平面と直線の交点クイズ

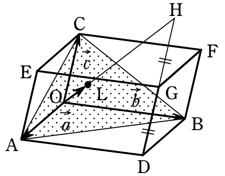
1 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に DG＝GH となるように点 H をとり，直線 OH と平面 ABC の交点を L とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OL}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

解説

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$

$=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$



L は直線 OH 上にあるから

$\overrightarrow{OL}=k\overrightarrow{OH}$

となる実数 k がある。

よって

$\overrightarrow{OL}=k(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+2k\vec{c}$　…… ①

また，L は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CL}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。ゆえに

$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CL}=\vec{c}+\{s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})\}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$　…… ②

①，② から　$k\vec{a}+k\vec{b}+2k\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$k=s$，　$k=t$，　$2k=1-s-t$

よって　$2k=1-k-k$　　ゆえに　$k=\frac{1}{4}$

したがって　$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

2 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に DG＝GH となるように点 H をとり，直線 OH と平面 AFC の交点を M とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

解説

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

M は直線 OH 上にあるから，$\overrightarrow{OM}=h\overrightarrow{OH}$ となる実数 h がある。

よって　$\overrightarrow{OM}=h(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=h\vec{a}+h\vec{b}+2h\vec{c}$　…… ①

また，M は平面 AFC 上にあるから，$\overrightarrow{CM}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CF}$ となる実数 s，t がある。

ゆえに　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t\vec{b}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s)\vec{c}$　…… ②

①，② から　$h\vec{a}+h\vec{b}+2h\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s)\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$h=s$，$h=t$，$2h=1-s$

よって　$2h=1-h$　　ゆえに　$h=\frac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

3 四面体 OABC の辺 OA，AB，OC の中点を，それぞれ D，E，F とし，△DEF の重心を G，直線 OG と平面 ABC の交点を H とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

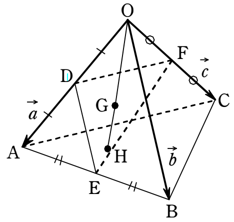
また，OG : GH を求めよ。

解答　$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$，OG : GH＝2 : 1

解説

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}=\dfrac{\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}}{2}}{3}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$



H は直線 OG 上にあるから

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$

となる実数 k がある。

よって

$\overrightarrow{OH}=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{k}{6}\vec{c}$　…… ①

また，H は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CH}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。

ゆえに

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\vec{c}+\{s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})\}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$　…… ②

①，② から　$\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{k}{6}\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$\frac{k}{3}=s$，$\frac{k}{6}=t$，$\frac{k}{6}=1-s-t$

よって　$\frac{k}{6}=1-\frac{k}{3}-\frac{k}{6}$　　ゆえに　$k=\frac{3}{2}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ となるから　OG : GH＝2 : 1

別解　H は平面 ABC 上にあるから，① より

$\frac{k}{3}+\frac{k}{6}+\frac{k}{6}=1$　　ゆえに　$k=\frac{3}{2}$　（以下同じ）

4 四面体 OABC の辺 OB，OC を，それぞれ 3 : 1，1 : 1 に内分する点を P，Q とする。△APQ の重心を G とし，直線 OG と平面 ABC の交点を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。[30 点]

解答　点 P は辺 OB を 3 : 1 に内分するから　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}\vec{b}$

点 Q は辺 OC を 1 : 1 に内分するから　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

G は △APQ の重心であるから

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{3}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

H は直線 OG 上にあるから $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$　…… ①

また，H は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CH}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\vec{c}+\{s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})\}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$　…… ②

①，② から　$\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから　$\frac{1}{3}k=s$，$\frac{1}{4}k=t$，$\frac{1}{6}k=1-s-t$

よって　$\frac{1}{6}k=1-\frac{1}{3}k-\frac{1}{4}k$　　ゆえに　$k=\frac{4}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

解説

点 P は辺 OB を 3 : 1 に内分するから　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}\vec{b}$

点 Q は辺 OC を 1 : 1 に内分するから　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

G は △APQ の重心であるから

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{3}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

H は直線 OG 上にあるから $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$　…… ①

また，H は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CH}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\vec{c}+\{s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})\}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$　…… ②

①，② から　$\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから　$\frac{1}{3}k=s$，$\frac{1}{4}k=t$，$\frac{1}{6}k=1-s-t$

よって　$\frac{1}{6}k=1-\frac{1}{3}k-\frac{1}{4}k$　　ゆえに　$k=\frac{4}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

5 四面体 OABC がある。△ABC の重心を D，線分 OD の中点を P，直線 AP と平面 OBC の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。また，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ となる実数 k を求め，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。[25 点]

解答　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$

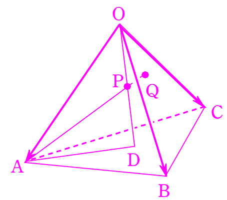
$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{6}(-5\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}=-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ …… ①

また　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\frac{k}{6}(-5\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$　…… ②



①，②から　$-\frac{5}{6}k=-1$，$\frac{1}{6}k=s$，$\frac{1}{6}k=t$

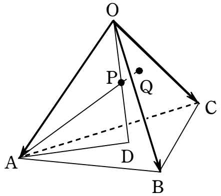
よって　$k=\frac{6}{5}$，$s=t=\frac{1}{5}$　　ゆえに　$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{5}(-5\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

解説

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{6}(-5\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$



$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}=-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ …… ①

また　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\frac{k}{6}(-5\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$　…… ②

①，②から　$-\frac{5}{6}k=-1$，$\frac{1}{6}k=s$，$\frac{1}{6}k=t$

よって　$k=\frac{6}{5}$，$s=t=\frac{1}{5}$　　ゆえに　$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{5}(-5\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

6 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をM，辺BCを1：2に内分する点をQ，線分MQの中点をRとし，直線ORと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

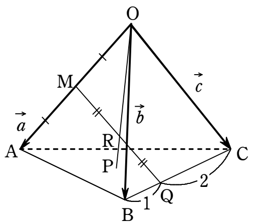
解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

解説

Pは直線OR上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k がある。よって

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}=k\left(\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OQ}$　…… ①



ここで

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$，

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

であるから，①に代入して

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$　…… ②

また，Pは平面ABC上にあるから $\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$

$=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$　…… ③

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから，$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りである。

②，③から　$\frac{1}{4}k=s$，$\frac{1}{3}k=t$，$\frac{1}{6}k=1-s-t$

これを解くと，$k=\frac{4}{3}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

別解　$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

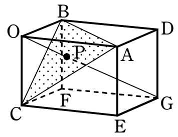
Pは直線OR上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k がある。

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$

Pは平面ABC上にあるから　$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$

これを解くと，$k=\frac{4}{3}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

7 右の図のような直方体において，対角線OGと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Pは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$　…… ①

また，Pは平面ABC上にあるから，$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$　…… ②

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから，$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りである。

①，②から　$k=s$，$k=t$，$k=1-s-t$

これを解くと，$k=\frac{1}{3}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

8 平行六面体ABCD−EFGHの辺CGを4：1に外分する点をI，辺ABの中点をJ，AEを3：1に外分する点をKとする。また，直線AIと平面BDE，平面DJKの交点をそれぞれP，Qとする。$\overrightarrow{AI}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}$，

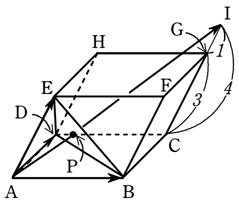
$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{35}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{35}\overrightarrow{AD}+\frac{12}{35}\overrightarrow{AE}$

解説

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$

3点A，P，Iは一直線上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AI}$ と表され

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}k\overrightarrow{AE}$　…… ①



点Pは平面BDE上にあるから

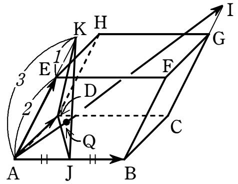
$k+k+\frac{4}{3}k=1$

よって　$k=\frac{3}{10}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}$

また，3点A，Q，Iは一直線上にあるから，実数 l を用いて $\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AI}$ と表され

$\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}l\overrightarrow{AE}$



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AJ}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ であるから

$\overrightarrow{AQ}=2l\overrightarrow{AJ}+l\overrightarrow{AD}+\frac{8}{9}l\overrightarrow{AK}$

点Qは平面DJK上にあるから　$2l+l+\frac{8}{9}l=1$

よって　$l=\frac{9}{35}$　　ゆえに　$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{35}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{35}\overrightarrow{AD}+\frac{12}{35}\overrightarrow{AE}$

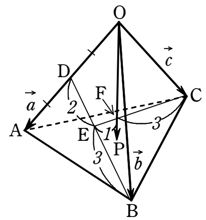
9 四面体OABCの辺OAの中点をD，線分BDを3：2に内分する点をE，線分CEを3：1に内分する点をF，辺OCを1：2に内分する点をGとする。直線OFと平面ABC，平面DBGの交点をそれぞれP，Qとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{9}{31}\vec{a}+\frac{12}{31}\vec{b}+\frac{10}{31}\vec{c}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{20}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

解説

点Eは線分BDを3：2に内分するから

$\overrightarrow{OE}=\frac{2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OD}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$



点Fは線分CEを3：1に内分するから

$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OE}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$

$=\frac{9}{40}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

点Pは直線OF上にあるから，実数 k を用いて

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}=\frac{9}{40}k\vec{a}+\frac{3}{10}k\vec{b}+\frac{1}{4}k\vec{c}$

と表される。点Pは平面ABC上にあるから

$\frac{9}{40}k+\frac{3}{10}k+\frac{1}{4}k=1$　　よって　$k=\frac{40}{31}$

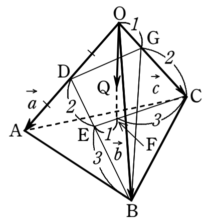
ゆえに　$\overrightarrow{OP}=\frac{9}{31}\vec{a}+\frac{12}{31}\vec{b}+\frac{10}{31}\vec{c}$

また，点Qは直線OF上にあるから，実数 l を用いて

$\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{OF}=\frac{9}{40}l\vec{a}+\frac{3}{10}l\vec{b}+\frac{1}{4}l\vec{c}$

と表される。$\vec{a}=2\overrightarrow{OD}$，$\vec{c}=3\overrightarrow{OG}$ であるから

$\overrightarrow{OQ}=\frac{9}{20}l\overrightarrow{OD}+\frac{3}{10}l\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}l\overrightarrow{OG}$



点Qは平面DBG上にあるから

$\frac{9}{20}l+\frac{3}{10}l+\frac{3}{4}l=1$　　よって　$l=\frac{2}{3}$

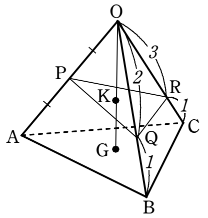
ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{20}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

10 四面体OABCを考える。辺OAの中点をPとする。また辺OBを2：1に内分する点をQとして，辺OCを3：1に内分する点をRとする。更に三角形ABCの重心をGとする。

3点P，Q，Rを通る平面と直線OGの交点をKとするとき，$\overrightarrow{OK}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{OK}=\frac{6}{29}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{29}\overrightarrow{OB}+\frac{6}{29}\overrightarrow{OC}$

解説



点Kは3点P，Q，Rを通る平面上にあるから，実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{OK}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}+u\overrightarrow{OR},\quad s+t+u=1$$

と表される。

ここで，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ であるから

$$\overrightarrow{OK}=\frac{s}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}u\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots①$$

また，点Kは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}$ (kは実数) と表される。

よって $\overrightarrow{OK}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)$

$$=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots②$$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから，①，② より

$$\frac{s}{2}=\frac{k}{3},\quad \frac{2}{3}t=\frac{k}{3},\quad \frac{3}{4}u=\frac{k}{3}$$

ゆえに $s=\frac{2}{3}k$，$t=\frac{k}{2}$，$u=\frac{4}{9}k$

これらを $s+t+u=1$ に代入して $\frac{2}{3}k+\frac{k}{2}+\frac{4}{9}k=1$

よって $k=\frac{18}{29}$

これを ② に代入して $\overrightarrow{OK}=\frac{6}{29}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{29}\overrightarrow{OB}+\frac{6}{29}\overrightarrow{OC}$

別解 点Kは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}$ (kは実数) と表される。

よって $\overrightarrow{OK}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)$

$$=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots(※)$$

ここで，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ であるから

$$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OQ},\quad \overrightarrow{OC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OR}$$

ゆえに $\overrightarrow{OK}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{OP}+\frac{k}{2}\overrightarrow{OQ}+\frac{4}{9}k\overrightarrow{OR}$

点Kは3点P，Q，Rを通る平面上にあるから $\frac{2}{3}k+\frac{k}{2}+\frac{4}{9}k=1$

よって $k=\frac{18}{29}$

ゆえに，(※) から $\overrightarrow{OK}=\frac{6}{29}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{29}\overrightarrow{OB}+\frac{6}{29}\overrightarrow{OC}$

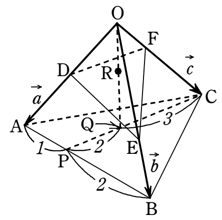
11 四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする。

(1) 線分ABを1：2に内分する点をPとし，線分PCを2：3に内分する点をQとする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) D，E，Fはそれぞれ線分OA，OB，OC上の点で，$\mathrm{OD}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}$，$\mathrm{OE}=\frac{2}{3}\mathrm{OB}$，$\mathrm{OF}=\frac{1}{3}\mathrm{OC}$ とする。3点D，E，Fを含む平面と直線OQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答 (1) $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$ (2) $\overrightarrow{OR}=\frac{4}{23}\vec{a}+\frac{2}{23}\vec{b}+\frac{4}{23}\vec{c}$

解説



(1) $\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OC}}{2+3}=\frac{3}{5}\left(\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}\right)+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$$=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

(2) 点Rは3点D，E，Fを含む平面上にあるから，実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF},\quad s+t+u=1$$

と表される。

ここで，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\frac{s}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}+\frac{u}{3}\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

また，点Rは直線OQ上にあるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ (kは実数) と表される。

よって，(1) から $\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{k}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}\quad\cdots\cdots②$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから，①，② より

$$\frac{s}{2}=\frac{2}{5}k,\quad \frac{2}{3}t=\frac{k}{5},\quad \frac{u}{3}=\frac{2}{5}k$$

ゆえに $s=\frac{4}{5}k$，$t=\frac{3}{10}k$，$u=\frac{6}{5}k$

これらを $s+t+u=1$ に代入して $\frac{4}{5}k+\frac{3}{10}k+\frac{6}{5}k=1$

よって $k=\frac{10}{23}$

これを ② に代入して $\overrightarrow{OR}=\frac{4}{23}\vec{a}+\frac{2}{23}\vec{b}+\frac{4}{23}\vec{c}$

別解 点Rは直線OQ上にあるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ (kは実数) と表される。

ゆえに，(1) から $\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{k}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}\quad\cdots\cdots(※)$

ここで，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$$\vec{a}=2\overrightarrow{OD},\quad \vec{b}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OE},\quad \vec{c}=3\overrightarrow{OF}$$

よって $\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k(2\overrightarrow{OD})+\frac{k}{5}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OE}\right)+\frac{2}{5}k(3\overrightarrow{OF})$

$$=\frac{4}{5}k\overrightarrow{OD}+\frac{3}{10}k\overrightarrow{OE}+\frac{6}{5}k\overrightarrow{OF}$$

点Rは3点D，E，Fを含む平面上にあるから $\frac{4}{5}k+\frac{3}{10}k+\frac{6}{5}k=1$

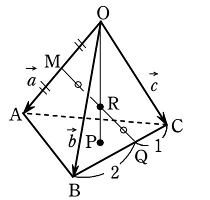
ゆえに $k=\frac{10}{23}$

これを (※) に代入して $\overrightarrow{OR}=\frac{4}{23}\vec{a}+\frac{2}{23}\vec{b}+\frac{4}{23}\vec{c}$

12 四面体OABCの辺OAの中点をM，辺BCを2：1に内分する点をQ，線分MQの中点をRとし，直線ORと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

解説



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$　$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}\right)$

$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

Pは直線OR上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k がある。

よって $\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$

また，Pは平面ABC上にあるから，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t がある。

ゆえに $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$

$$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から $\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから $\frac{1}{4}k=1-s-t$，$\frac{1}{6}k=s$，$\frac{1}{3}k=t$

よって $\frac{1}{4}k=1-\frac{1}{6}k-\frac{1}{3}k$　ゆえに $k=\frac{4}{3}$

したがって，① から $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

別解 (① までは同じ)

Pは平面ABC上にあるから，① より $\frac{1}{4}k+\frac{1}{6}k+\frac{1}{3}k=1$

ゆえに $k=\frac{4}{3}$

したがって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

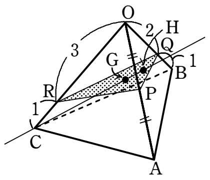
13 四面体OABCの辺OA，OB，OCを，それぞれ1：1，2：1，3：1に内分する点を，順にP，Q，Rとする。点Cと△PQRの重心Gを通る直線が平面OABと交わる点をHとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{OH}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{8}{27}\vec{b}$

解説

$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\vec{c}$



よって

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

H は直線 CG 上にあるから，$\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CG}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OC}+k(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC})$

$$=\vec{c}+k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}-\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{6}k\vec{a}+\frac{2}{9}k\vec{b}+\left(1-\frac{3}{4}k\right)\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

また，H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$　……②

①，② から　$\frac{1}{6}k\vec{a}+\frac{2}{9}k\vec{b}+\left(1-\frac{3}{4}k\right)\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから　$\frac{1}{6}k=s$，$\frac{2}{9}k=t$，$1-\frac{3}{4}k=0$

これを解いて　$k=\frac{4}{3}$，$s=\frac{2}{9}$，$t=\frac{8}{27}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{8}{27}\vec{b}$

別解　(① までは同じ)

H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ だけで表される。

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，① より　$1-\frac{3}{4}k=0$

ゆえに　$k=\frac{4}{3}$

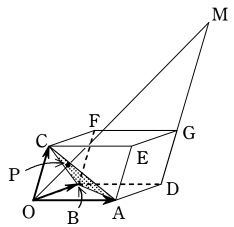
これを ① に代入して　$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{8}{27}\vec{b}$

14 平行六面体 OADB−CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM＝2DG となるように点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

解説

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$$



P は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

また，P は平面 ABC 上にあるから

$$k+k+3k=1$$

ゆえに　$k=\frac{1}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

15 四面体 OABC の辺 OA を 1：2 に内分する点を D，辺 BC を 3：2 に内分する点を E，線分 DE の中点を M とし，直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

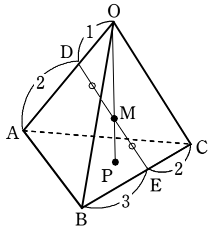
(1)　$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{9}{20}\vec{c}$

解説

(1)　$\overrightarrow{OD}=\frac{\vec{a}}{3}$



$$\overrightarrow{OE}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}$$

(2)　点 P は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}$

(k は実数) とおけて

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}\right)=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 P は平面 ABC 上にあるから，s，t を実数として，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表される。

これを変形すると　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

すなわち　$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$　……②

①，② から　$\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}k\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$$\frac{k}{6}=1-s-t,\quad \frac{k}{5}=s,\quad \frac{3}{10}k=t$$

よって　$\frac{k}{6}=1-\frac{k}{5}-\frac{3}{10}k$　　　ゆえに　$k=\frac{3}{2}$

これを ① に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{9}{20}\vec{c}$

別解　(① までは同じ)

点 P は平面 ABC 上にあるから，① より　$\frac{k}{6}+\frac{k}{5}+\frac{3}{10}k=1$

よって　$k=\frac{3}{2}$

これを ① に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{9}{20}\vec{c}$

16 四面体 ABCD の辺 BC の中点を P，線分 PD の中点を Q，線分 AQ の中点を R とする。また，直線 BR と平面 ACD の交点を S とする。$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき

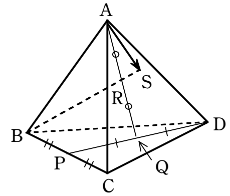
(1)　$\overrightarrow{AS}$ を $\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。

(2)　直線 AS と CD の交点を T とするとき，CT：TD を求めよ。

解答　(1)　$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{7}\vec{c}+\frac{2}{7}\vec{d}$　　(2)　2：1

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ とおくと



$$\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$
$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{d}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}$$
$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}$$

点 S は直線 BR 上にあるから

$$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}\quad\cdots\cdots①$$

(k は実数) とおける。

① から　$\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})$

よって　$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})=\vec{b}+k\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}-\vec{b}\right)$

$$=\left(1-\frac{7}{8}k\right)\vec{b}+\frac{k}{8}\vec{c}+\frac{k}{4}\vec{d}\quad\cdots\cdots②$$

また，点 S は平面 ACD 上にあるから，s，t を実数として

$$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}\quad\cdots\cdots③$$

と表される。

②，③ から　$\left(1-\frac{7}{8}k\right)\vec{b}+\frac{k}{8}\vec{c}+\frac{k}{4}\vec{d}=s\vec{c}+t\vec{d}$

4 点 A，B，C，D は同じ平面上にないから　$1-\frac{7}{8}k=0$，$\frac{k}{8}=s$，$\frac{k}{4}=t$

よって　$k=\frac{8}{7}$，$s=\frac{1}{7}$，$t=\frac{2}{7}$

したがって　$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{7}\vec{c}+\frac{2}{7}\vec{d}$

(2)　点 T は直線 AS 上にあるから

$$\overrightarrow{AT}=l\overrightarrow{AS}\quad(l\text{ は実数})$$

とおける。

(1) から　$\overrightarrow{AT}=l\left(\frac{1}{7}\vec{c}+\frac{2}{7}\vec{d}\right)=\frac{l}{7}\vec{c}+\frac{2}{7}l\vec{d}$

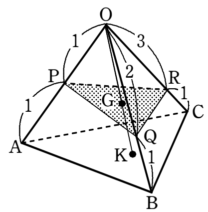
T は直線 CD 上にあるから　$\frac{l}{7}+\frac{2}{7}l=1$　　　ゆえに　$l=\frac{7}{3}$

よって　$\overrightarrow{AT}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}=\frac{\vec{c}+2\vec{d}}{2+1}$

すなわち，T は辺 CD を 2：1 に内分する。

したがって　CT：TD＝2：1

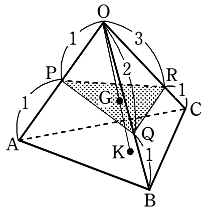
17 四面体 OABC の辺 OA，OB，OC をそれぞれ 1：1，2：1，3：1 に内分する点を P，Q，R とする。点 O と △PQR の重心 G を通る直線が平面 ABC と交わる点を K とするとき，$\overrightarrow{OK}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ を用いて表せ。



解答　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{6}{23}\vec{a}+\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}$

解説

点 K は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となる実数 k がある。



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)$

$$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{2k}{9}\vec{b}+\frac{k}{4}\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 K は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t がある。
ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　$\dfrac{k}{6}\vec{a}+\dfrac{2k}{9}\vec{b}+\dfrac{k}{4}\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから　$\dfrac{k}{6}=1-s-t$，　$\dfrac{2k}{9}=s$，　$\dfrac{k}{4}=t$

よって　$\dfrac{k}{6}=1-\dfrac{2k}{9}-\dfrac{k}{4}$　　ゆえに　$k=\dfrac{36}{23}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{6}{23}\vec{a}+\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}$

別解　点 K は平面 ABC 上にあるから　$\dfrac{k}{6}+\dfrac{2k}{9}+\dfrac{k}{4}=1$

よって　$k=\dfrac{36}{23}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{6}{23}\vec{a}+\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}$