垂心・外心クイズ

1 $OA=\sqrt{3}$，$OB=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ である △OAB の垂心を H とする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

解説

条件から $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ ……①

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s，t は実数）とおくと，AH⊥OB であるから

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって $(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

ゆえに $s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① から $2s+4t-2=0$ ……②

また，BH⊥OA であるから

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

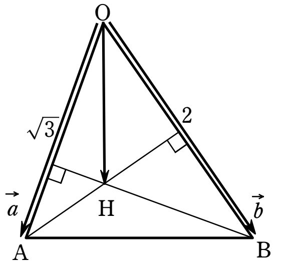
よって $(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

ゆえに $s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① から $3s+2t-2=0$ ……③

②，③ を解くと $s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{4}$

したがって $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$



2 △ABC において，AB＝2，AC＝3，∠A＝60° とする。頂点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろすとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。[20 点]

解答 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3\times\cos 60^\circ=3$

H は直線 BC 上にあるから $\overrightarrow{AH}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

を満たす実数 t が存在する。

よって

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

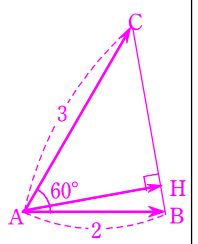
$=(1-t)|\overrightarrow{AB}|^2-(1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-t|\overrightarrow{AC}|^2$

$=(1-t)|\overrightarrow{AB}|^2+(2t-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-t|\overrightarrow{AC}|^2$

$=4(1-t)+3(2t-1)-9t=-7t+1$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ であるから $-7t+1=0$ ゆえに $t=\frac{1}{7}$

したがって $\overrightarrow{AH}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$



解説

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3\times\cos 60^\circ=3$

H は直線 BC 上にあるから $\overrightarrow{AH}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

を満たす実数 t が存在する。

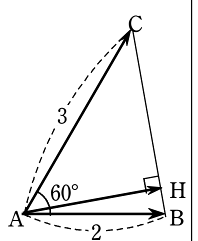
よって

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=(1-t)|\overrightarrow{AB}|^2-(1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-t|\overrightarrow{AC}|^2$

$=(1-t)|\overrightarrow{AB}|^2+(2t-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-t|\overrightarrow{AC}|^2$

$=4(1-t)+3(2t-1)-9t=-7t+1$



$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ であるから $-7t+1=0$ ゆえに $t=\frac{1}{7}$

したがって $\overrightarrow{AH}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

3 △OAB において，OA＝5，OB＝6，AB＝7 とし，垂心を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。 (2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ (2) $\overrightarrow{OH}=\frac{5}{24}\vec{a}+\frac{19}{144}\vec{b}$

解説

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$ であるから $7^2=6^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+5^2$

したがって $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

(2) H は垂心であるから $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BH}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s，t は実数）とする。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BH}$ であるから $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$

よって $\vec{a}\cdot\{s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\}=0$

ゆえに $s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ であるから $25s+6(t-1)=0$

よって $25+6t=6$ ……①

$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AH}$ であるから $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

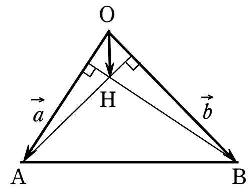
ゆえに $\vec{b}\cdot\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}=0$ よって $(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ であるから $6(s-1)+36t=0$

ゆえに $s+6t=1$ ……②

①，② を解くと $s=\frac{5}{24}$，$t=\frac{19}{144}$

したがって $\overrightarrow{OH}=\frac{5}{24}\vec{a}+\frac{19}{144}\vec{b}$

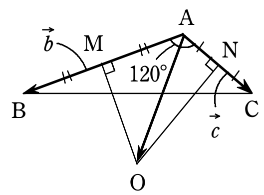


4 △ABC において，AB＝4，AC＝2，∠A＝120° とし，外心を O とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{AO}=\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$

解説

点 O は △ABC の外心であるから，辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，AB⊥MO，AC⊥NO である。



よって $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=0$

$\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$ （s，t は実数）とすると，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$

から $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})=0$

ゆえに $\vec{b}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0$

よって $(2s-1)|\vec{b}|^2+2t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ……①

また，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=0$ から

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN})=0$

ゆえに $\vec{c}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=0$

よって $2s\vec{b}\cdot\vec{c}+(2t-1)|\vec{c}|^2=0$ ……②

ここで $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^\circ=4\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-4$

$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ を ①，② に代入して整理すると

$4s-t=2$，$2s-2t=-1$

これを解いて $s=\frac{5}{6}$，$t=\frac{4}{3}$

ゆえに $\overrightarrow{AO}=\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$

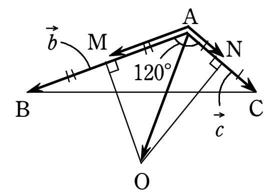
別解 $|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ である。

また，辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，

∠OAM＜90°，∠OAN＜90° であるから

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=AM^2=2^2=4$，

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AN}=AN^2=1^2=1$



よって，$\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$ （s，t は実数）とすると

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=(s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\frac{\vec{b}}{2}=\frac{s}{2}|\vec{b}|^2+\frac{t}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}=8s-2t$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AN}=(s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\frac{\vec{c}}{2}=\frac{s}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{t}{2}|\vec{c}|^2=-2s+2t$

ゆえに $8s-2t=4$，$-2s+2t=1$

これを解いて $s=\frac{5}{6}$，$t=\frac{4}{3}$

したがって $\overrightarrow{AO}=\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$

5 角 A が鈍角の △ABC において AB＝2，AC＝3 であり，△ABC の面積は $2\sqrt{2}$ である。

このとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ア$\boxed{}$ であり，△ABC の垂心を H とすると，

$\overrightarrow{AH}=$ イ$\boxed{}\overrightarrow{AB}-$ ウ$\boxed{}\overrightarrow{AC}$ である。

解答 (ア) -2 (イ) $-\frac{11}{16}$ (ウ) $\frac{3}{8}$

解説

△ABC の面積は $2\sqrt{2}$ であるから

$\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin A=2\sqrt{2}$

よって $\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin A=2\sqrt{2}$ ゆえに $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

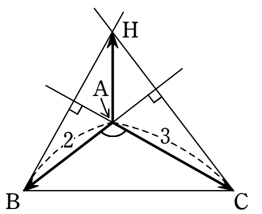
角 A は鈍角より，$\cos A<0$ であるから

$\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=2\times3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)={}^{ア}-2$

また，$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s$，$t$ は実数）とする。
H は △ABC の垂心であるから

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから

$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\{s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}\}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

ゆえに　$s|\overrightarrow{AB}|^2+(t-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

したがって　$s\times2^2+(t-1)\times(-2)=0$

すなわち　$2s-t+1=0$　……①

また，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから　$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$\{(s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ゆえに　$(s-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=0$

したがって　$(s-1)\times(-2)+t\times3^2=0$

すなわち　$-2s+9t+2=0$　……②

①，② を解くと　$s=-\dfrac{11}{16}$，$t=-\dfrac{3}{8}$

したがって　$\overrightarrow{AH}={}^{イ}-\dfrac{11}{16}\overrightarrow{AB}-{}^{ウ}\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

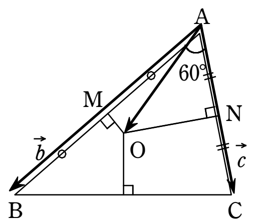
6 △ABC において，AB＝3，AC＝2，∠A＝60°，外心を O とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

解説

条件から　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\times2\cos60^\circ=3$



$\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$（$s$，$t$ は実数）とおく。
辺 AB の中点を M とすると，点 O は △ ABC の外心であるから　OM⊥AB

よって　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{b}+t\vec{c})=\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}$

であるから　$\left\{\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}-s\right)|\vec{b}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

これに $|\vec{b}|=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ を代入して整理すると　$6s+2t=3$　……①

辺 AC の中点を N とすると，点 O は△ ABC の外心であるから　ON⊥AC

よって　$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-(s\vec{b}+t\vec{c})=-s\vec{b}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{c}$

であるから　$\left\{-s\vec{b}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=0$

ゆえに　$-s\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{c}|^2=0$

これに $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$|\vec{c}|=2$ を代入して整理すると　$3s+4t=2$　……②

①，② を解いて　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

別解　条件から　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\times2\cos60^\circ=3$

$\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$（$s$，$t$ は実数）とおく。

点 O は △ ABC の外心であるから　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

すなわち　$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}|$

$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}|$ から　$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}|^2$

よって　$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+|\overrightarrow{AO}|^2$

ゆえに，$|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=0$ であるから　$|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot(s\vec{b}+t\vec{c})=0$

よって　$(1-2s)|\vec{b}|^2-2t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

これに $|\vec{b}|=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ を代入して整理すると　$6s+2t=3$　……①

$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}|$ から　$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}|^2$

よって　$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}+|\overrightarrow{AO}|^2$

ゆえに，$|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=0$ であるから　$|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot(s\vec{b}+t\vec{c})=0$

よって　$-2s\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-2t)|\vec{c}|^2=0$

これに $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$|\vec{c}|=2$ を代入して整理すると　$3s+4t=2$　……②

①，② を解いて　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

7 OA＝$2\sqrt{2}$，OB＝$\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ である △OAB の垂心を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

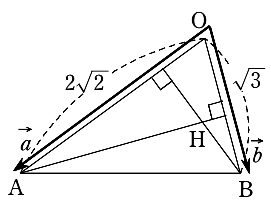
解答　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

解説

条件から

$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$　……①



$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）とおくと，AH⊥OB であるから　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これに ① を代入すると　$2s+3t-2=0$　……②

また，BH⊥OA であるから　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これに ① を代入して整理すると　$4s+t-1=0$　……③

②，③ を解くと　$s=\dfrac{1}{10}$，$t=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

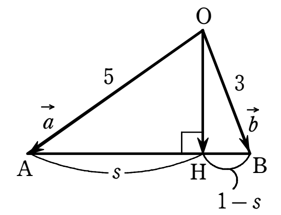
8 OA＝5，OB＝3，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ である鋭角三角形 OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{26}\vec{a}+\dfrac{21}{26}\vec{b}$

解説

AH：HB＝s：$(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$



OH⊥AB であるから

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

ゆえに　$(s-1)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ であるから

$(s-1)\times5^2+s\times3^2+(1-2s)\times4=0$

これを解くと　$s=\dfrac{21}{26}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{26}\vec{a}+\dfrac{21}{26}\vec{b}$

9 OA＝6，OB＝4，∠AOB＝60° である △OAB の垂心を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

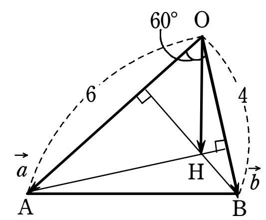
解答　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

解説

条件から　$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=4$　……①

また　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=6\times4\times\cos60^\circ$

$=6\times4\times\dfrac{1}{2}=12$　……②



$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）とおく。

AH⊥OB であるから　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

すなわち　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これに ①，② を代入して整理すると　$3s+4t-3=0$　……③

また，BH⊥OA であるから　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

すなわち　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これに ①，② を代入して整理すると　$3s+t-1=0$　……④

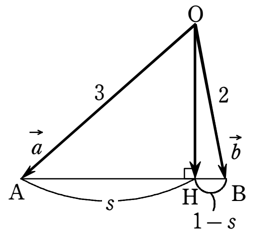
③，④ を解くと　$s=\dfrac{1}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\boxed{10}$ $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ である鋭角三角形 OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{7}{9}\vec{b}$

解説



$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

ゆえに　$(s-1)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ であるから

$(s-1)\times3^2+s\times2^2+(1-2s)\times2=0$

これを解くと　$s=\dfrac{7}{9}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{7}{9}\vec{b}$