和の計算クイズ

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+12\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$$

$$=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

解説

2 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+2)$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}5k$

解答　(1) $n(2n+5)$　　(2) $n(n-1)^2$　　(3) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$　　(4) $\frac{5}{2}n(n-1)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$$=n(2n+5)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-7\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-7\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-7(n+1)+8\}$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^2-4n+2)=n(n^2-2n+1)=n(n-1)^2$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}5k=5\sum_{k=1}^{n-1}k=5\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}=\frac{5}{2}n(n-1)$

3 次の和を求めよ。

$$1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+\cdots\cdots+n^2(n+1)$$

解答　$\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

解説

この和は，第 k 項が $k^2(k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

4 次の和を求めよ。

(1) $2\cdot2+4\cdot5+6\cdot8+\cdots\cdots+2n(3n-1)$

(2) $(1+1^3)+(2+2^3)+(3+3^3)+\cdots\cdots+(n+n^3)$

解答　(1) $2n^2(n+1)$　　(2) $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$

解説

(1) この和は，第 k 項が $2k(3k-1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}2k(3k-1)=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-2k)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=2n^2(n+1)$$

(2) この和は，第 k 項が $k+k^3$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(k+k^3)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{2}n(n+1)+\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$$

5 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots\cdots,\ 1+2+3+\cdots\cdots+n,\ \cdots\cdots$

解答　第 k 項 $\frac{1}{2}k(k+1)$，和 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k=\sum_{i=1}^{k}i=\frac{1}{2}k(k+1)$$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

6 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

$1^2,\ 1^2+2^2,\ 1^2+2^2+3^2,\ \cdots\cdots,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2,\ \cdots\cdots$

解答　第 k 項 $\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$，和 $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

この数列の第 k 項 a_k は　$a_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}i^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

7 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。[各 15 点]

(1) $2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7,\ 5\cdot9,\ \cdots\cdots,\ (n+1)(2n+1),\ \cdots\cdots$

(2) $2^2-1,\ 2^3-2,\ 2^4-3,\ 2^5-4,\ \cdots\cdots,\ 2^{n+1}-n,\ \cdots\cdots$

解答　(1) この数列の第 k 項は，$(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k+1)=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n}{6}\{2(n+1)(2n+1)+9(n+1)+6\}=\frac{n}{6}(4n^2+15n+17)$$

(2) この数列の第 k 項は，$2^{k+1}-k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-k)=4\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k=4\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=2^{n+2}-\frac{n(n+1)}{2}-4$$

解説

(1) この数列の第 k 項は，$(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k+1)=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n}{6}\{2(n+1)(2n+1)+9(n+1)+6\}=\frac{n}{6}(4n^2+15n+17)$$

(2) この数列の第 k 項は，$2^{k+1}-k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-k)=4\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k=4\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=2^{n+2}-\frac{n(n+1)}{2}-4$$

8 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2-1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k^2+k+4)$　　(3) $\displaystyle\sum_{i=11}^{20}(2i+3)$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}2l\right)$

解答　(1) $n^2(2n+3)$　　(2) $\frac{1}{4}n(n-1)(n^2+3n+10)$　　(3) 340

(4) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2-1)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1=6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$

$$= n\{(n+1)(2n+1)-1\} = n(2n^2+3n)$$
$$= n^2(2n+3)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k^2+k+4)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k-4)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k-4\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-4n$$
$$=\frac{1}{4}n\{n(n+1)^2+6(n+1)-16\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n^3+2n^2+7n-10)$$
$$=\frac{1}{4}n(n-1)(n^2+3n+10)$$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+3)=2\sum_{i=1}^{n}i+3\sum_{i=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n=n(n+4)$

よって　$\displaystyle\sum_{i=11}^{20}(2i+3)=\sum_{i=1}^{20}(2i+3)-\sum_{i=1}^{10}(2i+3)$

$$=20(20+4)-10(10+4)$$
$$=480-140=340$$

別解　$i=k+10$ とおくと，$i=11$，12，……，20 のとき k の値は順に $k=1$，2，……，10 となるから

$$\sum_{i=11}^{20}(2i+3)=\sum_{k=1}^{10}\{2(k+10)+3\}=\sum_{k=1}^{10}(2k+23)$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11+23\cdot10=340$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}2l\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)\right\}=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

9 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)(k-3)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=7}^{24}(2k^2-5)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(i+2)\right\}$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=3}^{50}|k-7|$

解答　(1) $\dfrac{1}{4}n(n^3-2n^2-3n-12)$　(2) 9528　(3) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+8)$　(4) 956

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)(k-3)=\sum_{k=1}^{n}(k^3-3k^2+k-3)=\sum_{k=1}^{n}k^3-3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$
$$=\frac{1}{4}n\{n(n+1)^2-2(n+1)(2n+1)+2(n+1)-12\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n^3+2n^2+n-4n^2-6n-2+2n+2-12)$$
$$=\frac{1}{4}n(n^3-2n^2-3n-12)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-5)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5n$

$$=\frac{1}{3}n\{(n+1)(2n+1)-15\}=\frac{1}{3}n(2n^2+3n-14)$$
$$=\frac{1}{3}n(n-2)(2n+7)$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=7}^{24}(2k^2-5)=\sum_{k=1}^{24}(2k^2-5)-\sum_{k=1}^{6}(2k^2-5)$

$$=\frac{1}{3}\cdot24\cdot22\cdot55-\frac{1}{3}\cdot6\cdot4\cdot19$$
$$=9528$$

別解　$k=i+6$ とおくと，$k=7$，8，……，24 のとき i の値は順に $i=1$，2，……，18 となるから

$$\sum_{k=7}^{24}(2k^2-5)=\sum_{i=1}^{18}\{2(i+6)^2-5\}=\sum_{i=1}^{18}(2i^2+24i+67)$$
$$=2\sum_{i=1}^{18}i^2+24\sum_{i=1}^{18}i+67\sum_{i=1}^{18}1$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot18\cdot19\cdot37+24\cdot\frac{1}{2}\cdot18\cdot19+67\cdot18$$
$$=9528$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(i+2)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}i+2\sum_{i=1}^{k}1\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}k(k+1)+2k\right\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k^2+\frac{5}{2}k\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+15\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+16)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+8)$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=3}^{50}|k-7|=|-4|+|-3|+|-2|+|-1|+|0|+|1|+|2|+\cdots\cdots+|43|$

$$=4+3+2+1+0+1+2+\cdots\cdots+43$$

ここで　$4+3+2+1=10$，

$\displaystyle 1+2+\cdots\cdots+43=\sum_{k=1}^{43}k=\frac{1}{2}\cdot43(43+1)=946$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=3}^{50}|k-7|=10+946=956$

10 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $2\cdot5$，$3\cdot7$，$4\cdot9$，$5\cdot11$，……　　(2) 1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

解答　(1) $S_n=\dfrac{1}{6}n(4n^2+21n+35)$　(2) $S_n=2^{n+1}-n-2$

解説

与えられた数列の第 k 項を a_k とする。

(1) $a_k=(k+1)(2k+3)$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+5k+3)$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$
$$=\frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+15(n+1)+18\}$$
$$=\frac{1}{6}n(4n^2+21n+35)$$

(2) $a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\dfrac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

11 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $1\cdot1\cdot3$，$2\cdot3\cdot5$，$3\cdot5\cdot7$，……　　(2) 1，$1+3$，$1+3+5$，……

(3) 7，77，777，7777，……

解答　(1) $S_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$　(2) $S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $S_n=\dfrac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

解説

(1) この数列の第 k 項は　$k(2k-1)(2k+1)$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$

$$=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

(2) この数列の第 k 項は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=\frac{1}{2}k\{2\cdot1+(k-1)\cdot2\}=k^2$$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) この数列は　7，$7(1+10)$，$7(1+10+10^2)$，……

であるから，第 k 項は

$$7(1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1})=7\cdot\frac{1\cdot(10^k-1)}{10-1}=\frac{7}{9}(10^k-1)$$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{9}(10^k-1)=\frac{7}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$

$$=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

12 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……，$(n-1)\cdot2$，$n\cdot1$

解答　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

この数列の第 k 項は　$k\{n+(k-1)\cdot(-1)\}=-k^2+(n+1)k$

したがって，求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

別解　求める和を S とすると

$S=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)$

$=\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots\cdots+k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

13 次の数列の和を求めよ。

(1)　$(n+1)^2$，$(n+2)^2$，$(n+3)^2$，……，$(n+n)^2$

(2)　$1^2\cdot n$，$2^2(n-1)$，$3^2(n-2)$，……，$(n-1)^2\cdot 2$，$n^2\cdot 1$

解答　(1)　$\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$　　(2)　$\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

(1)　第 k 項は　　$(n+k)^2=n^2+2nk+k^2$

和は　$\sum_{k=1}^{n}(n^2+2nk+k^2)=n^2\sum_{k=1}^{n}1+2n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=n^2\cdot n+2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}n\{6n^2+6n(n+1)+(n+1)(2n+1)\}$

$=\frac{1}{6}n(14n^2+9n+1)=\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$

別解　求める和は

$\sum_{k=n+1}^{2n}k^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(2\cdot 2n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}n(2n+1)\{2(4n+1)-(n+1)\}$

$=\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$

(2)　第 k 項は　　$k^2\{n-(k-1)\}=(n+1)k^2-k^3$

和は　$\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k^2-k^3\}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{2(2n+1)-3n\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

別解　求める和は

$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$=\frac{1}{6}\left[2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right]$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

14 次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)$　　(2)　$\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)$　　(3)　$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2$　　(4)　$\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

解答　(1)　$n(n-2)$　　(2)　$n(n^3+2n^2+n-1)$　　(3)　$\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$

(4)　$\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

解説

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$

$=n(n-2)$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}1=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-n$

$=n\{n(n^2+2n+1)-1\}$

$=n(n^3+2n^2+n-1)$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-6k+1)=9\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-6(n+1)+2\}$

$=\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$

(4)　$\sum_{k=1}^{n-1}3^k=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

15 次の和を求めよ。

(1)　$2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(2)　$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+4\cdot5\cdot9+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$

解答　(1)　$\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$　　(2)　$\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$

解説

(1)　この和は，第 k 項が $(2k)^2$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

(2)　この和は，第 k 項が $k(k+1)(2k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である

から　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$

$=\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+2)$

$=\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$

16 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　2，2+4，2+4+6，2+4+6+8，……

(2)　1，1+3，1+3+9，1+3+9+27，……

解答　順に

(1)　$k(k+1)$，$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　　(2)　$\frac{1}{2}(3^k-1)$，$\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{i=1}^{k}2i=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)$

$=k(k+1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2)　$a_k=1+3+9+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$

$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

17 次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}(12k-6)\right\}$　　(2)　$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)\right\}$

解答　(1)　$n(n+1)(2n+1)$　　(2)　$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$

解説

(1)　$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}(12k-6)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left\{12\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-6m\right\}=\sum_{m=1}^{n}6m^2$

$=6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=n(n+1)(2n+1)$

(2)　$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2}l(l+1)\right\}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}(l^2+l)\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+\frac{1}{2}m(m+1)\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{6}m(m+1)\{(2m+1)+3\}$

$=\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n}m(m+1)(m+2)=\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n}(m^3+3m^2+2m)$

$=\frac{1}{6}\left[\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right]$

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$

$=\frac{1}{24}n(n+1)(n^2+5n+6)$

$=\dfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$

18 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1^2+1\cdot2+2^2$，$2^2+2\cdot3+3^2$，$3^2+3\cdot4+4^2$，……

(2) 1^2，1^2+3^2，$1^2+3^2+5^2$，$1^2+3^2+5^2+7^2$，……

解答　順に

(1) $3k^2+3k+1$，$n(n^2+3n+3)$　(2) $\dfrac{1}{3}(4k^3-k)$，$\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $a_k=k^2+k(k+1)+(k+1)^2=3k^2+3k+1$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)+3(n+1)+2\}=n(n^2+3n+3)$$

(2) $a_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2=4\sum_{i=1}^{k}i^2-4\sum_{i=1}^{k}i+\sum_{i=1}^{k}1$

$$=4\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-4\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+k$$

$$=\frac{1}{3}k\{2(k+1)(2k+1)-6(k+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}(4k^3-k)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}(4k^3-k)=\frac{1}{3}\left[4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

19 次の数列の和を求めよ。

(1) $1\cdot n$，$3\cdot(n-1)$，$5\cdot(n-2)$，……，$(2n-3)\cdot2$，$(2n-1)\cdot1$

(2) $1^2\cdot n$，$2^2\cdot(n-1)$，$3^2\cdot(n-2)$，……，$(n-1)^2\cdot2$，$n^2\cdot1$

解答　(1) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　(2) $\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $a_k=(2k-1)(n-k+1)=-2k^2+(2n+3)k-(n+1)$　$(1\leqq k\leqq n)$

よって，求める和は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\}$$

$$=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\cdot n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) $a_k=k^2(n-k+1)=-k^3+(n+1)k^2$ $(1\leqq k\leqq n)$

よって，求める和は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2\}=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

20 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-4k)$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$　(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-5k)$

解答　(1) $n(n+4)$　(2) $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　(3) $\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(4) $\dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$　(5) $\dfrac{1}{3}n(n^2-7)$　(6) $\dfrac{1}{3}n(n-1)(n-8)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$$=n(n+1)+3n=n\{(n+1)+3\}=n(n+4)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-4k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-4\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-8\}=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)-12\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-14)=\frac{1}{3}n(n^2-7)$$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-5k)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-5\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}-5\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-\frac{5}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(n-1)\{(2n-1)-15\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-16)=\frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$$

21 次の和を求めよ。

(1) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

(2) $1^2\cdot3+2^2\cdot4+3^2\cdot5+\cdots\cdots+n^2(n+2)$

解答　(1) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$　(2) $\dfrac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+4)$

解説

(1) これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

(2) これは，第 k 項が $k^2(k+2)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2)=\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+4(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+4)$$

22 数列 $1\cdot4$，$3\cdot7$，$5\cdot10$，$7\cdot13$，…… の初項から第 n 項までの和を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2}n(4n^2+5n-1)$

解説

数列 1，3，5，7，…… の第 k 項は　$1+(k-1)\cdot2=2k-1$

数列 4，7，10，13，…… の第 k 項は　$4+(k-1)\cdot3=3k+1$

よって，与えられた数列の第 k 項は　$(2k-1)(3k+1)=6k^2-k-1$

したがって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(6k^2-k-1)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$=\dfrac{1}{2}n\{2(n+1)(2n+1)-(n+1)-2\}$

$=\dfrac{1}{2}n(4n^2+5n-1)$

23 次の和を求めよ。

$1\cdot1\cdot5+2\cdot3\cdot7+3\cdot5\cdot9+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+3)$

解答 $\dfrac{1}{6}n(n+1)(6n^2+14n-5)$

解説

これは，第 k 項が $k(2k-1)(2k+3)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+4k^2-3k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+4\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k$

$=4\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+4\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=n^2(n+1)^2+4\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{6n(n+1)+4(2n+1)-9\}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(6n^2+14n-5)$

24 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+4)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k)$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+3)$ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k^2)$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}n(5n+13)$ (2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n-11)$ (3) $n(n^3+2n^2+n-1)$

(4) $\dfrac{1}{6}n(2n^2+15n+31)$ (5) $\dfrac{1}{12}n(n-1)(n-2)(3n-1)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+4)=5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4=5\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+4n=\dfrac{1}{2}n(5n+13)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)-12\}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n-11)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}1=4\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-n$

$=n\{n(n+1)^2-1\}=n(n^3+2n^2+n-1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+3)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+4k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+3n$

$=\dfrac{1}{6}n(2n^2+3n+1)+2n(n+1)+3n$

$=\dfrac{1}{6}n\{(2n^2+3n+1)+(12n+12)+18\}$

$=\dfrac{1}{6}n(2n^2+15n+31)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k^2)=\sum_{k=1}^{n-1}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n\right\}^2-\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$=\dfrac{1}{4}n^2(n-1)^2-\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$=\dfrac{1}{12}n(n-1)\{3n(n-1)-2(2n-1)\}$

$=\dfrac{1}{12}n(n-1)(3n^2-7n+2)$

$=\dfrac{1}{12}n(n-1)(n-2)(3n-1)$

25 次の和を求めよ。

(1) $3\cdot2+6\cdot3+9\cdot4+\cdots\cdots+3n(n+1)$ (2) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

解答 (1) $n(n+1)(n+2)$ (2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

解説

(1) これは，第 k 項が $3k(k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$

$=3\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+4)$

$=n(n+1)(n+2)$

(2) これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$=2\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

26 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+3)k$ (2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p}1\right)\right\}$

解答 (1) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(6n^2+14n-5)$ (2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+3)k=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+4k^2-3k)$

$\displaystyle=4\sum_{k=1}^{n}k^3+4\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k$

$=4\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+4\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{6n(n+1)+4(2n+1)-9\}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(6n^2+14n-5)$

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p}1\right)\right\}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{m}p\right)=\sum_{m=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{2}m(m+1)\right\}$

$\displaystyle=\dfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)=\dfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2+\dfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}m$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{12}n(n+1)(2n+1+3)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$