# 位置ベクトルクイズ

1 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　2：1 に内分する点　　(2)　1：2 に内分する点

(3)　2：1 に外分する点　　(4)　1：2 に外分する点

解答　(1)　$\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$　(2)　$\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$　(3)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　(4)　$2\vec{a}-\vec{b}$

解説

(1)～(4) の点の位置ベクトルを順に $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とする。

(1)　$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

(3)　$\vec{r}=\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=-\vec{a}+2\vec{b}$

(4)　$\vec{s}=\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$

2 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　3：2 に内分する点　　(2)　1：3 に外分する点

解答　(1)　$\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$　(2)　$\dfrac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}$

解説

(1)，(2) の点の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ とする。

(1)　$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{-3\vec{a}+\vec{b}}{1-3}=\dfrac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}$

3 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　3：2 に内分する点　　(2)　1：2 に外分する点　　(3)　中点

解答　(1)　$\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$　(2)　$2\vec{a}-\vec{b}$　(3)　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

解説

(1)　$\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$　(2)　$\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$　(3)　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

4 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 BC を 3：2 に外分する点を Q，辺 CA を 1：3 に外分する点を R とし，△PQR の重心を G とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1)　点 P，Q，R の位置ベクトル　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

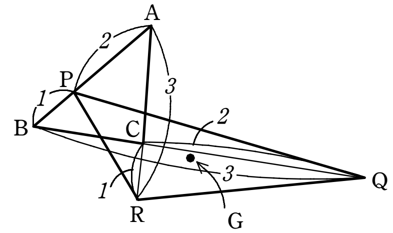
(3)　点 G の位置ベクトル

解答　(1)　順に $\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$-2\vec{b}+3\vec{c}$，$-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$　(2)　$-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{8}{3}\vec{b}+3\vec{c}$

(3)　$-\dfrac{1}{18}\vec{a}-\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

解説

P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$，R$(\vec{r})$，G$(\vec{g})$ とする。




(1)　$\vec{p}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\vec{q}=\dfrac{-2\vec{b}+3\vec{c}}{3-2}=-2\vec{b}+3\vec{c}$

$\vec{r}=\dfrac{3\vec{c}-1\cdot\vec{a}}{-1+3}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{q}-\vec{p}$

$=(-2\vec{b}+3\vec{c})-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{8}{3}\vec{b}+3\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+(-2\vec{b}+3\vec{c})+\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{c}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}-2\right)\vec{b}+\dfrac{1}{3}\left(3+\dfrac{3}{2}\right)\vec{c}$

$=-\dfrac{1}{18}\vec{a}-\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

5 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

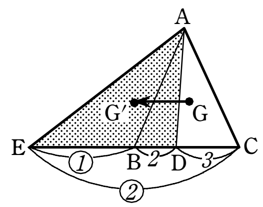
(1)　点 D，E，G′ の位置ベクトル　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GG'}}$

解答　(1)　順に $\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$，$2\vec{b}-\vec{c}$，$\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}$

(2)　$\dfrac{8}{15}\vec{b}-\dfrac{8}{15}\vec{c}$

解説

D$(\vec{d})$，E$(\vec{e})$，G$(\vec{g})$，G′$(\vec{g'})$ とする。




(1)　$\vec{d}=\dfrac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}=\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

$\vec{e}=\dfrac{2\vec{b}-\vec{c}}{-1+2}=2\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{g'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{e}+\vec{d}}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{\vec{a}+(2\vec{b}-\vec{c})+\left(\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}$

(2)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{GG'}}=\vec{g'}-\vec{g}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{8}{15}\vec{b}-\dfrac{8}{15}\vec{c}$

6 (1)　AB＝8，BC＝7，CA＝5 である △ABC において，内心を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

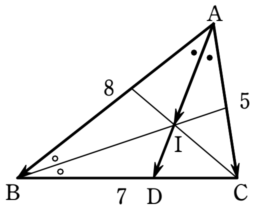
(2)　△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

（ア）　∠O を 2 等分するベクトルは $k\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ($k$ は実数，$k\neq 0$) と表されることを示せ。

（イ）　OA＝2，OB＝3，AB＝4 のとき，∠O の二等分線と ∠A の外角の二等分線の交点を P とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(2)　（ア）　略　（イ）　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\vec{a}+2\vec{b}$

解説




(1)　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると　　BD：DC＝AB：AC＝8：5

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+8\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{13}$

また，BD$=7\cdot\dfrac{8}{13}=\dfrac{56}{13}$ であるから

AI：ID＝BA：BD$=8:\dfrac{56}{13}=13:7$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{13}{20}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{13}{20}\cdot\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+8\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{13}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　（ア）　∠O の二等分線と辺 AB の交点を D とすると

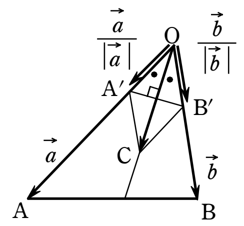
AD：DB＝OA：OB$=|\vec{a}|:|\vec{b}|$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{|\vec{b}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\vec{a}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

求めるベクトルは，$t$ を $t\neq 0$ である実数として $t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表される。

$\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}t=k$ とおくと，求めるベクトルは

$k\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ($k$ は実数，$k\neq 0$)




別解　$\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とすると

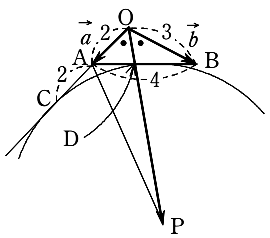
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，四角形 OA′CB′ はひし形であるから，点 C は ∠O の二等分線上にある。

よって，求めるベクトルは，$k$ を $k\neq 0$ である実数として

$k\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}})=k\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$　と表される。

(イ)　点Pは△OABにおいて ∠O の二等分線上にあるから，(ア)より




$$\overrightarrow{OP}=s\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{3}\right)\ (s\text{ は実数})$$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}$ となる点Cをとると，点Pは△ABCにおいて ∠BAC の二等分線上にあるから

$$\overrightarrow{AP}=t\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\ (t\text{ は実数})$$

よって　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+t\left(\frac{\vec{b}-\vec{a}}{4}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\left(1+\frac{t}{4}\right)\vec{a}+\frac{t}{4}\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\frac{s}{2}=1+\frac{t}{4}$，$\frac{s}{3}=\frac{t}{4}$

これを解いて　$s=6$，$t=8$　　ゆえに　$\overrightarrow{OP}=3\vec{a}+2\vec{b}$

別解　ABとOPの交点をDとすると　AD：DB＝2：3

APは△OAD の ∠A の外角の二等分線であるから

$$OP:PD=AO:AD=2:\left(4\times\frac{2}{5}\right)=5:4$$

よって　$\overrightarrow{OP}=5\overrightarrow{OD}=5\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=3\vec{a}+2\vec{b}$

7 (1)　△ABCの3辺を AB＝4，BC＝5，CA＝6 とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，△ABCの内接円の中心(内心)をPとするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　鋭角三角形OABで，Bから辺OAへ下ろした垂線をBH，∠AOBの二等分線と線分BHとの交点をFとする。$\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{4}{15}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{OF}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b})}$

解説

(1)　直線APと辺BCの交点をDとすると，ADは∠Aの二等分線であるから

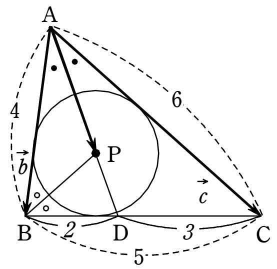
BD：DC＝AB：AC＝4：6＝2：3

BC＝5 であるから　　BD＝2

BPは∠Bの二等分線であるから

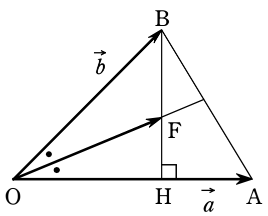
AP：PD＝BA：BD＝4：2＝2：1

よって　$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{4}{15}\vec{c}$




(2)　点Fは∠AOBの二等分線上の点であるから

$\overrightarrow{OF}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\ (k\neq0)$　と表される。




BF⊥OA であるから　$\overrightarrow{BF}\cdot\vec{a}=0$　……①

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)-\vec{b}$ であるから，

① より　$k\left(\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

両辺に $|\vec{b}|$ を掛けて整理すると　$k(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$|\vec{a}|>0$，$|\vec{b}|>0$ であり，∠AOBが鋭角であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$

ゆえに，$|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ であるから　$k=\frac{|\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}$

よって　$\overrightarrow{OF}=\frac{|\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b})}$

別解　$\overrightarrow{OH}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ であるから

$$HF:FB=|\overrightarrow{OH}|:|\overrightarrow{OB}|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right|:|\vec{b}|$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}:|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}:|\vec{a}||\vec{b}|$$

よって　$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}||\vec{b}|}\left\{|\vec{a}||\vec{b}|\times\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}\right\}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b})}$

8　3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする△ABCにおいて，辺ABを3：2に内分する点をP，辺BCを3：4に外分する点をQ，辺CAを4：1に外分する点をRとし，△PQRの重心をGとする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1)　点P，Q，Rの位置ベクトル　　(2)　$\overrightarrow{PQ}$

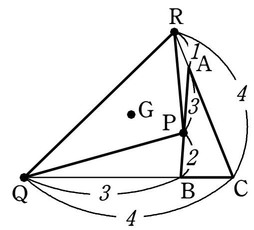
(3)　点Gの位置ベクトル

解答　(1)　順に　$\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$，$4\vec{b}-3\vec{c}$，$\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$　　(2)　$-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{17}{5}\vec{b}-3\vec{c}$

(3)　$\frac{26}{45}\vec{a}+\frac{23}{15}\vec{b}-\frac{10}{9}\vec{c}$

解説

$P(\vec{p})$，$Q(\vec{q})$，$R(\vec{r})$，$G(\vec{g})$ とする。




(1)　$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

$\vec{q}=\frac{4\vec{b}-3\vec{c}}{-3+4}=4\vec{b}-3\vec{c}$

$\vec{r}=\frac{-\vec{c}+4\vec{a}}{4-1}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\vec{q}-\vec{p}$

$=(4\vec{b}-3\vec{c})-\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{17}{5}\vec{b}-3\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)+(4\vec{b}-3\vec{c})+\left(\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}\right)\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}+4\right)\vec{b}+\frac{1}{3}\left(-3-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$

$=\frac{26}{45}\vec{a}+\frac{23}{15}\vec{b}-\frac{10}{9}\vec{c}$

9　平面上の三角形ABCの3辺を AB＝8，BC＝7，CA＝9 とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，三角形ABCの内接円の中心(内心)をPとするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

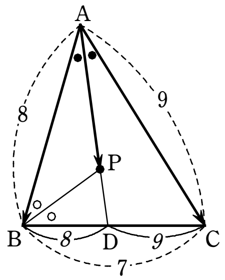
解答　$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとすると

BD：DC＝AB：AC

＝8：9




BC＝7 であるから　$BD=7\times\frac{8}{17}=\frac{56}{17}$

BPは∠Bの二等分線であるから

AP：PD＝BA：BD

$=8:\frac{56}{17}=17:7$

よって　$\overrightarrow{AP}=\frac{17}{24}\overrightarrow{AD}=\frac{17}{24}\cdot\frac{9\vec{b}+8\vec{c}}{8+9}=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

10　3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとし，辺BCを3等分する点をBに近い方からD，Eとする。また，△ABCの重心をGとするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　点M，N，D，E，Gの位置ベクトル

(2)　$\overrightarrow{CM}$　　(3)　$\overrightarrow{AD}$　　(4)　$\overrightarrow{DN}$　　(5)　$\overrightarrow{GM}$

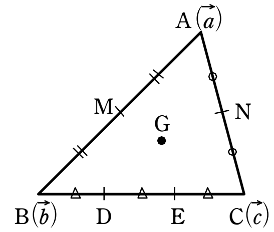
解答　(1)　順に　$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$，$\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$，$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$　　(3)　$-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　(4)　$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

(5)　$\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

M，N，D，E，Gの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{g}$ とする。




(1)　点Mは辺ABの中点であるから

$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

点Nは辺ACの中点であるから

$\vec{n}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

点Dは辺BCを1：2に内分する点であるから

$\vec{d}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{1+2}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

点Eは辺BCを2：1に内分する点であるから

$\vec{e}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

点Gは△ABCの重心であるから

$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{CM}=\vec{m}-\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{AD}=\vec{d}-\vec{a}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\vec{a}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(4)　$\overrightarrow{DN}=\vec{n}-\vec{d}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

(5)　$\overrightarrow{GM}=\vec{m}-\vec{g}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$

**11** △ABCにおいて，辺BCを3：2に内分する点をD，辺BCを2：5に外分する点をE，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{GE}$　(5) $\overrightarrow{DG}$

**解答** (1) $\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$　(2) $\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$　(3) $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　(4) $\frac{4}{3}\vec{b}-\vec{c}$

(5) $-\frac{1}{15}\vec{b}-\frac{4}{15}\vec{c}$

**解説**

(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\frac{-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-5}=\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$

(3) 辺BCの中点をMとすると　$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=\left(\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{4}{3}\vec{b}-\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)=-\frac{1}{15}\vec{b}-\frac{4}{15}\vec{c}$

**12** ∠A＝60°，AB＝8，AC＝5である△ABCの内心をIとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

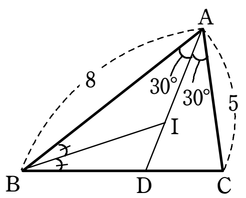
**解答** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

**解説**

∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとすると

BD：DC＝AB：AC＝8：5

よって　$\overrightarrow{AD}=\frac{5\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}}{8+5}=\frac{5\vec{b}+8\vec{c}}{13}$




また，△ABCにおいて，余弦定理により

$BC^2=8^2+5^2-2\times8\times5\cos60°=49$

ゆえに　BC＝7

よって　$BD=\frac{8}{8+5}BC=\frac{8\cdot7}{13}$

BIは∠Bの二等分線であるから　$AI:ID=BA:BD=8:\frac{8\cdot7}{13}=13:7$

ゆえに　$\overrightarrow{AI}=\frac{13}{13+7}\overrightarrow{AD}=\frac{13}{20}\times\frac{5\vec{b}+8\vec{c}}{13}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

**13** 2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$を結ぶ線分ABに対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ。

(1) 1：2に内分する点　(2) 5：3に内分する点　(3) 中点

(4) 1：4に外分する点　(5) 6：5に外分する点

**解答** (1) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　(2) $\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$　(3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　(4) $\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

(5) $-5\vec{a}+6\vec{b}$

**解説**

(1) $\frac{2\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2) $\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$

(3) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

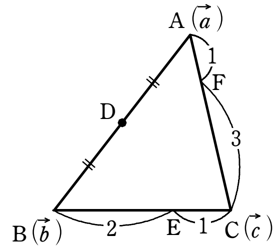
(4) $\frac{-4\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1-4}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

(5) $\frac{-5\vec{a}+6\vec{b}}{6-5}=-5\vec{a}+6\vec{b}$

**14** 3点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$を頂点とする△ABCにおいて，辺ABの中点をD，辺BC，CAをそれぞれ2：1，3：1に内分する点を順にE，Fとする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{BE}$　(3) $\overrightarrow{FA}$

(4) $\overrightarrow{CD}$　(5) $\overrightarrow{AE}$　(6) $\overrightarrow{DF}$




**解答** (1) $\vec{c}-\vec{a}$　(2) $-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　(3) $\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$　(4) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

(5) $-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　(6) $\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

**解説**

点D，E，Fの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とすると

$\vec{d}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，$\vec{e}=\frac{1\cdot\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$，$\vec{f}=\frac{1\cdot\vec{c}+3\vec{a}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{a}$

(1) $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{BE}=\vec{e}-\vec{b}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

**別解** $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{FA}=\vec{a}-\vec{f}=\vec{a}-\left(\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{a}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$

**別解** $\overrightarrow{FA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{c})=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{c}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{AE}=\vec{e}-\vec{a}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(6) $\overrightarrow{DF}=\vec{f}-\vec{d}=\left(\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{a}\right)-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

**15** 3点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$を頂点とする△ABCにおいて，辺BC，CA，ABを3：2に内分する点を，それぞれD，E，Fとする。△DEFの重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

**解答** $\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

**解説**

点D，E，Fの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とすると

$\vec{d}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{3+2}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}$，$\vec{e}=\frac{2\vec{c}+3\vec{a}}{3+2}=\frac{2\vec{c}+3\vec{a}}{5}$，$\vec{f}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

したがって

$\vec{g}=\frac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}+\frac{2\vec{c}+3\vec{a}}{5}+\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}\right)=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

**参考** △ABCの辺BC，CA，ABを $m:n$ に内分する点を，それぞれD，E，Fとするとき，△ABCの重心と△DEFの重心は一致する。

**16** △ABCにおいて，辺BCを2：1に内分する点，2：1に外分する点をそれぞれD，Eとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

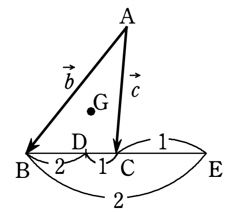
(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{BD}$　(5) $\overrightarrow{GD}$

**解答** (1) $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　(2) $-\vec{b}+2\vec{c}$　(3) $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　(4) $-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\frac{1}{3}\vec{c}$

**解説**

点Aに関する位置ベクトルで考える。




(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\frac{-\vec{b}+2\vec{c}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\vec{0}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

**別解** $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{c}$

**17** AB＝5，BC＝6，CA＝7である△ABCの内心をIとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

**解答** $\overrightarrow{AI}=\frac{7}{18}\vec{b}+\frac{5}{18}\vec{c}$

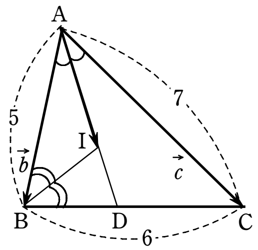
**解説**

直線 AI は ∠A の二等分線であるから，直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=5:7$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5+7}=\dfrac{7}{12}\vec{b}+\dfrac{5}{12}\vec{c}$

また $\mathrm{BD}=\dfrac{5}{5+7}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{12}\times 6=\dfrac{5}{2}$




直線 BI は ∠B の二等分線であるから

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=5:\frac{5}{2}=2:1$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{2}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{12}\vec{b}+\frac{5}{12}\vec{c}\right)=\frac{7}{18}\vec{b}+\frac{5}{18}\vec{c}$$