1 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $4\vec{a}$　(4) $2\vec{a}-3\vec{b}$

解答 (1) $(0,\ 4)$　(2) $(4,\ -2)$　(3) $(8,\ 4)$　(4) $(10,\ -7)$

解説

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 1)+(-2,\ 3)=(0,\ 4)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 1)-(-2,\ 3)=(4,\ -2)$

(3) $4\vec{a}=4(2,\ 1)=(8,\ 4)$

(4) $2\vec{a}-3\vec{b}=2(2,\ 1)-3(-2,\ 3)$
$=(2\cdot2-3(-2),\ 2\cdot1-3\cdot3)$
$=(10,\ -7)$

2 $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，ベクトル $\vec{p}=(5,\ 1)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

解答 $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$

解説

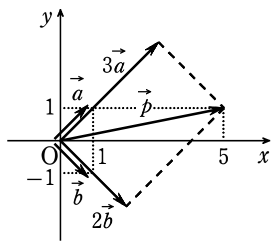
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$(5,\ 1)=s(1,\ 1)+t(1,\ -1)$
$=(s+t,\ s-t)$

よって　$s+t=5$，　$s-t=1$

これを解いて　$s=3$，$t=2$

したがって　$\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$



3 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$ のとき，次のベクトルを $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

(1) $\vec{p}=(4,\ 5)$　(2) $\vec{q}=(5,\ -2)$

解答 (1) $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$　(2) $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}=s(2,\ 1)+t(-1,\ 1)$
$=(2s-t,\ s+t)$

(1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(4,\ 5)=(2s-t,\ s+t)$

よって　$2s-t=4$，$s+t=5$

これを解いて　$s=3$，$t=2$

したがって　$\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(5,\ -2)=(2s-t,\ s+t)$

よって　$2s-t=5$，$s+t=-2$

これを解いて　$s=1$，$t=-3$

したがって　$\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$

別解 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$ とすると，$\vec{a}=2\vec{e_1}+\vec{e_2}$，$\vec{b}=-\vec{e_1}+\vec{e_2}$ であるから

$\vec{e_1}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$，$\vec{e_2}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(1) $\vec{p}=4\vec{e_1}+5\vec{e_2}=4\cdot\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{3}+5\cdot\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=3\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\vec{q}=5\vec{e_1}-2\vec{e_2}=5\cdot\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{3}-2\cdot\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\vec{a}-3\vec{b}$

4 ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(x-2,\ x)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答 $x=4$

解説

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための必要十分条件は，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在することである。

$\vec{b}=k\vec{a}$ から　$(x-2,\ x)=k(1,\ 2)$

よって　$x-2=k$，$x=2k$

これを解いて　$k=2$，$x=4$　　答 $x=4$

5 ベクトル $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ x+4)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答 $x=-1,\ -3$

解説

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための必要十分条件は，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在することである。

$\vec{b}=k\vec{a}$ から　$(3,\ x+4)=k(x,\ -1)$

よって　$3=kx$，$x+4=-k$

第 2 式から　$x=-k-4$

これを第 1 式に代入すると

$3=k(-k-4)$

すなわち　$k^2+4k+3=0$

ゆえに　$(k+1)(k+3)=0$

よって　$k=-1,\ -3$

$k=-1$ のとき $x=-3$，$k=-3$ のとき $x=-1$　　答 $x=-1,\ -3$

6 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 5)$，$\mathrm{C}(-2,\ -5)$ について，次のベクトルを成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ 5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{34}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{26}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-5,\ -10)$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=5\sqrt{5}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(6,\ 5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{61}$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ 5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-4,\ 5-0)=(-1,\ 5)$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2-3,\ -5-5)=(-5,\ -10)$
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-5)^2+(-10)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(4-(-2),\ 0-(-5))=(6,\ 5)$
$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$

7 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5)$，$\mathrm{B}(-2,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ -1)$，D を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるとする。頂点 D の座標を求めよ。

解答 $(3,\ 3)$

解説

四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件は

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

である。

頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(x-1,\ y-5)$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0-(-2),\ -1-1)$
$=(2,\ -2)$

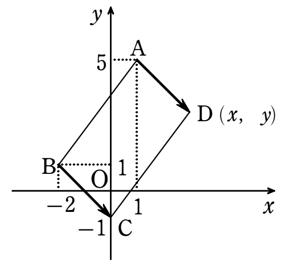
であるから

$(x-1,\ y-5)=(2,\ -2)$

よって　$x-1=2$，$y-5=-2$

これを解いて　$x=3$，$y=3$

したがって，頂点 D の座標は　$(3,\ 3)$



8 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 5)$，$\mathrm{B}(-2,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ -1)$ に対して，四角形 ABEC が平行四辺形になるような点 E の座標を求めよ。

解答 $(-3,\ -5)$

解説

四角形 ABEC が平行四辺形であるための必要十分条件は，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ である。

頂点 E の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0-1,\ -1-5)=(-1,\ -6)$

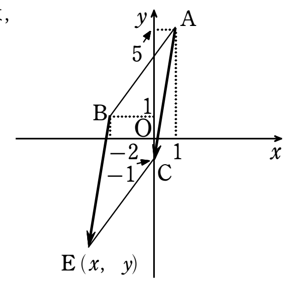
$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(x-(-2),\ y-1)=(x+2,\ y-1)$

であるから　$(x+2,\ y-1)=(-1,\ -6)$

よって　$x+2=-1$，$y-1=-6$

これを解いて　$x=-3$，$y=-5$

ゆえに，頂点 E の座標は　$(-3,\ -5)$



9 ベクトル $\vec{a}=(4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

解答 $\vec{e}=\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$，$\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

解説

$\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$4x+3y=0$

よって　$y=-\dfrac{4}{3}x$ …… ①

また，$|\vec{e}|^2=1^2$ から　$x^2+y^2=1$ …… ②

① と ② から　$\frac{25}{9}x^2=1$　　ゆえに　$x=\pm\frac{3}{5}$

$x=\frac{3}{5}$ のとき　$y=-\frac{4}{5}$,　$x=-\frac{3}{5}$ のとき　$y=\frac{4}{5}$

よって　　$\vec{e}=\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right),\ \left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

10 ベクトル $\vec{a}=(2,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

解答　$\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

解説

$\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　　すなわち　$2x-y=0$

よって　　$y=2x$　…… ①

また，$|\vec{e}|^2=1^2$ から　　$x^2+y^2=1$　…… ②

① と ② から　$5x^2=1$　　ゆえに　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき　$y=\frac{2}{\sqrt{5}}$,　$x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき　$y=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

よって　　$\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

11 次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ。

(1)　O(0, 0)，A(3, −1)，B(4, 2)

(2)　P(1, 0)，Q(−2, −1)，R(−1, 3)

解答　(1)　5　　(2)　$\frac{11}{2}$

解説

(1)　$\overrightarrow{OA}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{OB}=(4,\ 2)$ であるから

$|\overrightarrow{OA}|^2=3^2+(-1)^2=10$

$|\overrightarrow{OB}|^2=4^2+2^2=20$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times4+(-1)\times2=10$

よって，求める三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10\times20-10^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100}=5$$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=(-3,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(-2,\ 3)$ であるから

$|\overrightarrow{PQ}|^2=(-3)^2+(-1)^2=10$

$|\overrightarrow{PR}|^2=(-2)^2+3^2=13$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(-3)\times(-2)+(-1)\times3=3$

よって，求める三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10\times13-3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{121}=\frac{11}{2}$$

別解　(1)　$\overrightarrow{OA}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{OB}=(4,\ 2)$ であるから

$$S=\frac{1}{2}|3\times2-(-1)\times4|=\frac{1}{2}|10|=5$$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=(-3,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(-2,\ 3)$ であるから

$$S=\frac{1}{2}|(-3)\times3-(-1)\times(-2)|=\frac{1}{2}|-11|=\frac{11}{2}$$

12 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(0,\ -1)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を求めよ。また，ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答　$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

解説

$(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=(1,\ 2)+(0,\ -1)$

よって　$2\vec{a}=(1,\ 1)$　　ゆえに　$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=(1,\ 2)-(0,\ -1)$

よって　$2\vec{b}=(1,\ 3)$　　ゆえに　$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

$2\vec{a}-3\vec{b}=2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$

したがって　　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

別解　$\vec{p}=(1,\ 2)$，$\vec{q}=(0,\ -1)$ とおくと　　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{p}$，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{q}$

よって　　$\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$，$\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{p}-\vec{q})$

これを成分で表して

$\vec{a}=\frac{1}{2}\{(1,\ 2)+(0,\ -1)\}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$\vec{b}=\frac{1}{2}\{(1,\ 2)-(0,\ -1)\}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

以下は同様。

13 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解答　$t=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 3)+t(1,\ -2)$

$=(2+t,\ 3-2t)$

であるから

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+t)^2+(3-2t)^2=5t^2-8t+13=5\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，$t=\frac{4}{5}$ のとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小値 $\sqrt{\frac{49}{5}}$ すなわち $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ をとる。

別解　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+|\vec{b}|^2t^2$

ここで

$|\vec{a}|^2=2^2+3^2=13$，$|\vec{b}|^2=1^2+(-2)^2=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+3\times(-2)=-4$

以下は同様。

14 $\vec{a}=(-2,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 9)$ であるとき，$-6\vec{a}+2\vec{b}$ の成分と大きさを求めよ。また，ベクトル $\vec{p}=(4,\ -3)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。[25 点]

解答　$-6\vec{a}+2\vec{b}=-6(-2,\ 5)+2(2,\ 9)=(12+4,\ -30+18)=(16,\ -12)$

$|-6\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{16^2+(-12)^2}=4\sqrt{16+9}=4\times5=20$

また，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$(4,\ -3)=s(-2,\ 5)+t(2,\ 9)=(-2s+2t,\ 5s+9t)$

よって　　$-2s+2t=4$，$5s+9t=-3$

これを解いて　$s=-\frac{3}{2}$，$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\vec{p}=-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

解説

$-6\vec{a}+2\vec{b}=-6(-2,\ 5)+2(2,\ 9)=(12+4,\ -30+18)=(16,\ -12)$

$|-6\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{16^2+(-12)^2}=4\sqrt{16+9}=4\times5=20$

また，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$(4,\ -3)=s(-2,\ 5)+t(2,\ 9)=(-2s+2t,\ 5s+9t)$

よって　　$-2s+2t=4$，$5s+9t=-3$

これを解いて　$s=-\frac{3}{2}$，$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\vec{p}=-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

15 4 点 A(2, −2)，B(3, 2)，C(−1, 5)，D(x, y) を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の問いに答えよ。[(1) 10 点　(2) 15 点]

(1)　ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ の成分と大きさを求めよ。

(2)　D の座標を求め，ベクトル $\overrightarrow{BD}$ の成分と大きさを求めよ。

解答　(1)　$\overrightarrow{AB}=(3,\ 2)-(2,\ -2)=(1,\ 4)$　　よって　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 5)-(3,\ 2)=(-4,\ 3)$　　よって　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(2)　平行四辺形 ABCD においては，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから

$(x-2,\ y+2)=(-4,\ 3)$

よって　　$x-2=-4$，$y+2=3$

これを解いて　$x=-2$，$y=1$

したがって，D の座標は　$(-2,\ 1)$

また　　$\overrightarrow{BD}=(-2,\ 1)-(3,\ 2)=(-5,\ -1)$

よって　$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=(3,\ 2)-(2,\ -2)=(1,\ 4)$　　よって　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 5)-(3,\ 2)=(-4,\ 3)$　　よって　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(2)　平行四辺形 ABCD においては，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから

$(x-2,\ y+2)=(-4,\ 3)$

よって　　$x-2=-4$，$y+2=3$

これを解いて　$x=-2$，$y=1$

したがって，D の座標は　$(-2,\ 1)$

また　　$\overrightarrow{BD}=(-2,\ 1)-(3,\ 2)=(-5,\ -1)$

よって　$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

$\boxed{16}$ $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -2)$ であるとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。[20 点]

解答　$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 1)$ であるから，求めるベクトルは

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}(1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

解説

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 1)$ であるから，求めるベクトルは

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}(1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\boxed{17}$ 平面上に 2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ がある。このとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小となる実数 t の値を求め，そのときの最小値を求めよ。[30 点]

解答　$\vec{a}+t\vec{b}=(3-t,\ 1+2t)$ であるから

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(3-t)^2+(1+2t)^2=5t^2-2t+10$$
$$=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$$

よって，$t=\frac{1}{5}$ のとき，最小値 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ をとる。

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(3-t,\ 1+2t)$ であるから

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(3-t)^2+(1+2t)^2=5t^2-2t+10$$
$$=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$$

よって，$t=\frac{1}{5}$ のとき，最小値 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ をとる。

$\boxed{18}$ ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 4)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(7,\ 24)$ のなす角 $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線上に点 C があり，$\mathrm{OC}=5$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。ただし，C は第 1 象限の点とする。[20 点]

解答　$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{25}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{25}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5}(3,\ 4)+\frac{1}{25}(7,\ 24)=\frac{22}{25}(1,\ 2)$$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=5\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{22}{25}\sqrt{1^2+2^2}=\frac{22\sqrt{5}}{25}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{\sqrt{5}}(1,\ 2)=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

解説

$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{25}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{25}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5}(3,\ 4)+\frac{1}{25}(7,\ 24)=\frac{22}{25}(1,\ 2)$$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=5\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{22}{25}\sqrt{1^2+2^2}=\frac{22\sqrt{5}}{25}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{\sqrt{5}}(1,\ 2)=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

$\boxed{19}$ (1) $\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，ベクトル $5\vec{a}+3\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{p}=(14,\ 3a)$，$\vec{x}=(b,\ -1)$，$\vec{y}=(a-5,\ -b-1)$ とする。等式 $\vec{p}=3\vec{x}-4\vec{y}$ が成り立つとき，a，b の値を求めよ。

(3) $\vec{u}=(1,\ -\sqrt{3})$ と平行な単位ベクトルを成分で表せ。

解答　(1)　順に $(-1,\ -1)$，$\sqrt{2}$　　(2)　$a=3$，$b=2$

(3)　$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

解説

(1)　$5\vec{a}+3\vec{b}=5(-2,\ 1)+3(3,\ -2)$
$$=(5\cdot(-2)+3\cdot3,\ 5\cdot1+3\cdot(-2))=(-1,\ -1)$$

大きさは　$|5\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

(2)　$\vec{p}=3\vec{x}-4\vec{y}$ から　$(14,\ 3a)=3(b,\ -1)-4(a-5,\ -b-1)$

ゆえに　$(14,\ 3a)=(3b-4a+20,\ 4b+1)$

よって　$14=3b-4a+20$，$3a=4b+1$

整理すると　$4a-3b=6$，$3a-4b=1$

これを解いて　$a=3$，$b=2$

(3)　$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって，$\vec{u}$ と平行な単位ベクトルは

$$\pm\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\pm\frac{1}{2}(1,\ -\sqrt{3})=\left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad(\text{複合同順})$$

すなわち　$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boxed{20}$ (1) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$，$\vec{c}=(-3,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。また，大きさを求めよ。

（ア）$2\vec{a}+\vec{b}$　　（イ）$5\vec{a}-3\vec{b}$　　（ウ）$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

(2) $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$ とする。$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$，$\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を求めよ。

(3) ベクトル $\vec{v}=(12,\ -5)$ と反対向きで，大きさが 2 であるベクトルを成分で表せ。

解答　(1)　（ア）$(0,\ 7)$，7　（イ）$(11,\ 1)$，$\sqrt{122}$　（ウ）$(5,\ -4)$，$\sqrt{41}$

(2)　$\vec{x}=\left(1,\ \frac{9}{5}\right)$，$\vec{y}=\left(0,\ -\frac{2}{5}\right)$　　(3)　$\left(-\frac{24}{13},\ \frac{10}{13}\right)$

解説

(1)（ア）$2\vec{a}+\vec{b}=2(1,\ 2)+(-2,\ 3)$
$$=(2\cdot1-2,\ 2\cdot2+3)=(0,\ 7)$$

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{0^2+7^2}=7$

（イ）$5\vec{a}-3\vec{b}=5(1,\ 2)-3(-2,\ 3)$
$$=(5\cdot1-3\cdot(-2),\ 5\cdot2-3\cdot3)=(11,\ 1)$$

$|5\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{11^2+1^2}=\sqrt{122}$

（ウ）$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ 2)-3(-2,\ 3)+(-3,\ 1)$
$$=(2\cdot1-3\cdot(-2)-3,\ 2\cdot2-3\cdot3+1)=(5,\ -4)$$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$

(2)　$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$　…… ①，$\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}$　…… ②　とする。

①×3＋②×2 から　$5\vec{x}=3\vec{a}+2\vec{b}$

よって　$\vec{x}=\frac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})$

①－② から　$5\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$　　よって　$\vec{y}=\frac{1}{5}(\vec{a}-\vec{b})$

ゆえに　$\vec{x}=\frac{1}{5}\{3(1,\ 1)+2(1,\ 3)\}=\frac{1}{5}(5,\ 9)=\left(1,\ \frac{9}{5}\right)$

$\vec{y}=\frac{1}{5}\{(1,\ 1)-(1,\ 3)\}=\frac{1}{5}(0,\ -2)=\left(0,\ -\frac{2}{5}\right)$

(3)　$|\vec{v}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13$

$\vec{v}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{1}{13}(12,\ -5)=\left(\frac{12}{13},\ -\frac{5}{13}\right)$$

よって，求めるベクトルは

$$-2\vec{e}=-2\left(\frac{12}{13},\ -\frac{5}{13}\right)=\left(-\frac{24}{13},\ \frac{10}{13}\right)$$

$\boxed{21}$ $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ であるとき，ベクトル $\vec{c}=(5,\ 4)$ を $h\vec{a}+k\vec{b}$ の形に表せ。

解答　$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$

解説

$\vec{c}=h\vec{a}+k\vec{b}$ とすると　$(5,\ 4)=h(1,\ 2)+k(1,\ -1)$

すなわち　$(5,\ 4)=(h+k,\ 2h-k)$

よって　$h+k=5$　…… ①，　$2h-k=4$　…… ②

①，② を連立して解くと　$h=3$，$k=2$

したがって　$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$

$\boxed{22}$ 平面上のベクトル $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ がある。ベクトル $\vec{p}=(4,\ 3)$ を $m\vec{a}+n\vec{b}$ の形で表せ。

解答　$\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$

解説

$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とすると　$(4,\ 3)=m(2,\ -1)+n(-1,\ 3)$

すなわち　$(4,\ 3)=(2m-n,\ -m+3n)$

よって　$2m-n=4$，　$-m+3n=3$

これを解いて　$m=3$，$n=2$

したがって　$\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$

$\boxed{23}$ 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるとき，x の値を求めよ。

解答　$x=-2$

解説

$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行であるから，

$2\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ ……①

となる実数 k が存在する。

$2\vec{a}+3\vec{b}=2(-1,\ 2)+3(1,\ x)=(1,\ 4+3x)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(-1,\ 2)-2(1,\ x)=(-3,\ 2-2x)$

① に代入して　$(1,\ 4+3x)=k(-3,\ 2-2x)$

よって　$1=-3k$ ……②，　$4+3x=k(2-2x)$ ……③

② から　$k=-\frac{1}{3}$　　このとき，③ から　$4+3x=-\frac{1}{3}(2-2x)$

ゆえに　$12+9x=-2+2x$　　よって　$x=-2$

別解　$2\vec{a}+3\vec{b}=(1,\ 4+3x)$，　$\vec{a}-2\vec{b}=(-3,\ 2-2x)$ であるから

$(2\vec{a}+3\vec{b})\parallel(\vec{a}-2\vec{b}) \iff 1\cdot(2-2x)-(4+3x)\cdot(-3)=0$

よって　$2-2x+12+9x=0$　　したがって　$x=-2$

24 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(x,\ 9)$ が次の条件を満たすとき，実数 x の値を求めよ。

(1) $\vec{a}\parallel\vec{b}$　　　(2) $(\vec{a}+\vec{b})\parallel(\vec{a}-\vec{b})$

解答　(1) $x=-6$　　(2) $x=-6$

解説

(1) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ であるから　$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$(x,\ 9)=k(2,\ -3)$

よって　$x=2k$，$9=-3k$

これを解いて　$x=-6$，$k=-3$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\parallel(\vec{a}-\vec{b})$ であるから $\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 k がある。

ゆえに　$(2+x,\ 6)=k(2-x,\ -12)$

よって　$2+x=k(2-x)$，$6=-12k$

これを解いて　$x=-6$，$k=-\frac{1}{2}$

別解　(1) $2\cdot 9-x\cdot(-3)=0$ から　$x=-6$

(2) $\vec{a}+\vec{b}=(2+x,\ 6)$，$\vec{a}-\vec{b}=(2-x,\ -12)$ であるから，

$(2+x)\cdot(-12)-6\cdot(2-x)=0$ より　$x=-6$

25 4 点 A$(-3,\ -1)$，B$(a,\ 2)$，C$(3,\ 4)$，D$(-2,\ b)$ がある。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分と大きさを求めよ。

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，a，b の値を求めよ。

(3) a，b の値が (2) で求めたものであるとき，平行四辺形 ACED の頂点 E の座標と対角線 AE の長さを求めよ。

解答　(1) 順に $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(6,\ 5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{61}$　　(2) $a=2$，$b=1$

(3) 順に E$(4,\ 6)$，$7\sqrt{2}$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3-(-3),\ 4-(-1))=(6,\ 5)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$

(2) 四角形 ABCD は平行四辺形であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

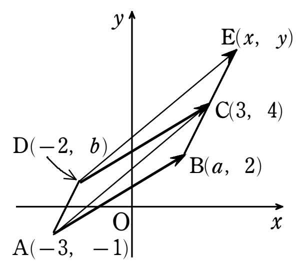
よって　$(a-(-3),\ 2-(-1))=(3-(-2),\ 4-b)$

ゆえに　$a+3=5$，　$3=4-b$

これを解いて　$a=2$，$b=1$

(3) 四角形 ACED が平行四辺形であるための条件は

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$



E$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(x+2,\ y-1)$ であるから，

(1) より　$(6,\ 5)=(x+2,\ y-1)$

よって　$6=x+2$，　$5=y-1$

ゆえに　$x=4$，$y=6$　　よって　E$(4,\ 6)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(4-(-3),\ 6-(-1))=(7,\ 7)$

であるから，対角線 AE の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$ は

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=7\sqrt{1^2+1^2}=7\sqrt{2}$

26 (1) 4 点 A$(2,\ 8)$，B$(-2,\ 2)$，C$(3,\ -2)$，D$(7,\ 4)$ を頂点とする四角形 ABCD は平行四辺形であることを証明せよ。

(2) 4 点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ -2)$，C$(4,\ 1)$，D$(x,\ y)$ を頂点とする平行四辺形は 3 個ある。それぞれについて，点 D の座標を求めよ。

解答　(1) 略　　(2) $(2,\ 5)$，$(6,\ -3)$，$(0,\ -1)$

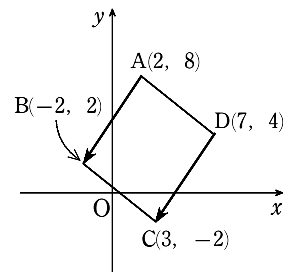
解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2-2,\ 2-8)=(-4,\ -6)$

$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(3-7,\ -2-4)=(-4,\ -6)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

AB，DC は同一直線上にないから，四角形 ABCD は平行四辺形である。



(2) 頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。

[1] 平行四辺形 ABCD の場合

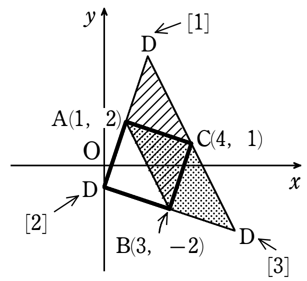
平行四辺形となるための条件は　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -4)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(4-x,\ 1-y)$ であるから

$4-x=2$，$1-y=-4$

よって　$x=2$，$y=5$

したがって　D$(2,\ 5)$



[2] 平行四辺形 ABDC の場合

平行四辺形となるための条件は　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -4)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(x-4,\ y-1)$ であるから

$x-4=2$，$y-1=-4$　　よって　$x=6$，$y=-3$

したがって　D$(6,\ -3)$

[3] 平行四辺形 ADBC の場合

平行四辺形となるための条件は　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(x-1,\ y-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-1,\ -3)$ であるから

$x-1=-1$，$y-2=-3$　　よって　$x=0$，$y=-1$

したがって　D$(0,\ -1)$

27 ベクトル $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア[　　] のとき最小値 イ[　　] をとる。

解答　(ア) $-\frac{1}{2}$　　(イ) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ -1)=(2+3t,\ 1-t)$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+3t)^2+(1-t)^2=10t^2+10t+5$

$=10\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア $-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{5}{2}}=$ イ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ をとる。

28 (1) $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 4)$ がある。実数 t の値を変化させるとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値と，そのときの t の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とする。$-2\leqq k\leqq 2$ のとき，$|\vec{p}|$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　(1) $t=-\frac{3}{10}$ のとき最小値 $\frac{4}{\sqrt{5}}$

(2) $k=-2$ で最大値 5，$k=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(-1,\ 2)+t(2,\ 4)=(-1+2t,\ 2+4t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(-1+2t)^2+(2+4t)^2=20t^2+12t+5$

$=20\left(t^2+\frac{3}{5}t\right)+5=20\left(t+\frac{3}{10}\right)^2-20\left(\frac{3}{10}\right)^2+5$

$=20\left(t+\frac{3}{10}\right)^2+\frac{16}{5}$

ゆえに，$|\vec{c}|^2$ は $t=-\frac{3}{10}$ のとき最小値 $\frac{16}{5}$ をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，$|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

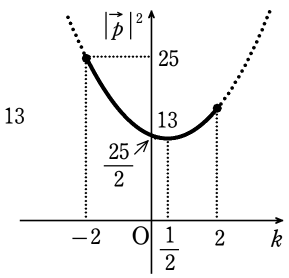
よって，$|\vec{c}|$ は $t=-\frac{3}{10}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ をとる。

(2) $\vec{p}=(2,\ 3)+k(1,\ -1)=(k+2,\ -k+3)$

よって　$|\vec{p}|^2=(k+2)^2+(-k+3)^2=2k^2-2k+13$

$=2(k^2-k)+13=2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+13$

$=2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$



$-2\leqq k\leqq 2$ の範囲において，$|\vec{p}|$ は

$k=-2$ で最大値 $\sqrt{8+4+13}=\sqrt{25}=5$，

$k=\frac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$　をとる。

29 (1) $\vec{p}=(-3,\ -4)$ と $\vec{q}=(a,\ -1)$ のなす角が $45°$ のとき，定数 a の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ とのなす角が $120°$，大きさが $2\sqrt{10}$ であるベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解答　(1) $a=-7$，$\frac{1}{7}$　　(2) $\vec{b}=(-2\sqrt{10},\ 0)$，$(\sqrt{10},\ \sqrt{30})$

解説

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=(-3)\times a+(-4)\times(-1)=-3a+4$ …… ①

また　$|\vec{p}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$, $|\vec{q}|=\sqrt{a^2+1}$

よって　$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos 45^\circ=5\sqrt{a^2+1}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …… ②

①，② から　$-3a+4=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+1}$ …… ③

ここで，$-3a+4>0$ であるから　$a<\dfrac{4}{3}$

③ の両辺を 2 乗して整理すると　$7a^2+48a-7=0$

ゆえに　$(a+7)(7a-1)=0$　よって　$a=-7,\ \dfrac{1}{7}$

これらは $a<\dfrac{4}{3}$ を満たす。

(2) $\vec{b}=(x,\ y)$ とする。

$|\vec{b}|=2\sqrt{10}$ から　$|\vec{b}|^2=40$　ゆえに　$x^2+y^2=40$ …… ①

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=2\cdot 2\sqrt{10}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{10}$$

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times x+(-\sqrt{3})\times y=x-\sqrt{3}\,y$ であるから

$x-\sqrt{3}\,y=-2\sqrt{10}$

よって　$x=\sqrt{3}\,y-2\sqrt{10}$ …… ②

② を ① に代入して　$(\sqrt{3}\,y-2\sqrt{10})^2+y^2=40$

整理すると　$y^2-\sqrt{30}\,y=0$

これを解いて　$y=0,\ \sqrt{30}$

② から　$y=0$ のとき　$x=-2\sqrt{10}$

$y=\sqrt{30}$ のとき　$x=\sqrt{10}$

したがって　$\vec{b}=(-2\sqrt{10},\ 0),\ (\sqrt{10},\ \sqrt{30})$

30 (1) p を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする。いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，p の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(m,\ n)$ (m と n は正の数)，$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 45° である。このとき，$m,\ n$ を求めよ。

解答　(1) $p=2-\sqrt{3}$　(2) $m=2,\ n=4$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 1+1\times(-p)=1-p$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-p)^2}=\sqrt{1+p^2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$ から　$1-p=\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}\times\dfrac{1}{2}$ …… ①

① の両辺を 2 乗して整理すると　$p^2-4p+1=0$

よって　$p=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 1}=2\pm\sqrt{3}$

ここで，① の右辺は正であるから，$1-p>0$ より　$0<p<1$

ゆえに　$p=2-\sqrt{3}$

(2) $|\vec{b}|=2\sqrt{5}$ から　$|\vec{b}|^2=20$

よって　$m^2+n^2=20$ …… ①

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ=\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$$

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times m+3\times n=-m+3n$ であるから　$-m+3n=10$

ゆえに　$m=3n-10$ …… ②

② を ① に代入して　$(3n-10)^2+n^2=20$

よって　$n^2-6n+8=0$　ゆえに　$(n-2)(n-4)=0$

これを解いて　$n=2,\ 4$ ($n>0$ を満たす)

② から　$n=2$ のとき $m=-4$，　$n=4$ のとき $m=2$

m も正の数であるから，求める $m,\ n$ の値は　$m=2,\ n=4$

31 (1) ベクトル $\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{b}=(x+1,\ -2)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(4,\ 1)$ に垂直で，大きさが $\sqrt{34}$ のベクトル $\vec{u}$ を求めよ。

解答　(1) $x=1$　(2) $\vec{u}=(\sqrt{2},\ -4\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$

解説

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ から，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるための条件は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ここで　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(x+1)+x\times(-2)=1-x$

よって　$1-x=0$　したがって　$x=1$

(2) $\vec{u}=(x,\ y)$ とする。$\vec{a}\perp\vec{u}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{u}=0$

よって　$4x+y=0$　ゆえに　$y=-4x$ …… ①

また，$|\vec{u}|=\sqrt{34}$ であるから　$x^2+y^2=34$ …… ②

① を ② に代入して　$x^2+(-4x)^2=34$

よって　$x^2=2$　ゆえに　$x=\pm\sqrt{2}$

① から　$y=\mp 4\sqrt{2}$ (複号同順)

したがって　$\vec{u}=(\sqrt{2},\ -4\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$

32 $\vec{a}=(p,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，$\vec{c}=(1,\ q)$ とするとき

(1) $\vec{b}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{u}$ を求めよ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{c}$ は垂直で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行であるとき，$p,\ q$ の値を求めよ。

解答　(1) $\vec{u}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right),\ \left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

(2) $(p,\ q)=(1+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}),\ (1-\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5})$

解説

(1) $\vec{u}=(x,\ y)$ とする。$\vec{b}\perp\vec{u}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{u}=0$

よって　$-x+3y=0$　ゆえに　$x=3y$ …… ①

また，$|\vec{u}|=1$ であるから　$x^2+y^2=1$ …… ②

① を ② に代入して　$(3y)^2+y^2=1$　よって　$10y^2=1$

ゆえに　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　① から　$x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (複号同順)

したがって　$\vec{u}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

(2) $\vec{b}-\vec{c}=(-2,\ 3-q)$ であるから，$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$ より　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$

よって　$p\times(-2)+2\times(3-q)=0$　すなわち　$p+q=3$ …… ①

また，$\vec{a}-\vec{b}=(p+1,\ -1)$ であるから，$(\vec{a}-\vec{b})/\!/\vec{c}$ より，$\vec{a}-\vec{b}=k\vec{c}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$(p+1,\ -1)=k(1,\ q)$　すなわち　$p+1=k,\ -1=kq$

$k=0$ とすると $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ となり，条件を満たさないから　$k\neq 0$

したがって　$p=k-1,\ q=-\dfrac{1}{k}$ …… ②

② を ① に代入して　$(k-1)-\dfrac{1}{k}=3$

両辺に k を掛けて整理すると　$k^2-4k-1=0$

これを解くと　$k=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}=2\pm\sqrt{5}$

② から

$k=2+\sqrt{5}$ のとき

$p=1+\sqrt{5}$，$q=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-2^2}=2-\sqrt{5}$

$k=2-\sqrt{5}$ のとき

$p=1-\sqrt{5}$，$q=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2}=2+\sqrt{5}$

したがって　$(p,\ q)=(1+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}),\ (1-\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5})$

33 (1) 次の 3 点を頂点とする △ABC の面積 S を求めよ。

(ア) A$(0,\ 0)$，B$(3,\ 1)$，C$(2,\ 4)$　(イ) A$(-2,\ 1)$，B$(3,\ 0)$，C$(2,\ 4)$

(2) A$(4,\ 1)$，B$(5,\ -3)$，C$(1,\ x)$ について，△ABC の面積が 1 となるように，定数 x の値を定めよ。

解答　(1) (ア) 5　(イ) $\dfrac{19}{2}$　(2) $x=11,\ 15$

解説

(1) (ア) $S=\dfrac{1}{2}|3\cdot 4-1\cdot 2|=\dfrac{1}{2}\cdot 10=5$

(イ) $\overrightarrow{AB}=(3-(-2),\ 0-1)=(5,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(2-(-2),\ 4-1)=(4,\ 3)$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}|5\cdot 3-(-1)\cdot 4|=\dfrac{19}{2}$

(2) $\overrightarrow{AB}=(5-4,\ -3-1)=(1,\ -4)$，$\overrightarrow{AC}=(1-4,\ x-1)=(-3,\ x-1)$ であるから，△ABC の面積は

$\dfrac{1}{2}|1\cdot(x-1)-(-4)\cdot(-3)|=\dfrac{1}{2}|x-13|$

$\dfrac{1}{2}|x-13|=1$ とすると　$|x-13|=2$

ゆえに　$x-13=\pm 2$　したがって　$x=11,\ 15$

34 点 A$(4,\ 5)$ から直線 ℓ: $x+2y-6=0$ に垂線を引き，ℓ との交点を H とする。

(1) 点 H の座標を，ベクトルを用いて求めよ。

(2) 線分 AH の長さを求めよ。

解答　(1) H$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$　(2) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

解説

(1) $\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると，$\vec{n}$ は直線 ℓ の法線ベクトルであるから　$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）と表されるから，

H$(s,\ t)$ とすると　$(s-4,\ t-5)=k(1,\ 2)$

ゆえに　$s-4=k$ ……①，$t-5=2k$ ……②

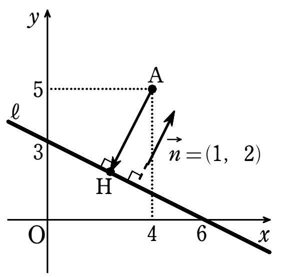
また，$s+2t-6=0$ であるから，①，② より

$$4+k+2(5+2k)-6=0$$

したがって　$k=-\dfrac{8}{5}$

よって，①，② から　$s=\dfrac{12}{5}$，$t=\dfrac{9}{5}$

したがって　$\mathrm{H}\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$



別解　H$(6-2t,\ t)$，$\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから

$$1\cdot(t-5)-2(2-2t)=0$$

よって　$t=\dfrac{9}{5}$　　ゆえに　$\mathrm{H}\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\dfrac{8}{5}\vec{n}$ から　$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{8}{5}\sqrt{1^2+2^2}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

35 点 A$(2,\ -3)$ から直線 ℓ: $3x-2y+4=0$ に下ろした垂線の足の座標を，ベクトルを用いて求めよ。また，点 A と直線 ℓ の距離を求めよ。

解答　$\left(-\dfrac{22}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$，$\dfrac{16\sqrt{13}}{13}$

解説

点 A から直線 ℓ に垂線 AH を下ろし，H$(s,\ t)$ とする。

$\vec{n}=(3,\ -2)$ とすると，$\vec{n}$ は直線 ℓ の法線ベクトルであり，

$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）と表される。

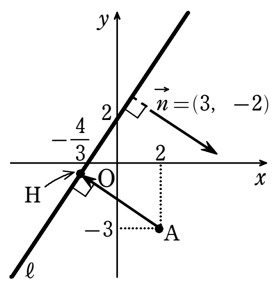
よって　$(s-2,\ t+3)=k(3,\ -2)$

ゆえに　$s-2=3k$ ……①，$t+3=-2k$ ……②

H は直線 ℓ 上の点であるから　$3s-2t+4=0$

①，② を代入して　$3(3k+2)-2(-2k-3)+4=0$

よって　$k=-\dfrac{16}{13}$



ゆえに，①，② から　$s=-\dfrac{22}{13}$，$t=-\dfrac{7}{13}$

したがって，垂線の足 H の座標は　$\left(-\dfrac{22}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

また，点 A と直線 ℓ の距離は

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\left|-\frac{16}{13}\vec{n}\right|=\frac{16}{13}|\vec{n}|=\frac{16}{13}\sqrt{3^2+(-2)^2}=\frac{16\sqrt{13}}{13}$$

別解　（前半）　$\mathrm{H}\left(s,\ \dfrac{3}{2}s+2\right)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(s-2,\ \dfrac{3}{2}s+5\right)$

$\vec{n}=(3,\ -2)$ とすると，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから　$3\cdot\left(\dfrac{3}{2}s+5\right)-(-2)(s-2)=0$

よって　$s=-\dfrac{22}{13}$　　ゆえに　$\mathrm{H}\left(-\dfrac{22}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

36 $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(1) $3\vec{a}$　(2) $-2\vec{a}$　(3) $\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\vec{b}-\vec{a}$　(5) $2\vec{a}-3\vec{b}$　(6) $-3\vec{a}+4\vec{b}$

解答　順に

(1) $(3,\ -6)$，$3\sqrt{5}$　(2) $(-2,\ 4)$，$2\sqrt{5}$　(3) $(-2,\ 0)$，2

(4) $(-4,\ 4)$，$4\sqrt{2}$　(5) $(11,\ -10)$，$\sqrt{221}$　(6) $(-15,\ 14)$，$\sqrt{421}$

解説

(1) $3\vec{a}=3(1,\ -2)=(3,\ -6)$

$|3\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

(2) $-2\vec{a}=-2(1,\ -2)=(-2,\ 4)$

$|-2\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(3) $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2)+(-3,\ 2)=(1-3,\ -2+2)=(-2,\ 0)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

(4) $\vec{b}-\vec{a}=(-3,\ 2)-(1,\ -2)=(-3-1,\ 2-(-2))=(-4,\ 4)$

$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

(5) $2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,\ -2)-3(-3,\ 2)=(2,\ -4)-(-9,\ 6)=(2-(-9),\ -4-6)$

$=(11,\ -10)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{11^2+(-10)^2}=\sqrt{221}$

(6) $-3\vec{a}+4\vec{b}=-3(1,\ -2)+4(-3,\ 2)=(-3,\ 6)+(-12,\ 8)=(-3-12,\ 6+8)$

$=(-15,\ 14)$

$|-3\vec{a}+4\vec{b}|=\sqrt{(-15)^2+14^2}=\sqrt{421}$

37 $\vec{a}=(5,\ -12)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$

(2) $\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが 3 のベクトル $\vec{b}$

解答　(1) $\left(\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$　(2) $\left(-\dfrac{15}{13},\ \dfrac{36}{13}\right)$

解説

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$

よって　$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{13}(5,\ -12)=\left(\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$

(2) $\vec{b}=-3\vec{e}=-3\left(\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)=\left(-\dfrac{15}{13},\ \dfrac{36}{13}\right)$

38 $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，次のベクトルを $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

(1) $\vec{p}=(1,\ -4)$　(2) $\vec{q}=(-8,\ 13)$

解答　(1) $\vec{p}=2\vec{a}+5\vec{b}$　(2) $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$

解説

(1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(1,\ -4)=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=1$，$3s-2t=-4$

これを解いて　$s=2$，$t=5$

したがって　$\vec{p}=2\vec{a}+5\vec{b}$

(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(-8,\ 13)=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=-8$，$3s-2t=13$

これを解いて　$s=3$，$t=-2$

したがって　$\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$

39 ベクトル $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(7-2x,\ -5+x)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答　$x=8$

解説

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための必要十分条件は，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在することである。

$\vec{b}=k\vec{a}$ から　$(7-2x,\ -5+x)=k(3,\ -1)$

よって　$7-2x=3k$，$-5+x=-k$

これを解いて　$k=-3$，$x=8$

40 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 0)$，B$(12,\ 5)$，C$(4,\ 4)$ について，次のベクトルを成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

解答　順に

(1) $(12,\ 5)$，13　(2) $(10,\ 5)$，$5\sqrt{5}$　(3) $(-8,\ -1)$，$\sqrt{65}$

(4) $(-2,\ 0)$，2

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(12,\ 5)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{12^2+5^2}=13$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(12-2,\ 5-0)=(10,\ 5)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4-12,\ 4-5)=(-8,\ -1)$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2}=\sqrt{65}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0-2,\ 0-0)=(-2,\ 0)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

41 $\vec{a}=(5,\ 0)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ とする。等式 $2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を成分で表せ。

解答　$\vec{x}=(4,\ -1)$，$\vec{y}=(-3,\ 2)$

解説

$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$　……①

$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$　……②　とする。

①×2−② から　$3\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$

よって　$\vec{x}=\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b})$　……③

ゆえに　$\vec{x}=\frac{1}{3}\{2(5,\ 0)-(-2,\ 3)\}=\frac{1}{3}(10+2,\ 0-3)=(4,\ -1)$

また，①，③ から　$\vec{y}=\vec{a}-2\cdot\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{3}(-\vec{a}+2\vec{b})$

よって　$\vec{y}=\frac{1}{3}\{-(5,\ 0)+2(-2,\ 3)\}=\frac{1}{3}(-5-4,\ 0+6)=(-3,\ 2)$

別解　[$\vec{y}$ の求め方]

① から　$\vec{y}=\vec{a}-2\vec{x}$

よって　$\vec{y}=(5,\ 0)-2(4,\ -1)=(5-8,\ 0+2)=(-3,\ 2)$

42 平行四辺形の 3 つの頂点が A$(-2,\ 2)$，B$(1,\ -3)$，C$(3,\ 0)$ のとき，第 4 の頂点 D の座標を求めよ。

解答　$(0,\ 5)$，$(6,\ -5)$，$(-4,\ -1)$

解説

条件を満たす平行四辺形は

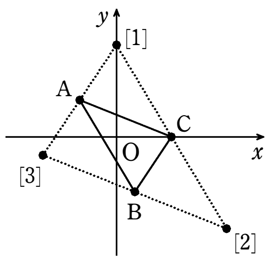
[1]　平行四辺形 ABCD

[2]　平行四辺形 ABDC

[3]　平行四辺形 ADBC

の 3 つの場合が考えられる。

頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。



[1]　四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件は　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

よって　$(x+2,\ y-2)=(3-1,\ 0+3)$

ゆえに　$x+2=2,\ y-2=3$

したがって　$x=0,\ y=5$

[2]　四角形 ABDC が平行四辺形であるための必要十分条件は　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

よって　$(1+2,\ -3-2)=(x-3,\ y-0)$

ゆえに　$3=x-3,\ -5=y$

したがって　$x=6,\ y=-5$

[3]　四角形 ADBC が平行四辺形であるための必要十分条件は　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

よって　$(x+2,\ y-2)=(1-3,\ -3-0)$

ゆえに　$x+2=-2,\ y-2=-3$

したがって　$x=-4,\ y=-1$

[1]～[3] から，頂点 D の座標は　$(0,\ 5)$，$(6,\ -5)$，$(-4,\ -1)$

43 $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ について，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解答　$x=\frac{2}{3}$

解説

$\vec{a}+3\vec{b}=(x,\ -1)+3(2,\ -3)=(x+6,\ -1-9)=(x+6,\ -10)$

$\vec{b}-\vec{a}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(2-x,\ -3+1)=(2-x,\ -2)$

$\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{b}-\vec{a}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるための必要十分条件は，$\vec{b}-\vec{a}=k(\vec{a}+3\vec{b})$ ……① を満たす実数 k が存在することである。

① から　$(2-x,\ -2)=k(x+6,\ -10)$

よって　$2-x=k(x+6)$，$-2=-10k$

これを解いて　$k=\frac{1}{5}$，$x=\frac{2}{3}$

44 $\vec{a}=(2,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，$\vec{x}-\vec{b}$ が $\vec{a}$ に平行で，かつ $|\vec{x}+\vec{b}|=4$ となるようなベクトル $\vec{x}$ を成分で表せ。

解答　$\vec{x}=(1,\ -1)$，$(-3,\ -5)$

解説

$\vec{x}=(p,\ q)$ とすると　$\vec{x}-\vec{b}=(p-3,\ q-1)$

$\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が平行であるとき，$\vec{x}-\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在する。

$\vec{x}-\vec{b}=k\vec{a}$ から　$(p-3,\ q-1)=k(2,\ 2)$

よって　$p-3=2k$，$q-1=2k$

したがって　$p=2k+3$，$q=2k+1$　……①

また，$|\vec{x}+\vec{b}|=4$ から　$|\vec{x}+\vec{b}|^2=16$

$\vec{x}+\vec{b}=(p+3,\ q+1)$ から　$(p+3)^2+(q+1)^2=16$

これに ① を代入すると　$(2k+6)^2+(2k+2)^2=16$

展開して整理すると　$k^2+4k+3=0$

左辺を因数分解すると　$(k+1)(k+3)=0$

これを解いて　$k=-1,\ -3$

① から，$k=-1$ のとき　$p=1$，$q=-1$

$k=-3$ のとき　$p=-3$，$q=-5$

したがって　$\vec{x}=(1,\ -1)$，$(-3,\ -5)$

45 $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{15}$ のとき，t の値を求めよ。

(2)　$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解答　(1)　$t=-1\pm\sqrt{2}$　　(2)　$t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$

解説

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3+t,\ 1+2t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(3+t)^2+(1+2t)^2=5t^2+10t+10$

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{15}$ のとき　$|\vec{c}|^2=15$

よって　$5t^2+10t+10=15$

ゆえに　$t^2+2t-1=0$

これを解いて　$t=-1\pm\sqrt{2}$

(2)　$|\vec{c}|^2=5(t^2+2t)+10=5(t+1)^2+5$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 5 をとる。

$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

ゆえに　$t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$

46 ベクトル $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

解答　$\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

解説

$\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$x-\sqrt{3}\,y=0$

よって　$x=\sqrt{3}\,y$　……①

また，$|\vec{e}|^2=1^2$ から　$x^2+y^2=1$　……②

① と ② から　$y^2=\frac{1}{4}$　ゆえに　$y=\pm\frac{1}{2}$

① から，$y=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=-\frac{1}{2}$ のとき　$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

47 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ は平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるとき，p と q の値を求めよ。

解答　$p=1$，$q=3$

解説

$\vec{b}-\vec{a}=(3-4,\ -1-2)=(-1,\ -3)$

$\vec{x}-\vec{b}=(p-3,\ q+1)$

$\vec{x}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行であるとき，$\vec{x}=k(\vec{b}-\vec{a})$ を満たす実数 k が存在する。

すなわち　$(p,\ q)=k(-1,\ -3)$

ゆえに　$p=-k$，$q=-3k$

よって　$q=3p$　……①

また，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるから　$(\vec{x}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$(p-3)\times4+(q+1)\times2=0$

よって　$2p+q=5$　……②

①，② から　$p=1$，$q=3$

参考　等式 ① は次のようにして導くこともできる。

$\vec{x}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ は平行であるから　$p\times(-3)-q\times(-1)=0$

ゆえに　$-3p+q=0$　よって　$q=3p$

48 2 つのベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ が $2\vec{x}-\vec{y}=(0,\ 4)$，$2|\vec{x}|=|\vec{y}|$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=6$ を満たすとき，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を求めよ。

解答　$\vec{x}=(2,\ 1)$，$\vec{y}=(4,\ -2)$　または　$\vec{x}=(-2,\ 1)$，$\vec{y}=(-4,\ -2)$

解説

$\vec{x}=(a,\ b)$，$\vec{y}=(c,\ d)$ とする。

$$2\vec{x}-\vec{y}=(2a-c,\ 2b-d)$$

$2\vec{x}-\vec{y}=(0,\ 4)$ から　　$2a-c=0$，$2b-d=4$

よって　　$c=2a$　　…… ①

　　　　　$d=2b-4$　　…… ②

$2|\vec{x}|=|\vec{y}|$ から　　$4|\vec{x}|^2=|\vec{y}|^2$

ゆえに　　$4(a^2+b^2)=c^2+d^2$　…… ③

$\vec{x}\cdot\vec{y}=6$ から　　$ac+bd=6$　　…… ④

①，② を ③ に代入して　　$4(a^2+b^2)=4a^2+(2b-4)^2$

よって　　$b=1$　　　　　　…… ⑤

このとき，② から　　$d=-2$　…… ⑥

①，⑤，⑥ を ④ に代入して　　$a\times 2a+1\times(-2)=6$

よって　　$a^2=4$　　　ゆえに　　$a=\pm 2$

① から，$a=2$　のとき　　$c=4$

　　　　$a=-2$ のとき　　$c=-4$

以上から　　$\vec{x}=(2,\ 1)$，$\vec{y}=(4,\ -2)$　または　$\vec{x}=(-2,\ 1)$，$\vec{y}=(-4,\ -2)$

49 ベクトル $\vec{a}=(-1,\ 7)$ と $45°$ の角をなし，大きさが 5 であるベクトル $\vec{x}$ を求めよ。

解答　$\vec{x}=(-4,\ 3)$，$(3,\ 4)$

解説

$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。

$\vec{a}$ と $\vec{x}$ のなす角が $45°$ であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{x}=|\vec{a}||\vec{x}|\cos 45°$　…… ①

ここで　　$\vec{a}\cdot\vec{x}=(-1)\times p+7\times q=-p+7q$

　　　　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$

　　　　$|\vec{x}|=5$

これらを ① に代入して　　$-p+7q=5\sqrt{2}\times 5\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$p=7q-25$　…… ②

また，$|\vec{x}|=5$ から　　$|\vec{x}|^2=25$　　　ゆえに　　$p^2+q^2=25$　…… ③

② と ③ から　　$q^2-7q+12=0$　　　これを解いて　　$q=3,\ 4$

② から，$q=3$ のとき　　$p=-4$

　　　　$q=4$ のとき　　$p=3$

したがって　　$\vec{x}=(-4,\ 3)$，$(3,\ 4)$

50 次の 3 点を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

(1)　O$(0,\ 0)$，A$(2,\ -3)$，B$(-1,\ 2)$

(2)　A$(1,\ 2)$，B$(2+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$，C$(2,\ 2+\sqrt{3})$

(3)　A$(1+\sqrt{3},\ 2)$，B$(\sqrt{3},\ 5)$，C$(4+\sqrt{3},\ 1)$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　2　　(3)　4

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 2)$ であるから　　$S=\dfrac{1}{2}|2\times 2-(-3)\times(-1)|=\dfrac{1}{2}$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2^2+(-3)^2=13$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=(-1)^2+2^2=5$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\times(-1)+(-3)\times 2=-8$$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{13\times 5-(-8)^2}=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2+\sqrt{3}-1,\ 1+\sqrt{3}-2)=(1+\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2-1,\ 2+\sqrt{3}-2)=(1,\ \sqrt{3})$

であるから　　$S=\dfrac{1}{2}|(1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}-(-1+\sqrt{3})\times 1|$

$$=\dfrac{1}{2}|\sqrt{3}+3+1-\sqrt{3}|=2$$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1+\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ \sqrt{3})$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(1+\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})^2=8$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1+\sqrt{3})\times 1+(-1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}=4$$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{8\times 4-4^2}=2$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{3}-(1+\sqrt{3}),\ 5-2)=(-1,\ 3)$，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=((4+\sqrt{3})-(1+\sqrt{3}),\ 1-2)=(3,\ -1)$

であるから　　$S=\dfrac{1}{2}|(-1)\times(-1)-3\times 3|=\dfrac{1}{2}|1-9|=4$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ -1)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-1)^2+3^2=10$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=3^2+(-1)^2=10$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-1\times 3+3\times(-1)=-6$$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{10\times 10-(-6)^2}=4$

参考　S は，それぞれ次のようにして求めることもできる。

(1)　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{-8}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{8}{\sqrt{65}}$

$0°<\angle\mathrm{AOB}<180°$ であるから　　$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{8}{\sqrt{65}}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{65}}=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times 2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°<\angle\mathrm{BAC}<180°$ であるから　　$\angle\mathrm{BAC}=45°$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin 45°=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2$

(3)　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{3}{5}$

$0°<\angle\mathrm{BAC}<180°$ であるから　　$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\dfrac{4}{5}=4$

51 3 点 $(1,\ x)$，$(x,\ 0)$，$(-1,\ 6)$ が一直線上にあるように，x の値を定めよ。

解答　$x=2,\ 3$

解説

A$(1,\ x)$，B$(x,\ 0)$，C$(-1,\ 6)$ とする。

3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 k がある。

ここで　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x-1,\ -x)$

　　　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 6-x)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から　　$(x-1,\ -x)=k(-2,\ 6-x)$

よって　　$x-1=-2k$　　…… ①

　　　　$-x=k(6-x)$　　…… ②

① から　　$k=-\dfrac{x-1}{2}$

これを ② に代入して整理すると　　$x^2-5x+6=0$

すなわち　　$(x-2)(x-3)=0$

よって　　$x=2,\ 3$