なす角クイズ

1 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$ のなす角 θ を求める。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times3+2\times(-1)=10$

$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，　$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{10}{2\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=45°$

解説

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(7,\ 1)$　　(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=25$，$\theta=45°$　　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$，$\theta=120°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times7+4\times1=25$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$，　$|\vec{b}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{25}{5\times5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=45°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-2+\sqrt{3})+(-1)\times(1+2\sqrt{3})=-5$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，

$|\vec{b}|=\sqrt{(-2+\sqrt{3})^2+(1+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

3 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 2)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$

(2)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(-\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\theta=60°$　　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{6}$，$\theta=150°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times(\sqrt{3}-1)+2\times(\sqrt{3}+1)=4$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-\sqrt{6})+\sqrt{3}\times(-\sqrt{2})=-2\sqrt{6}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{6}}{2\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=150°$

4 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$　　(2)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\theta=60°$　　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$，$\theta=135°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times(\sqrt{3}-1)+1\times(\sqrt{3}+1)=2$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+2\times(-3)=-5$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

5 (1)　2つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ -\sqrt{3})$ に対して，その内積と，なす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が $135°$，$|\vec{a}|=\sqrt{6}$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{2})$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$，$\theta=150°$　　(2)　-3

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-1)+1\times(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=150°$

(2)　$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos135°=\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3$

6 (1)　$\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3})$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2)　3点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ -2)$，C$(\sqrt{3},\ \sqrt{3}+1)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$，$\theta=150°$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=8$，$\theta=60°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-1)+(-1)\times\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=150°$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-(-1),\ -2-2)=(4,\ -4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\sqrt{3}-(-1),\ \sqrt{3}+1-2)=(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4\times(\sqrt{3}+1)+(-4)\times(\sqrt{3}-1)=8$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{8}{4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

7 (1)　$\vec{a}=(\sqrt{6},\ \sqrt{2})$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{3})$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(2,\ -6)$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(3)　3点 A$(-3,\ 4)$，B$(2\sqrt{3}-2,\ \sqrt{3}+2)$，C$(-4,\ 6)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{6}$，$\theta=30°$　　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-20$，$\theta=135°$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-5$，$\theta=120°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=30°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times2+4\times(-6)=-20$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-20}{2\sqrt{5}\times2\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2\sqrt{3}-2-(-3),\ \sqrt{3}+2-4)=(2\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-4-(-3),\ 6-4)=(-1,\ 2)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2\sqrt{3}+1)\times(-1)+(\sqrt{3}-2)\times2=-5$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{-5}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

8 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -6)$　　(2) $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-4,\ 6)$

(3) $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$　　(4) $\vec{a}=(-3,\ 1)$，$\vec{b}=(3+\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}-1)$

解答　順に

(1) 0，$\theta=90°$　(2) -26，$\theta=180°$　(3) 2，$\theta=60°$　(4) -10，$\theta=120°$

解説

(1) 内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+1\times(-6)=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=90°$

(2) 内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-4)+(-3)\times6=-26$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=2\sqrt{13}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-26}{\sqrt{13}\times2\sqrt{13}}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=180°$

(3) 内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(1-\sqrt{3})+1\times(1+\sqrt{3})=2$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

(4) 内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\times(3+\sqrt{3})+1\times(3\sqrt{3}-1)=-10$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{12+6\sqrt{3}+28-6\sqrt{3}}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-10}{\sqrt{10}\times2\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

9 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ -8)$　　(2) $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$

(3) $\vec{a}=(2,\ -5)$，$\vec{b}=(-4,\ 10)$　　(4) $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

解答　内積，なす角 θ の順に　(1) 0，$\theta=90°$　(2) $-2\sqrt{3}$，$\theta=150°$

(3) -58，$\theta=180°$　(4) 2，$\theta=60°$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times4+1\times(-8)=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=90°$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\sqrt{3})\times1+1\times(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=150°$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-4)+(-5)\times10=-58$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+10^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-58}{\sqrt{29}\times2\sqrt{29}}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=180°$

別解　$\vec{b}=-2\vec{a}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きは反対であり　$\theta=180°$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(1-\sqrt{3})+1\times(1+\sqrt{3})=2$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

10 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(3,\ \sqrt{3})$　　(2) $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$

解答　(1) $30°$　(2) $135°$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，　$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{6}{2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=30°$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times3+2\times(-1)=-5$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，　$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

11 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$2\vec{a}-5\vec{b}$ が垂直であるとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=60°$

解説

$\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-5\vec{b}$ が垂直であるから

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})=0$

ゆえに　$2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

ここで，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ であるから

$2\times2^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\times1^2=0$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2\times1}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

12 $\vec{a}-\dfrac{2}{5}\vec{b}$ と $\vec{a}+\vec{b}$ が垂直，$\vec{a}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\theta=60°$

解説

$\left(\vec{a}-\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)\perp(\vec{a}+\vec{b})$ であるから　$\left(\vec{a}-\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

ゆえに　$|\vec{a}|^2+\dfrac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{2}{5}|\vec{b}|^2=0$　……①

$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$ であるから　$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

よって　$|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$　……②

② を ① に代入すると　$|\vec{a}|^2+\dfrac{3}{5}|\vec{a}|^2-\dfrac{2}{5}|\vec{b}|^2=0$

整理すると　$4|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$　　よって　$(2|\vec{a}|+|\vec{b}|)(2|\vec{a}|-|\vec{b}|)=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ より，$2|\vec{a}|+|\vec{b}|>0$ であるから　$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{2|\vec{a}|^2}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

13 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について，$\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が垂直で，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2|\vec{b}|$ が成り立つとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\theta=120°$

解説

$(\vec{a}+2\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b})$ であるから　$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$

よって　$|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=0$　すなわち　$|\vec{a}|^2=4|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|>0$，$|\vec{b}|>0$ であるから　$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$　……①

また，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2|\vec{b}|$ から　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$

よって　$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2$

したがって　$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2$

① を代入して　$2|\vec{b}|^2\cos\theta=-|\vec{b}|^2$

$|\vec{b}|>0$ であるから　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

14 (1) 等式 $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$ を証明せよ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求め

よ。

解答 (1) 略 (2) $\theta=120^\circ$

解説

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+5\vec{b})$ から $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$

よって $2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ を代入して $2\times4+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\times1=0$

ゆえに $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=120^\circ$

15 (1) 次の等式を証明せよ。

(ア) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+2\vec{b})=|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

(イ) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

(2) $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がある。$2\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-\vec{b}$ が垂直で，かつ $\vec{a}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

解答 (1) (ア) 略 (イ) 略 (2) 60°

解説

(1) (ア) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+2\vec{b})=\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot(2\vec{b})-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot(2\vec{b})$

$=|\vec{p}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

(イ) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$ ……①

また $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$ ……②

①，② から $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とする。

$(2\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$ から $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$

ゆえに $4|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$

よって $|\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|>0$, $|\vec{b}|>0$ であるから $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ ……①

$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$ から $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

ゆえに $|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$ ……②

①，②，$|\vec{a}|\neq0$ から

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{2|\vec{a}|^2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=60^\circ$

16 (1) 等式 $|2\vec{a}+3\vec{b}|^2+|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=2(4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2)$ を証明せよ。

(2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答 (1) 略 (2) $\theta=60^\circ$

解説

(1) (左辺)$=|2\vec{a}+3\vec{b}|^2+|2\vec{a}-3\vec{b}|^2$

$=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})+(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=8|\vec{a}|^2+18|\vec{b}|^2$

$=2(4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2)=$(右辺)

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\perp(6\vec{a}+\vec{b})$ であるから $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(6\vec{a}+\vec{b})=0$

よって $6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ を代入して $6\times2^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3^2=0$

ゆえに $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

したがって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\times3}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=60^\circ$

17 (1) 等式 $\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right|^2+\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right|^2=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2+\dfrac{2}{9}|\vec{b}|^2$ を証明せよ。

(2) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ で，$-3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答 (1) 略 (2) $\theta=60^\circ$

解説

(1) (左辺)$=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right|^2+\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right|^2$

$=\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{9}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{9}|\vec{b}|^2$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2+\dfrac{2}{9}|\vec{b}|^2=$(右辺)

(2) $(-3\vec{a}+2\vec{b})\perp(\vec{a}+4\vec{b})$ であるから $(-3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{b})=0$

よって $-3|\vec{a}|^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ を代入して $-3\times1^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+8\times1^2=0$

ゆえに $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ したがって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=60^\circ$

18 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答 $\theta=135^\circ$

解説

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=2+4\times(-1)+4\times5=18$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2-2\times(-1)+5=9$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$, $|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから $|\vec{a}+2\vec{b}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3$

また $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=2-1-2\times5=-9$

よって $\cos\theta=\dfrac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+2\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{-9}{3\sqrt{2}\times3}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=135^\circ$

19 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{13}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$\vec{a}-2\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角 θ を求めよ。

解答 $\theta=120^\circ$

解説

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4-4\times5+4\times13=36$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\geqq0$ であるから $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$

また $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4-2\times5=-6$

よって $\cos\theta=\dfrac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}-2\vec{b}||\vec{a}|}=\dfrac{-6}{6\times2}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=120^\circ$

20 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ で，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-5\vec{b}$ が垂直であるとする。このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答 $\theta=120^\circ$

解説

$(2\vec{a}+3\vec{b})\perp(\vec{a}-5\vec{b})$ であるから $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-5\vec{b})=0$

よって $2|\vec{a}|^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ を代入すると $2\times4^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}-15\times2^2=0$

ゆえに $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$

したがって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-4}{4\times2}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=120^\circ$

21 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。次のようなベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$

(3) $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ で，$\vec{a}+\vec{b}$ と $5\vec{a}-2\vec{b}$ が垂直

解答 (1) $\theta=120^\circ$ (2) $\theta=90^\circ$ (3) $\theta=60^\circ$

解説

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$

よって　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$ を代入して　$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=13$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{1\times3}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

(2) $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$ から　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=5$

よって　$4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ を代入して　$4\times1^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=5$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　よって　$\theta=90°$

(3) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ から　$|\vec{a}|\neq0$, $|\vec{b}|\neq0$

$(\vec{a}+\vec{b})\perp(5\vec{a}-2\vec{b})$ であるから　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0$

よって　$5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ を代入して　$5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{a}|^2=0$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

22 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とする。内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$，$\theta=150°$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{7})^2$

ゆえに　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

ここで，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ であるから

$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{1\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=150°$

23 2直線 $x+\sqrt{3}y-1=0$　……①

$x-\sqrt{3}y+4=0$　……②

について，次のものを求めよ。

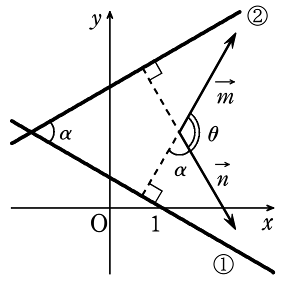
(1) 直線①，②の法線ベクトル

$\vec{m}=(1,\ \sqrt{3})$,

$\vec{n}=(1,\ -\sqrt{3})$

のなす角 θ

(2) 直線①，②のなす鋭角 α



解答　(1) 120°　(2) 60°

解説

(1) ベクトル $\vec{m}$，$\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1\times1+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

(2) $\alpha=180°-\theta=180°-120°=60°$

24 2直線 $x-5y+4=0$，$2x+3y-5=0$ のなす鋭角を求めよ。

解答　45°

解説

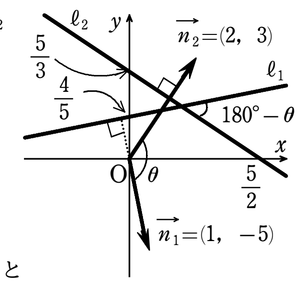
2直線 $x-5y+4=0$，$2x+3y-5=0$ をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると，ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルはそれぞれ

$\vec{n_1}=(1,\ -5)$，$\vec{n_2}=(2,\ 3)$ とおける。

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=1\times2+(-5)\times3=-13$,

$|\vec{n_1}|=\sqrt{1^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$,

$|\vec{n_2}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$



であるから，$\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ のなす角を θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$) とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{-13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

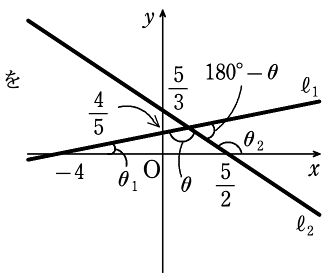
ゆえに　$\theta=135°$

よって，2直線のなす鋭角は　$180°-135°=45°$

別解　直線 ℓ_1，ℓ_2 の傾きはそれぞれ　$\dfrac{1}{5}$，$-\dfrac{2}{3}$

よって，直線 ℓ_1，ℓ_2 と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると

$\tan\theta_1=\dfrac{1}{5}$，$\tan\theta_2=-\dfrac{2}{3}$



ゆえに，直線 ℓ_1，ℓ_2 のなす角を θ とすると

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}}=-1$$

よって　$\theta=135°$　　したがって，求める鋭角は　$180°-135°=45°$

25 2直線 $\sqrt{3}x+y-2=0$，$\sqrt{3}x-y-4=0$ のなす鋭角を求めよ。

解答　60°

解説

2直線 $\sqrt{3}x+y-2=0$，$\sqrt{3}x-y-4=0$ の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ とすると，

$\vec{n_1}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{n_2}=(\sqrt{3},\ -1)$ とおける。$\vec{n_1}$ と $\vec{n_2}$ のなす角を θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$) とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times(-1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\theta=60°$

よって，2直線のなす鋭角は　60°

26 (1) 点 A $(3,\ -4)$ を通り，直線 ℓ: $2x-3y+6=0$ に平行な直線を g とする。直線 g の方程式を求めよ。

(2) 2直線 $2x+y-6=0$，$x+3y-5=0$ のなす鋭角を求めよ。

解答　(1) $2x-3y-18=0$　(2) 45°

解説

(1) 直線 ℓ: $2x-3y+6=0$ の法線ベクトルである

$\vec{n}=(2,\ -3)$ は，直線 g の法線ベクトルでもある。

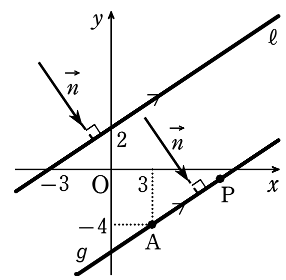
よって，直線 g 上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+4)$ であるから

$2(x-3)-3(y+4)=0$

すなわち　$2x-3y-18=0$



(2) 2直線 $2x+y-6=0$，$x+3y-5=0$ の法線ベクトルは，それぞれ $\vec{n}=(2,\ 1)$，$\vec{m}=(1,\ 3)$ とおける。

$\vec{n}$ と $\vec{m}$ のなす角を θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$) とすると

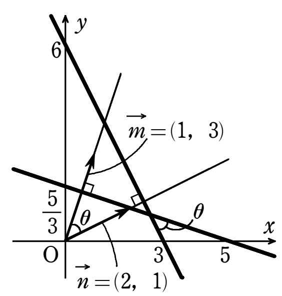
$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{m}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$\vec{n}\cdot\vec{m}=2\times1+1\times3=5$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\theta=45°$

したがって，2直線のなす鋭角も　45°



27 (1) 点 A $(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-5y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 2直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ のなす鋭角を求めよ。

解答　(1) 順に $3x-5y+11=0$，$5x+3y+7=0$　(2) 45°

解説

(1) $3x-5y+4=0$ ……① とする。

$\vec{n}=(3,\ -5)$ とすると，$\vec{n}$ は直線①の法線ベクトルであり，直線①の方向ベクトルを

$\vec{m}=(a,\ b)$ とすると　$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$　　よって　$3a-5b=0$

ゆえに　$b=\dfrac{3}{5}a$　　よって　$\vec{m}=\left(a,\ \dfrac{3}{5}a\right)=\dfrac{a}{5}(5,\ 3)$

ゆえに，$\vec{m}=(5,\ 3)$ ととることができる。

直線 ① に平行な直線の法線ベクトルは $\vec{n}$ であるから，点 A $(-2,\ 1)$ を通り，直線 ① に平行な直線上の点を P $(x,\ y)$ とすると　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y-1)$ であるから

$3(x+2)-5(y-1)=0$　すなわち　$3x-5y+11=0$

また，直線 ① に垂直な直線の法線ベクトルは $\vec{m}$ であるから，点 A $(-2,\ 1)$ を通り，直線 ① に垂直な直線上の点を Q $(x,\ y)$ とすると　$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$

$\overrightarrow{AQ}=(x+2,\ y-1)$ であるから

$5(x+2)+3(y-1)=0$　すなわち　$5x+3y+7=0$

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると，ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルはそれぞれ $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -3)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,\ 4)$ とおける。

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1\times2-3\times4=-10$，$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$，

$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

であるから，$\overrightarrow{n_1}$ と $\overrightarrow{n_2}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

したがって，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 のなす鋭角は　$180^\circ-135^\circ=45^\circ$

$\boxed{28}$ (1)　3 点 A $(-1,\ 4)$，B $(-4,\ -3)$，C $(8,\ 3)$ について，点 A を通り，BC に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　直線 $\ell_1: x-\sqrt{3}\,y+3=0$ と直線 $\ell_2: \sqrt{3}\,x+3y+1=0$ とがなす鋭角 α を求めよ。

$\boxed{解答}$　(1)　$2x+y-2=0$　　(2)　$\alpha=60^\circ$

解説

(1)　求める直線は，点 A を通り，$\overrightarrow{BC}=(12,\ 6)$ に垂直な直線であるから，直線上の点を P $(x,\ y)$ とすると　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{AP}=(x+1,\ y-4)$ であるから

$12(x+1)+6(y-4)=0$

すなわち　$2x+y-2=0$

(2)　2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルは，それぞれ

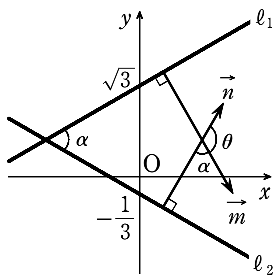
$\vec{m}=(1,\ -\sqrt{3})$，$\vec{n}=(\sqrt{3},\ 3)$ とおける。

$\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

したがって　$\alpha=180^\circ-\theta=60^\circ$



$\boxed{29}$ (1)　3 点 A $(1,\ 2)$，B $(2,\ 3)$，C $(-1,\ 2)$ について，点 A を通り，BC に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　2 直線 $x-2y+3=0$，$6x-2y-5=0$ のなす鋭角 α を求めよ。

$\boxed{解答}$　(1)　$3x+y-5=0$　　(2)　$\alpha=45^\circ$

解説

(1)　求める直線は，点 A を通り，$\overrightarrow{BC}=(-3,\ -1)$ に垂直な直線であるから，直線上の点を P $(x,\ y)$ とすると　$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2)$ であるから　$-3(x-1)-(y-2)=0$

すなわち　$3x+y-5=0$

(2)　2 直線 $x-2y+3=0$，$6x-2y-5=0$ の法線ベクトルは，それぞれ $\vec{m}=(1,\ -2)$，$\vec{n}=(6,\ -2)$ とおける。

$\vec{m}$，$\vec{n}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{10}{\sqrt{5}\times2\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$　　したがって　$\alpha=\theta=45^\circ$