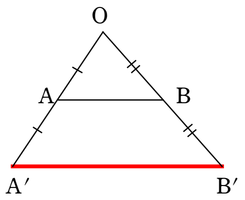
存在範囲クイズ

1 △OABに対して，点Pが

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\ s+t=2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$$

を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

解答　$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は線分A′B′



解説

$s+t=2$ から　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$

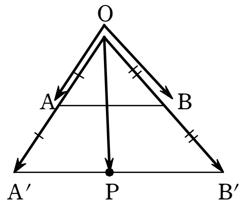
また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\qquad=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

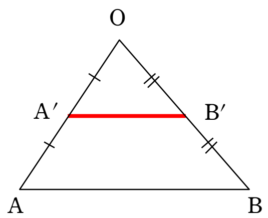
$\overrightarrow{OP}=s'(2\overrightarrow{OA})+t'(2\overrightarrow{OB})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，
点Pの存在範囲は線分A′B′である。



2 △OABに対して，点Pが $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+t=\dfrac{1}{2}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は線分A′B′



解説

$s+t=\dfrac{1}{2}$ から　$2s+2t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

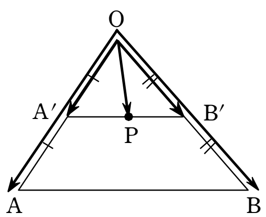
$\qquad=2s\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

ここで，$2s=s'$，$2t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$，

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は線分A′B′である。

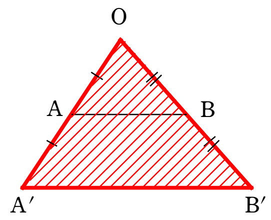


3 △OABに対して，点Pが

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\ 0\leqq s+t\leqq 2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$$

を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

解答　$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部



解説

$0\leqq s+t\leqq 2$ から　$0\leqq \dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

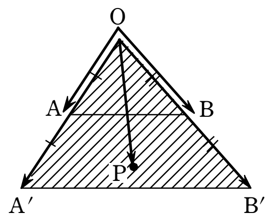
$\qquad=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(2\overrightarrow{OA})+t'(2\overrightarrow{OB})$，

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部である。

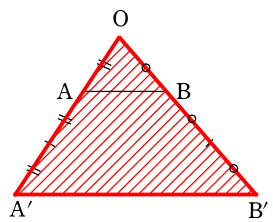


4 △OABに対して，点Pが次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

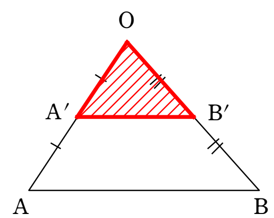
(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s+t\leqq \dfrac{1}{2}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解答　(1)　$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部



(2)　$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部



解説

(1)　$0\leqq s+t\leqq 3$ から　$0\leqq \dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}\leqq 1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

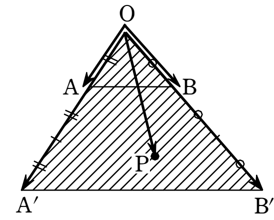
$\qquad=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(3\overrightarrow{OA})+t'(3\overrightarrow{OB})$，

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部である。



(2)　$0\leqq s+t\leqq \dfrac{1}{2}$ から　$0\leqq 2s+2t\leqq 1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

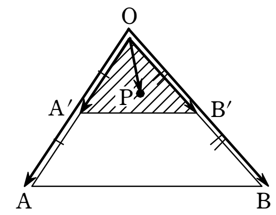
$\qquad=2s\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

ここで，$2s=s'$，$2t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$，

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

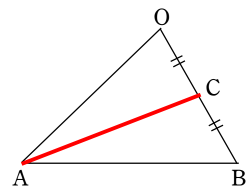
よって，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点A′，B′をとると，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部である。



5 △OABに対して，点Pが次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\ s+2t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$$

解答　線分OBの中点をCとすると線分AC



解説

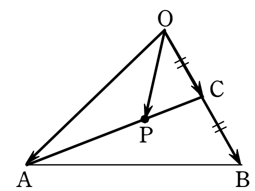
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$2t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$，$s+t'=1$，$s\geqq 0$，$t'\geqq 0$

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ を満たす点Cをとると，Cは線分OBの中点である。

よって，点Pの存在範囲は，線分OBの中点をCとすると線分ACである。

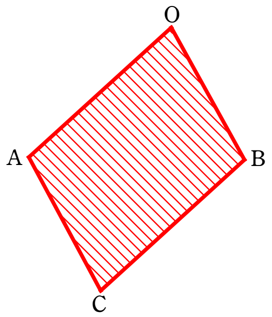


6 △OABに対して，点Pが次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

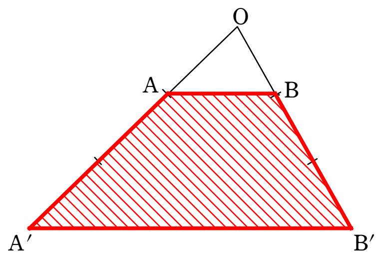
(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解答　(1)　2つの線分 OA，OB を隣り合う2辺とする平行四辺形の周および内部



(2)　$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，台形 AA′B′B の周および内部



解説

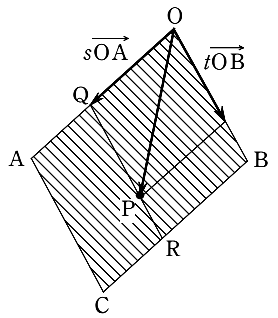
(1)　$0<s\leqq 1$ を満たすある実数 s を固定して，

$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OA}$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OB}$$

この実数 s に対して，t の値が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で変化すると，点 P の存在範囲は OQ，OB を2辺とする平行四辺形 OQRB の辺 QR である。

そして，s の値が $0<s\leqq 1$ の範囲で変化すると，線分 QR 上の点は，OA，OB を2辺とする平行四辺形 OACB の周およびその内部を動く。ただし，辺 OB を除く。



$s=0$ のとき，$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq t\leqq 1$ であるから，点 P の存在範囲は辺 OB である。

したがって，点 P の存在範囲は，2つの線分 OA，OB を隣り合う2辺とする平行四辺形の周および内部である。

(2)　$s+t=k\ (1\leqq k\leqq 3)$ とおくと

$$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$$=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

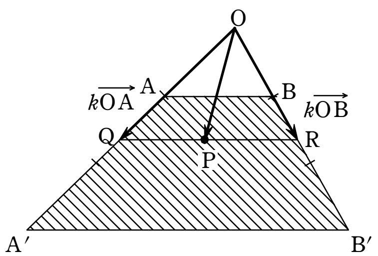
ここで，$\frac{s}{k}=s'$，$\frac{t}{k}=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'(k\overrightarrow{OA})+t'(k\overrightarrow{OB}),\quad s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

よって，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OR}$ を満たす点 Q，R をとると，定数 k に対して，点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 QR である。

ここで，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，k の値が $1\leqq k\leqq 3$ の範囲で変化するとき，線分 QR 上の点は，台形 AA′B′B の周および内部を動く。

したがって，点 P の存在範囲は，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，台形 AA′B′B の周および内部である。



7　△OAB に対して，点 P が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\quad s+t=\frac{2}{3},\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

[25 点]

解答　$s+t=\frac{2}{3}$ から　$\frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

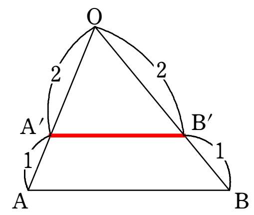
$$=\frac{3}{2}s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで，$\frac{3}{2}s=s'$，$\frac{3}{2}t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right),$$

$$s'+t'=1,\quad s'\geqq 0,\quad t'\geqq 0$$

よって，$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。



解説

$s+t=\frac{2}{3}$ から　$\frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

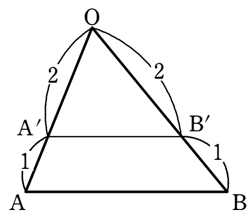
$$=\frac{3}{2}s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで，$\frac{3}{2}s=s'$，$\frac{3}{2}t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right),$$

$$s'+t'=1,\quad s'\geqq 0,\quad t'\geqq 0$$

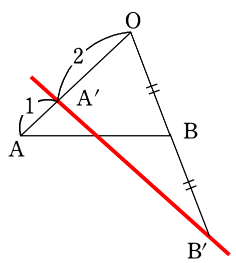
よって，$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。



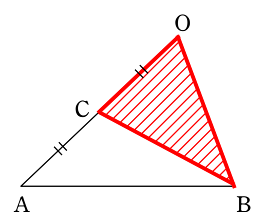
8　△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の関係を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$3s+t=2$　　(2)　$2s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解答　(1)　$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，直線 A′B′



(2)　$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ とすると，△OCB の周および内部

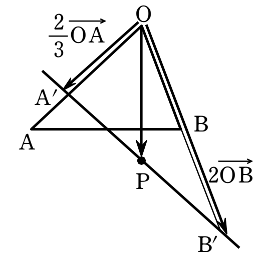


解説

(1)　$3s+t=2$ から　$\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

よって，点 P の存在範囲は，$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，直線 A′B′ である。



(2)　$2s+t=k$ とおくと　$0\leqq k\leqq 1$

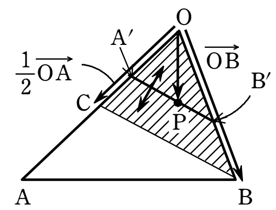
$k=0$ のとき，$s=t=0$ であるから，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq 1$ のとき　$\frac{2s}{k}+\frac{t}{k}=1$，$\frac{2s}{k}\geqq 0$，$\frac{t}{k}\geqq 0$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{2s}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$

$\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，k が一定のとき点 P は線分 A′B′ 上を動く。

ここで，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ とすると，$0\leqq k\leqq 1$ の範囲で k が変わるとき点 P の存在範囲は △OCB の周および内部である。

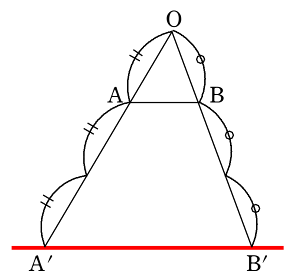


9　△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

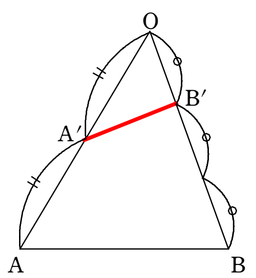
(1)　$s+t=3$　　(2)　$2s+3t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3)　$2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

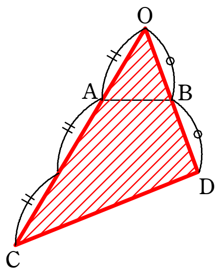
解答　(1)　$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，直線 A′B′



(2)　$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，線分 A′B′



(3)　$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，△OCD の周および内部

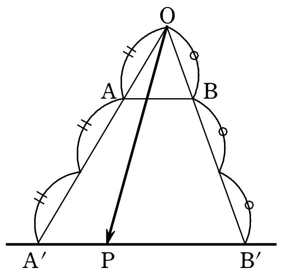


解説

(1)　$s+t=3$ から　$\frac{s}{3}+\frac{t}{3}=1$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\frac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

よって，Pの存在範囲は，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると直線 A′B′ である。

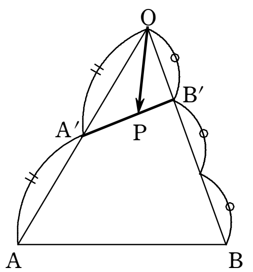


(2)　$2s+3t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+3t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$，

$2s\geqq0$，$3t\geqq0$

よって，点Pの存在範囲は，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると線分 A′B′ である。



(3)　$2s+3t=k$ とおくと　$0\leqq k\leqq6$

$k=0$ のときは，$s=t=0$ であるから，点Pは点Oに一致する。

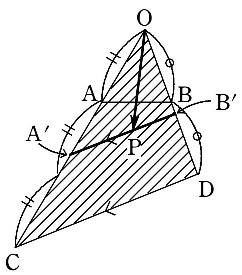
$0<k\leqq6$ のとき　$\frac{2s}{k}+\frac{3t}{k}=1$，$\frac{2s}{k}\geqq0$，$\frac{3t}{k}\geqq0$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{2s}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{3t}{k}\left(\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

$\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，k が一定のとき点Pは線分 A′B′ 上を動く。

ここで，$0\leqq\frac{k}{2}\leqq3$，$0\leqq\frac{k}{3}\leqq2$ より，

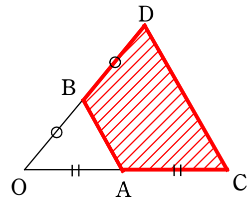
$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると $0\leqq k\leqq6$ の範囲で k が変わるとき，点Pの存在範囲は△OCDの周および内部である。



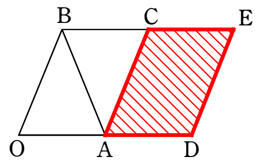
10　△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の関係を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

(1)　$1\leqq s+t\leqq2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$　　(2)　$1\leqq s\leqq2$，$0\leqq t\leqq1$

解答　(1)　$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，台形ACDBの周および内部



(2)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形ADECの周および内部



解説

(1)　$s+t=k$ $(1\leqq k\leqq2)$ とおくと

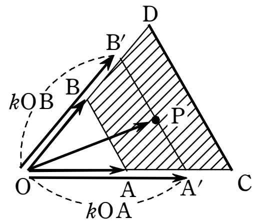
$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$，$\frac{s}{k}\geqq0$，$\frac{t}{k}\geqq0$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$

よって，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，k が一定のとき点PはABに平行な線分 A′B′ 上を動く。

ここで，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，$1\leqq k\leqq2$ の範囲で k が変わるとき，点Pの存在範囲は

台形ACDBの周および内部



(2)　s を固定して，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$ とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

ここで，t を $0\leqq t\leqq1$ の範囲で変化させると，点Pは右の図の線分 A′C′ 上を動く。

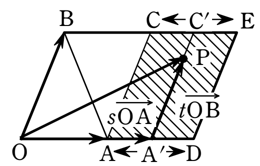
ただし　$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB}$

次に，s を $1\leqq s\leqq2$ の範囲で変化させると，線分 A′C′ は図の線分ACからDEまで平行に動く。

ただし　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$

よって，点Pの存在範囲は

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形ADECの周および内部



別解　$0\leqq s-1\leqq1$ から，$s-1=s'$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(s'+1)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(s'\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}$

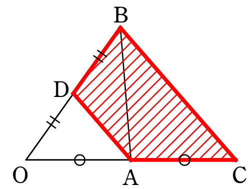
そこで，$\overrightarrow{OQ}=s'\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおくと，$0\leqq s'\leqq1$，$0\leqq t\leqq1$ から，点Qは平行四辺形OACBの周と内部にある。

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}$ から，点Pの存在範囲は，平行四辺形OACBを $\overrightarrow{OA}$ だけ平行移動したものである。

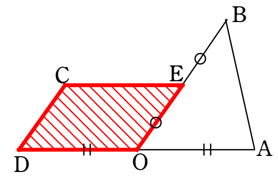
11　△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

(1)　$1\leqq s+2t\leqq2$，$s\geqq0$，$t\geqq0$　(2)　$-1\leqq s\leqq0$，$0\leqq2t\leqq1$　(3)　$-1<s+t<2$

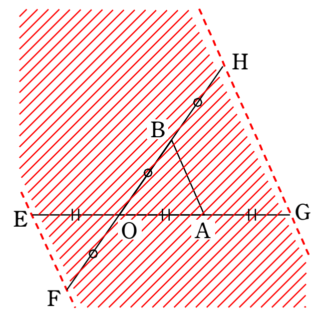
解答　(1)　$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，台形ACBDの周および内部



(2)　$-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形ODCEの周および内部



(3)　$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}$，$-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}$ とすると，2本の平行線EF，GHで挟まれた部分。ただし，直線EF，GHは除く。



解説

(1)　$s+2t=k$ $(1\leqq k\leqq2)$ とおくと　$\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$，$\frac{s}{k}\geqq0$，$\frac{2t}{k}\geqq0$

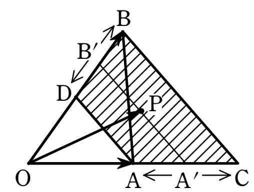
また　$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

よって，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とすると，k が一定のとき点Pは線分 A′B′ 上を動く。

ここで，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，$1\leqq k\leqq2$ の範囲で k が変わるとき，点Pの存在範囲は

台形ACBDの周および内部

である。



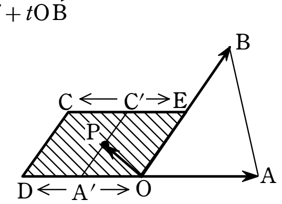
(2)　s を固定して，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$ とすると　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

ここで，$0\leqq2t\leqq1$ すなわち $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で t を変化させると，点Pは右の図の線分 A′C′ 上を動く。

ただし　$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

次に，$-1\leqq s\leqq0$ の範囲で s を変化させると，線分 A′C′ は図の線分DCからOEまで平行に動く。

ただし　$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$



ゆえに，点Pの存在範囲は

$-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$

とすると，平行四辺形 ODCE の周および内部

である。

別解　$0\leqq -s\leqq 1$，$0\leqq 2t\leqq 1$ から，$-s=s'$，$2t=t'$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s'(-\overrightarrow{OA})+t'\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s'\leqq 1$，$0\leqq t'\leqq 1$

よって，点Pの存在範囲は

$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，線分 OD，OE を隣り合う 2 辺とする

平行四辺形の周および内部

である。

(3)　$s+t=k$ ($k\neq 0$，$-1<k<2$) とおくと

$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$，$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$

ゆえに，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{s}{k}=s'$，$\frac{t}{k}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$，$s'+t'=1$

よって，P は辺 AB に平行な直線 CD 上を動く。

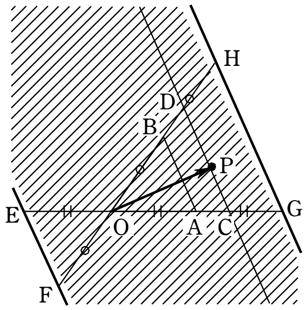
また，$k=0$ のとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{BA}$ $(=t\overrightarrow{AB})$ となり，P は O を通り，AB に平行な直線上を動く。

ここで，$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}$，$-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}$ とする。

k が -1 から 2 まで変化すると，C は図の E から G まで，D は F から H まで動く。

ゆえに，P の存在範囲は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

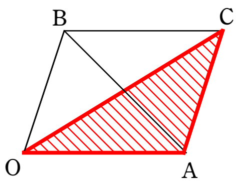


12　△OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

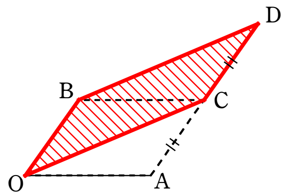
(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

解答　(1)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，△OAC の周および内部



(2)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，線分 OB，OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部



解説

(1)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると

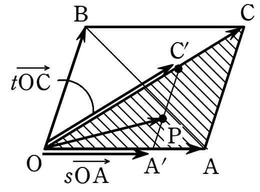
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$，

$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

よって，点 P の存在範囲は

△OAC の周および内部

である。



(2)　$s\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}=s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t\overrightarrow{OB}$ であるから，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると

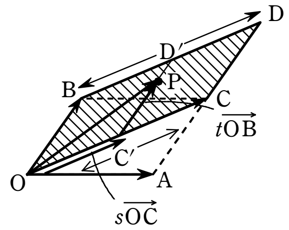
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}$，

$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

よって，点 P の存在範囲は

線分 OB，OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部

である。

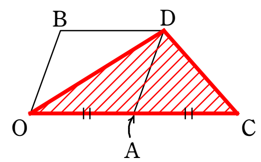


13　△OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

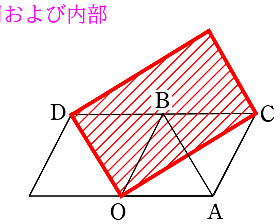
(1)　$\overrightarrow{OP}=(2s+t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2)　$\overrightarrow{OP}=(s-t)\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

解答　(1)　$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，△OCD の周および内部



(2)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$ とすると，線分 OC，OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周および内部



解説

(1)　$\overrightarrow{OP}=(2s+t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=s(2\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると

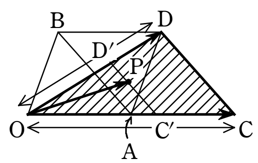
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$，

$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

よって，点 P の存在範囲は

△OCD の周および内部

である。



(2)　$\overrightarrow{OP}=(s-t)\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}$

$=s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$ とすると

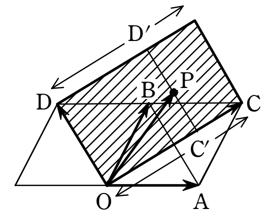
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

よって，点 P の存在範囲は

線分 OC，OD を隣り合う 2 辺とする

平行四辺形の周および内部

である。



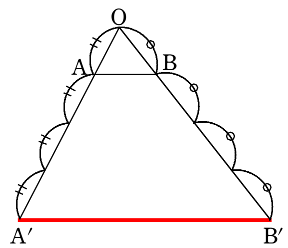
14　△OAB に対して，点 P が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

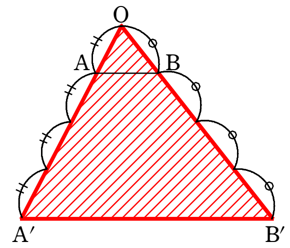
(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+t=4$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s+t\leqq 4$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解答　$\overrightarrow{OA'}=4\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=4\overrightarrow{OB}$ を満たす点 A′，B′ をとると

(1)　線分 A′B′　　(2)　△OA′B′ の周および内部





解説

(1)　$s+t=4$ から　$\frac{s}{4}+\frac{t}{4}=1$

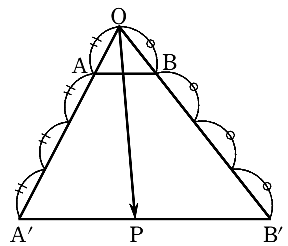
また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{4}(4\overrightarrow{OA})+\frac{t}{4}(4\overrightarrow{OB})$

ここで，$\frac{s}{4}=s'$，$\frac{t}{4}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(4\overrightarrow{OA})+t'(4\overrightarrow{OB})$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。



(2)　$0\leqq s+t\leqq 4$ から　$0\leqq\frac{s}{4}+\frac{t}{4}\leqq 1$

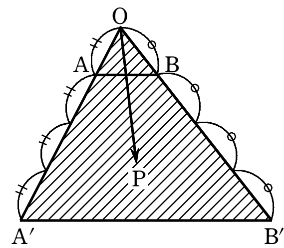
また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{4}(4\overrightarrow{OA})+\frac{t}{4}(4\overrightarrow{OB})$

ここで，$\frac{s}{4}=s'$，$\frac{t}{4}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(4\overrightarrow{OA})+t'(4\overrightarrow{OB})$

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は △OA′B′ の周および内部である。

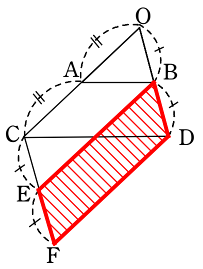


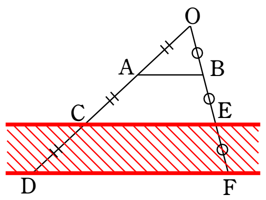
15　△OAB に対して，点 P が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を図示せよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$0\leqq s\leqq 2$，$1\leqq t\leqq 2$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$2\leqq s+t\leqq 3$

解答　(1)　［図］　境界線を含む　　(2)　［図］　境界線を含む





解説

(1)　s を固定して，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲で変化すると，P は図の線分 P′Q′ 上を動く。

ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

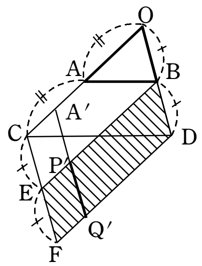
次に，s が $0\leqq s\leqq 2$ の範囲で変化すると，線分 P′Q′ は図の線分 BD から EF まで動く。

ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ である。

よって，点 P の存在範囲は平行四辺形 BEFD の周および内部である。

したがって，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　$s+t=k$ (定数) とおくと　　$2\leqq k\leqq 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\ \frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$$

$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とすると，P は直線 A′B′ 上を動く。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

k が $2\leqq k\leqq 3$ の範囲で変化すると，A′ は C から D まで動き，B′ は E から F まで動き，A′B′∥CE，A′B′∥DF である。

したがって，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。