=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 30\cdot6\}$

よって　$n(A\cap B)=6$

したがって，① から

$n(A\cup B)=33+20-6=47$ (個)

29 100 から 999 までの自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　9 と 12 の少なくとも一方で割り切れる数

(2)　9 で割り切れるが 12 では割り切れない数

(3)　9 でも 12 でも割り切れない数

解答　(1)　150 個　　(2)　75 個　　(3)　750 個

解説

100 から 999 までの自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，9 の倍数全体の集合を A，12 の倍数全体の集合を B とする。

$U=\{100,\ 101,\ \cdots\cdots,\ 999\}$，

$A=\{9\cdot 12,\ 9\cdot 13,\ \cdots\cdots,\ 9\cdot 111\}$,

$B=\{12\cdot 9,\ 12\cdot 10,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot 83\}$

であるから

$n(U)=999-(100-1)=900$,

$n(A)=111-(12-1)=100$,

$n(B)=83-(9-1)=75$

(1)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　…… ①

$A\cap B$ は 36 の倍数全体の集合で

$A\cap B=\{36\cdot 3,\ 36\cdot 4,\ \cdots\cdots,\ 36\cdot 27\}$

よって　　$n(A\cap B)=27-(3-1)=25$

したがって，① から

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=100+75-25=150$（個）

(2)　9 で割り切れるが，12 では割り切れない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ である。

よって，求める個数は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=100-25=75$（個）

(3)　9 でも 12 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

よって，求める個数は

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=900-150=750$（個）

$\boxed{30}$ 100 から 500 までの自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　6 の倍数

(2)　8 の倍数

(3)　6 の倍数または 8 の倍数

(4)　6 の倍数であるが 8 の倍数でない数

(5)　6 の倍数でも 8 の倍数でもない数

解答　(1)　67 個　　(2)　50 個　　(3)　101 個　　(4)　51 個　　(5)　300 個

解説

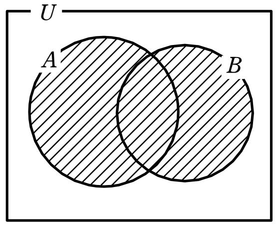
100 から 500 までの自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，6 の倍数全体の集合を A，8 の倍数全体の集合を B とする。

$U=\{100,\ 101,\ \cdots\cdots,\ 500\}$，$A=\{6\cdot 17,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot 83\}$，$B=\{8\cdot 13,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot 62\}$

(1)　$n(A)=83-(17-1)=67$（個）

(2)　$n(B)=62-(13-1)=50$（個）

(3)　求めるのは $n(A\cup B)$ で



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B$ は 24 の倍数全体の集合で

$A\cap B=\{24\cdot 5,\ 24\cdot 6,\ \cdots\cdots,\ 24\cdot 20\}$

よって

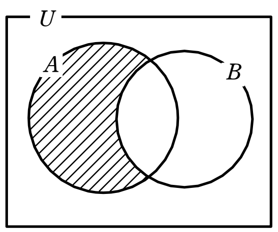
$n(A\cap B)=20-(5-1)=16$

したがって

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=67+50-16=101$（個）

(4)　6 の倍数であるが 8 の倍数でない数全体の集合は



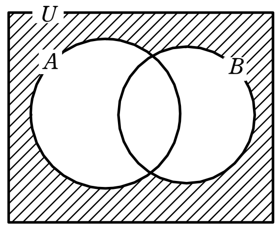
$A\cap\overline{B}$ である。

よって，求める個数は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$=67-16=51$（個）

(5)　6 の倍数でも 8 の倍数でもない数全体の集合は



$\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

よって，求める個数は

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=\{500-(100-1)\}-101$

$=300$（個）

$\boxed{31}$ 100 以下の自然数のうち，4 と 7 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか。

解答　36 個

解説

100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，4 の倍数全体の集合を A，7 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{4\cdot 1,\ 4\cdot 2,\ 4\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot 25\}$

$B=\{7\cdot 1,\ 7\cdot 2,\ 7\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot 14\}$

よって　　$n(A)=25$，$n(B)=14$

4 と 7 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ であり

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　…… ①

$A\cap B$ は 4 の倍数かつ 7 の倍数，すなわち 28 の倍数全体の集合で

$A\cap B=\{28\cdot 1,\ 28\cdot 2,\ 28\cdot 3\}$

よって　　$n(A\cap B)=3$

したがって，① から

$n(A\cup B)=25+14-3=36$（個）