内積クイズ

$\boxed{1}$ $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，ベクトル $\vec{a}-2\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答　$\sqrt{13}$

解説

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}-2\vec{b}|^2 &= (\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})\\
&= |\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\
&= |\vec{a}|^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ+4|\vec{b}|^2\\
&= 3^2-4\times3\times2\times\frac{1}{2}+4\times2^2\\
&= 13
\end{aligned}
$$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\geqq 0$ であるから　　$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{13}$

$\boxed{2}$ $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° であるとき，ベクトル $2\vec{a}+3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答　$2\sqrt{7}$

解説

$$
\begin{aligned}
|2\vec{a}+3\vec{b}|^2 &= (2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})\\
&= 4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2\\
&= 4|\vec{a}|^2+12|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ+9|\vec{b}|^2\\
&= 4\times1^2+12\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+9\times2^2\\
&= 28
\end{aligned}
$$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|\geqq 0$ であるから　　$|2\vec{a}+3\vec{b}|=2\sqrt{7}$

$\boxed{3}$ $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$，$2\vec{a}-5\vec{b}$ が垂直であるとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=60^\circ$

解説

$\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-5\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})=0$$

ゆえに　　$2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

ここで，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ であるから

$$2\times2^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\times1^2=0$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

ゆえに　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2\times1}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=60^\circ$

$\boxed{4}$ ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とする。内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$，$\theta=150^\circ$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ であるから　　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{7})^2$

ゆえに　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

ここで，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ であるから

$$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

ゆえに　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{1\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=150^\circ$

$\boxed{5}$ ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=9$ とする。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるように，実数 t の値を定めよ。

解答　(1)　$-\dfrac{1}{3}$　　(2)　$\dfrac{15}{7}$

解説

(1)　$|\vec{a}-2\vec{b}|=9$ から　　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=81$

ゆえに　　$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=81$

ここで，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$ であるから

$$5^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3^2=81$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$

ゆえに　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{5\times3}=-\dfrac{1}{3}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

ゆえに　　$|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$

ここで，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ であるから

$$5^2+5-5t-t\times3^2=0$$

よって　　$-14t+30=0$

ゆえに　　$t=\dfrac{15}{7}$

このとき，$\vec{a}+t\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ である。

$\boxed{6}$ $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=4$ とする。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値 t_0 とその最小値を求めよ。

(3)　(2) の t_0 に対して，$\vec{a}+t_0\vec{b}$ と $\vec{b}$ は垂直であることを確かめよ。

解答　(1)　$-\dfrac{3}{2}$　　(2)　$t_0=\dfrac{1}{6}$，最小値 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　(3)　略

解説

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|=4$ から　　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=16$

よって　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ であるから　　$2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=16$

ゆえに　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

(2)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=2^2+2t\left(-\dfrac{3}{2}\right)+t^2\times3^2$

$$=9t^2-3t+4=9\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{15}{4}$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は，$t=\dfrac{1}{6}$ のとき最小となり，最小値は $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

ゆえに　　$t_0=\dfrac{1}{6}$，最小値 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

(3)　$(\vec{a}+t_0\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+t_0|\vec{b}|^2=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}\times3^2=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=0$

$\vec{a}+t_0\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+t_0\vec{b}$ と $\vec{b}$ は垂直である。

$\boxed{7}$ 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{10}$ を満たすとき，次の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2)　$|2\vec{a}-\vec{b}|^2$　　(3)　$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$　　(4)　$|\vec{a}-\vec{b}|$

[各 8 点]

解答　(1)　$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{10}$ の両辺を 2 乗すると

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(2\sqrt{10})^2$$

$$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=40$$

ゆえに　$52+4\vec{a}\cdot\vec{b}=40$　　よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

(2)　$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=64-4\times(-3)+9=85$

(3)　$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=48-2\times(-3)-9=45$

(4)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16-2\times(-3)+9=31$

よって　　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{31}$

解説

(1)　$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{10}$ の両辺を 2 乗すると

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(2\sqrt{10})^2$$

$$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=40$$

ゆえに　$52+4\vec{a}\cdot\vec{b}=40$　　よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

(2)　$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=64-4\times(-3)+9=85$

(3)　$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=48-2\times(-3)-9=45$

(4)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16-2\times(-3)+9=31$

よって　　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{31}$

8 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値と，その最小値を求めよ。[20 点]

解答 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ から　$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=5$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=t^2|\vec{b}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=4t^2+8t+9=4(t+1)^2+5$$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は，$t=-1$ で最小値 5 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小になる。

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は，$t=-1$ で最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ から　$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=5$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=t^2|\vec{b}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=4t^2+8t+9=4(t+1)^2+5$$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は，$t=-1$ で最小値 5 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小になる。

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は，$t=-1$ で最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

9 (1) 等式 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$|2\vec{a}-3\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答 (1) 略　(2) $\sqrt{7}$

解説

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

よって　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$

また　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=1^2$ から　$7-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

よって　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\cdot 2^2-12\cdot 3+9\cdot(\sqrt{3})^2=7$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$

10 (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(ア) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2-(2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

(イ) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

(2) (ア) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(イ) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$ のとき，$|\vec{a}-2\vec{b}|$ を求めよ。

(ウ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$, $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

解答 (1) 略　(2) (ア) -3　(イ) 5　(ウ) $|\vec{a}+\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=2$

解説

(1) (ア) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})-2\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=|\vec{a}|^2-(2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

よって　$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2-(2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

(イ) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$　…… ①

また　$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$　…… ②

①，② から　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

別解 (左辺)−(右辺)

$=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}+\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

$+(\vec{b}+\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})\}$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{0}=0$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{b}+\vec{c}|^2+|\vec{c}+\vec{a}|^2$

(2) (ア) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$

また　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{3})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=7-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって　$7-2\vec{a}\cdot\vec{b}=13$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

(イ) $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$ から　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=9$

また　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=1^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 2^2=17+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって　$17+4\vec{a}\cdot\vec{b}=9$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

したがって　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=1^2-4\cdot(-2)+4\cdot 2^2=25$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{25}=5$

(ウ) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)+2\vec{a}\cdot\vec{b}=10+2\cdot 3=16$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{16}=4$

また　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}=10-2\cdot 3=4$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{4}=2$

11 (1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=17$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ と $|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

(3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答 (1) $|2\vec{a}-3\vec{b}|=13$　(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=5$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3$　(3) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

解説

(1) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ+9|\vec{b}|^2$

$=4\times 4^2-12\times 4\times 5\times\dfrac{1}{2}+9\times 5^2=169$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=13$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)+2\vec{a}\cdot\vec{b}=17+2\times 4=25$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}+\vec{b}|=5$

また　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}=17-2\times 4=9$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|=3$

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ から　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$

よって　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

これに $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$ を代入して　$3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=13$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

よって　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-2\times\dfrac{3}{2}+1^2=7$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

12 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるように，実数 t の値を定めよ。

解答 $t=-1$

解説

$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}+t\vec{b})$ から　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

よって　$|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

これに $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ を代入して　$2^2+(t+1)\times(-2)+t\times 2^2=0$

よって　$2t+2=0$　ゆえに　$t=-1$

13 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値とその最小値を求めよ。

解答 $t=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{5}$

(解説)

$|\vec{a}-\vec{b}|=3$ から　　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=9$

よって　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$ を代入して　　$3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=9$

ゆえに　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

したがって　　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=3^2+2t\times8+t^2\times4^2$

$$=16t^2+16t+9=16\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+5$$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\frac{1}{2}$ で最小値 5 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

$\boxed{14}$ $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

解答　$t=-\frac{12}{7}$

(解説)

$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ であるから　　$|\vec{a}-4\vec{b}|^2=7^2$

よって　　$|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=49$

ゆえに　　$3^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16\times2^2=49$

したがって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ であるとき　　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

すなわち　$|\vec{a}|^2+(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

よって　　$3^2+(1+t)\times3+t\times2^2=0$

これを解いて　　$t=-\frac{12}{7}$

$\boxed{15}$ $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=45^\circ$

(解説)

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$ から　　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(\sqrt{10})^2$

よって　　$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=10$

ゆえに　　$4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10$

したがって　　$4\times1^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2=10$

すなわち　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

また　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

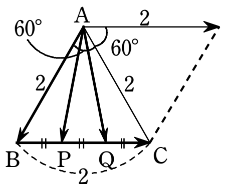
$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=45^\circ$

$\boxed{16}$ 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC を 3 等分する点を，B に近い方から順に P，Q とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ を求めよ。

解答　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{26}{9}$

(解説)

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は，右の図より，$60^\circ+60^\circ=120^\circ$ であるから



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos120^\circ=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

また　　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

したがって

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{2}{9}|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$=2^2+(-2)+\frac{2}{9}\times2^2=\frac{26}{9}$$