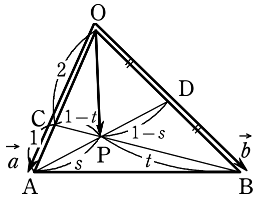
交点のベクトルクイズ

1 △OABにおいて，辺OAを2：1に内分する点をC，辺OBの中点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

解説



AP：PD$=s:(1-s)$，BP：PC$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$　…… ①

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　…… ②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから

$1-s=\frac{2}{3}t$，$\frac{1}{2}s=1-t$

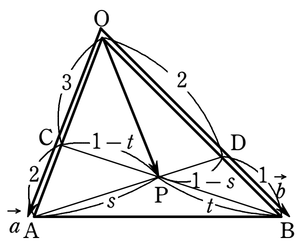
これを解いて　$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{3}{4}$

$s=\frac{1}{2}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

2 △OABにおいて，辺OAを3：2に内分する点をC，辺OBを2：1に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

解説



AP：PD$=s:(1-s)$，BP：PC$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$　…… ①

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　…… ②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから

$1-s=\frac{3}{5}t$，$\frac{2}{3}s=1-t$

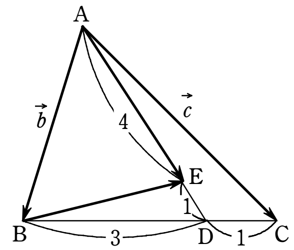
これを解いて　$s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{5}{9}$

$s=\frac{2}{3}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

3 △ABCにおいて，辺BCを3：1に内分する点をDとし，線分ADを4：1に内分する点をEとする。$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BE}$ を表せ。

解答　$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BE}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

解説



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

点Dは線分BCを3：1に内分する点であるから

$\overrightarrow{AD}=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$

点Eは線分ADを4：1に内分する点であるから

$\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\times\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$

$=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{5}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{5}-\vec{b}$

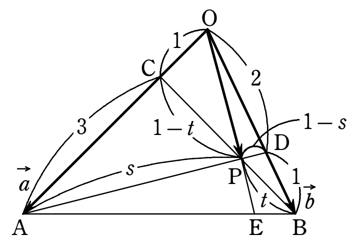
$=-\frac{4}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

4 △OABにおいて，辺OAを1：3，辺OBを2：1に内分する点を，それぞれC，Dとし，また，2線分AD，BCの交点をP，線分OPの延長が辺ABと交わる点をEとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，AE：EBを求めよ。

解答　$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$，AE：EB$=6:1$

解説



AP：PD$=s:(1-s)$

BP：PC$=t:(1-t)$

とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$　…… ①

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　…… ②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}=\frac{1}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから

$1-s=\frac{1}{4}t$，$\frac{2}{3}s=1-t$　　これを解いて　$s=\frac{9}{10}$，$t=\frac{2}{5}$

$s=\frac{9}{10}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

3点O，P，Eは一直線上にあるから，$\overrightarrow{OE}$ は 実数 k を用いて $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OP}$ と表される。

よって　$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{10}k\vec{a}+\frac{3}{5}k\vec{b}$

点Eは線分AB上にあるので　$\frac{1}{10}k+\frac{3}{5}k=1$

これを解いて　$k=\frac{10}{7}$　　よって　$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$

また，$\overrightarrow{OE}=\frac{1\vec{a}+6\vec{b}}{6+1}$ であるから　AE：EB$=6:1$

別解　上の解答から　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

3点O，P，Eは一直線上にあるから，$\overrightarrow{OE}$ は 実数 k を用いて $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OP}$ と表される。

よって　$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{10}k\vec{a}+\frac{3}{5}k\vec{b}$　…… ①

また，AE：EB$=u:(1-u)$ とすると

$\overrightarrow{OE}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$　…… ②

①，② から　$\frac{1}{10}k\vec{a}+\frac{3}{5}k\vec{b}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから

$\frac{1}{10}k=1-u$，$\frac{3}{5}k=u$

これを解いて　$k=\frac{10}{7}$，$u=\frac{6}{7}$

$k=\frac{10}{7}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$

また，$u=\frac{6}{7}$ であるから　AE：EB$=\frac{6}{7}:\left(1-\frac{6}{7}\right)=6:1$

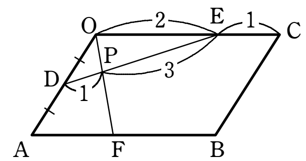
5 平行四辺形OABCにおいて，辺OAの中点をD，辺OCを2：1に内分する点をEとし，線分DEを1：3に内分する点をP，直線OPと直線ABの交点をFとする。

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　四角形OAFEの面積は平行四辺形OABCの面積の何倍であるか。

解答　(1)　$\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}$　　(2)　$\frac{5}{9}$ 倍

解説



(1)　$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{c}$

よって

$\overrightarrow{OP}=\frac{3\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}}{1+3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\vec{c}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}$

Fは直線OP上にあるから，$\overrightarrow{OF}$ は実数 k を用いて $\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OP}$ と表される。

よって　$\overrightarrow{OF}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{c}$　…… ①

また，Fは直線AB上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$ と表される。

よって　$\overrightarrow{OF}=\vec{a}+s\vec{c}$　…… ②

①，② から　$\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{c}=\vec{a}+s\vec{c}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{c}$ は平行でないから

$\frac{3}{8}k=1$，$\frac{1}{6}k=s$　　これを解いて　$k=\frac{8}{3}$，$s=\frac{4}{9}$

$s=\frac{4}{9}$ を ② に代入して　$\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}\pi$

(2) 平行四辺形 OABC の面積を S，四角形 OAFE の面積を S_1 とすると

$$S_1=\triangle \mathrm{OAF}+\triangle \mathrm{OEF}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}S\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}S\right)=\frac{5}{9}S$$

よって，四角形 OAFE の面積は平行四辺形 OABC の面積の $\frac{5}{9}$ 倍である。

6 △OAB において，辺 AB を 1：4 に内分する点を C，辺 OB の中点を D，直線 OC と AD の交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

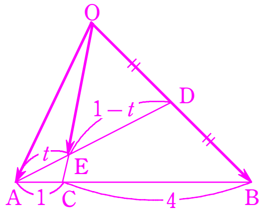
(1) E は OC 上にあるから，k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}={}^{ア}\boxed{}\,k\vec{a}+{}^{イ}\boxed{}\,k\vec{b}$ と表される。空欄に入る数値を求めよ。

(2) k の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 [(1) 10 点 (2) 15 点]

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+4}=\dfrac{4}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{4}{5}k\vec{a}+\dfrac{1}{5}k\vec{b}$

(ア) $\dfrac{4}{5}$ (イ) $\dfrac{1}{5}$



(2) AE：ED $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから $\dfrac{4}{5}k=1-t$，$\dfrac{1}{5}k=\dfrac{1}{2}t$

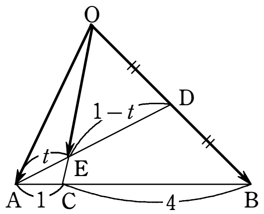
これを解くと $k=\dfrac{5}{6}$ $\left(t=\dfrac{1}{3}\right)$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+4}=\dfrac{4}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{4}{5}k\vec{a}+\dfrac{1}{5}k\vec{b}$

(ア) $\dfrac{4}{5}$ (イ) $\dfrac{1}{5}$



(2) AE：ED $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから $\dfrac{4}{5}k=1-t$，$\dfrac{1}{5}k=\dfrac{1}{2}t$

これを解くと $k=\dfrac{5}{6}$ $\left(t=\dfrac{1}{3}\right)$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

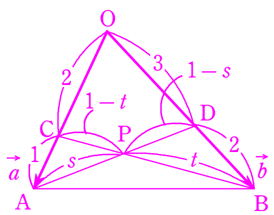
7 △OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，線分 BC，線分 AD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 [25点]

解答 AP：PD $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{5}s\vec{b}$ … ①

BP：PC $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ … ②



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方はただ1通りである。

①，② から $1-s=\dfrac{2}{3}t$，$\dfrac{3}{5}s=1-t$

これを解くと $s=\dfrac{5}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

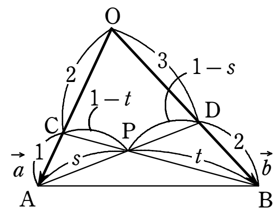
解説

AP：PD $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{5}s\vec{b}$ … ①

BP：PC $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ … ②



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方はただ1通りである。

①，② から $1-s=\dfrac{2}{3}t$，$\dfrac{3}{5}s=1-t$

これを解くと $s=\dfrac{5}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

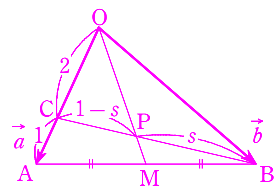
8 △OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 AB の中点を M とし，線分 OM，BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 [15点] (2) OP：PM を求めよ。 [10点]

解答 (1) BP：PC $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{2}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)=\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方はただ1通りである。よって $\dfrac{2}{3}s=\dfrac{k}{2}$，$1-s=\dfrac{k}{2}$

これを解くと $s=\dfrac{3}{5}$，$k=\dfrac{4}{5}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

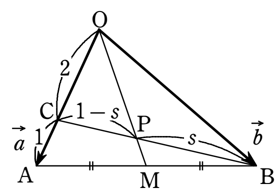
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より OP：PM $=4:1$

解説

(1) BP：PC $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{2}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)=\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方はただ1通りである。よって $\dfrac{2}{3}s=\dfrac{k}{2}$，$1-s=\dfrac{k}{2}$

これを解くと $s=\dfrac{3}{5}$，$k=\dfrac{4}{5}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より OP：PM $=4:1$

9 △OAB の辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 4：1 に内分する点を D とし，AD と BC の交点を P，OP と AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，BP：CP を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，OP：PQ を求めよ。

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，BP：CP $=1:1$

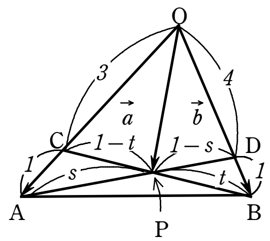
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}$，OP：PQ $=7:1$

解説

(1) AP：PD $=s:(1-s)$，BP：PC $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{4}{5}s\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\dfrac{3}{4}t$，$\dfrac{4}{5}s=1-t$

これを解いて $s=\dfrac{5}{8}$，$t=\dfrac{1}{2}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ また BP：CP $=\dfrac{1}{2}:\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=1:1$

別解 [$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の求め方]

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (x，y は実数) とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{4}{5}\vec{b}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\cdot\dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

点 P は直線 AD 上にあるから $x+\dfrac{5}{4}y=1$ …… ①

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\cdot\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

点 P は直線 BC 上にあるから $\dfrac{4}{3}x+y=1$ …… ②

①，② を解いて $x=\dfrac{3}{8}$，$y=\dfrac{1}{2}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

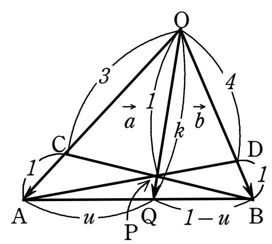
(2) AQ：QB $=u:(1-u)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

また，点 Q は直線 OP 上にあるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (k は実数) とすると，(1) の結果から

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\left(\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{3}{8}k\vec{a}+\dfrac{1}{2}k\vec{b}$



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-u=\dfrac{3}{8}k$，$u=\dfrac{1}{2}k$

これを解いて　$k=\frac{8}{7}$，$u=\frac{4}{7}$

よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　　また　OP：PQ$=1:\left(\frac{8}{7}-1\right)=7:1$

別解　[$\overrightarrow{OQ}$ の求め方]

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}=\frac{3}{8}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OB}$（$k$ は実数）とすると，点 Q は直線 AB 上にあるから　$\frac{3}{8}k+\frac{1}{2}k=1$　　ゆえに　$k=\frac{8}{7}$

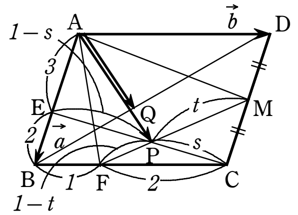
したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$

10 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 3：2 に内分する点を E，辺 BC を 1：2 に内分する点を F，辺 CD の中点を M とする。線分 CE と線分 FM の交点を P とし，直線 AP と対角線 BD の交点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル　(1) $\overrightarrow{AP}$　(2) $\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{19}{23}\vec{a}+\frac{13}{23}\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{AQ}=\frac{19}{32}\vec{a}+\frac{13}{32}\vec{b}$

解説

(1) CP：PE$=s:(1-s)$，MP：PF$=t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AE}+(1-s)\overrightarrow{AC}$
$=s\cdot\frac{3}{5}\vec{a}+(1-s)(\vec{a}+\vec{b})$
$=\left(1-\frac{2}{5}s\right)\vec{a}+(1-s)\vec{b}$

また　$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AM}$
$=t\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-t)\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1+t}{2}\vec{a}+\frac{3-2t}{3}\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-\frac{2}{5}s=\frac{1+t}{2}$，$1-s=\frac{3-2t}{3}$

ゆえに　$s=\frac{10}{23}$，$t=\frac{15}{23}$　　よって　$\overrightarrow{AP}=\frac{19}{23}\vec{a}+\frac{13}{23}\vec{b}$

(2) 点 Q は直線 AP 上にあるから　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）

よって　$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{19}{23}\vec{a}+\frac{13}{23}\vec{b}\right)=\frac{19}{23}k\vec{a}+\frac{13}{23}k\vec{b}$　……①

点 Q は線分 BD 上にあるから　$\frac{19}{23}k+\frac{13}{23}k=1$

ゆえに　$k=\frac{23}{32}$　　したがって　$\overrightarrow{AQ}=\frac{19}{32}\vec{a}+\frac{13}{32}\vec{b}$

別解　BQ：QD$=u:(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{AQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$　……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，①，② より　$\frac{19}{23}k=1-u$，$\frac{13}{23}k=u$

これを解いて　$k=\frac{23}{32}$，$u=\frac{13}{32}$　　よって　$\overrightarrow{AQ}=\frac{19}{32}\vec{a}+\frac{13}{32}\vec{b}$

11 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) 対角線 CE と DF の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

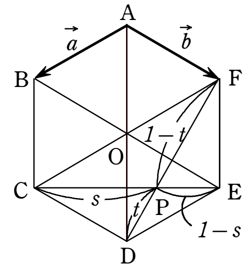
(3) 対角線 BF と線分 AP の交点を Q とするとき，BQ：QF を求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+2\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$

(3) BQ：QF$=5:4$

解説

正六角形の 3 つの対角線 AD，BE，CF の交点を O とする。



(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AO}=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) CP：PE$=s:(1-s)$，DP：PF$=t:(1-t)$ とする。

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)(2\vec{a}+\vec{b})+s(\vec{a}+2\vec{b})$
$=(2-s)\vec{a}+(1+s)\vec{b}$

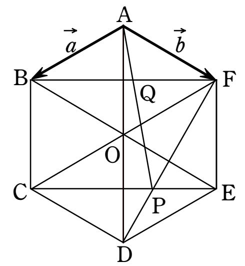
$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AF}=(1-t)(2\vec{a}+2\vec{b})+t\vec{b}$
$=(2-2t)\vec{a}+(2-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，$\overrightarrow{AP}$ について

$2-s=2-2t$，$1+s=2-t$

これを解いて　$s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{1}{3}$　　よって　$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$　……①

(3) $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）とすると，① から



$\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{3}k\vec{a}+\frac{5}{3}k\vec{b}$

Q は BF 上にあるから　$\frac{4}{3}k+\frac{5}{3}k=1$

これを解いて　$k=\frac{1}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}=\frac{4\vec{a}+5\vec{b}}{5+4}$

したがって　BQ：QF$=5:4$

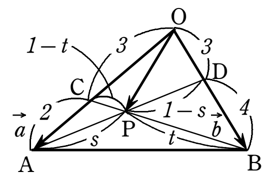
12 △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 3：4 に内分する点を D，線分 AD と BC との交点を P とし，直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OP}$　　(2) $\overrightarrow{OQ}$

解答　(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

解説

(1) AP：PD$=s:(1-s)$，BP：PC$=t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}$，

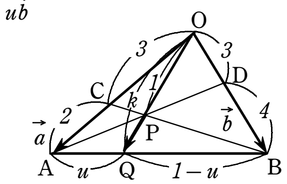
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

よって　$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-s=\frac{3}{5}t$，$\frac{3}{7}s=1-t$

これを解いて　$s=\frac{7}{13}$，$t=\frac{10}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2) AQ：QB$=u:(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$



また，点 Q は直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）とすると，(1) の結果から

$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}\right)=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

よって　$(1-u)\vec{a}+u\vec{b}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-u=\frac{6}{13}k$，$u=\frac{3}{13}k$

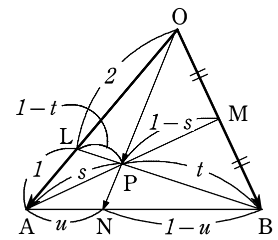
これを解いて　$k=\frac{13}{9}$，$u=\frac{1}{3}$　　したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

13 △OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を L，辺 OB の中点を M，BL と AM の交点を P とし，直線 OP と辺 AB の交点を N とする。$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{ON}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

解説

AP：PM$=s:(1-s)$，BP：PL$=t:(1-t)$ とする。



$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OM}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{s}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OL}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

よって　$(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{s}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから

$1-s=\frac{2}{3}t$，　$\frac{s}{2}=1-t$

これを解いて　$s=\frac{1}{2}$，　$t=\frac{3}{4}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

AN：NB$=u:(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{ON}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OB}$

点 N は直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）とすると

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから

$1-u=\frac{1}{2}k$，$u=\frac{1}{4}k$　　これを解いて　$k=\frac{4}{3}$，$u=\frac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

別解 1.　△OAM と直線 BL について，メネラウスの定理により

$\frac{OL}{LA}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MB}{BO}=1$　　よって　$\frac{2}{1}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{1}{2}=1$

ゆえに　$\frac{AP}{PM}=1$　すなわち　AP：PM$=1:1$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

△OAB において，チェバの定理により

$\frac{OL}{LA}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MO}=1$　　よって　$\frac{2}{1}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot\frac{1}{1}=1$

ゆえに　$\frac{AN}{NB}=\frac{1}{2}$　すなわち　AN：NB$=1:2$

したがって　$\overrightarrow{ON}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

別解 2.　$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（$x$，$y$ は実数）とする。

$\overrightarrow{OA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OL}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}x\overrightarrow{OL}+y\overrightarrow{OB}$

P は直線 BL 上にあるから　$\frac{3}{2}x+y=1$ ……①

$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+2y\overrightarrow{OM}$

P は直線 AM 上にあるから　$x+2y=1$ ……②

①，② を解いて　$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

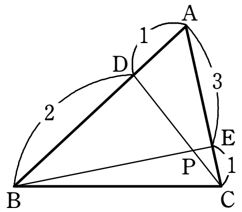
$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）とすると　$\overrightarrow{ON}=\frac{k}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{4}\overrightarrow{OB}$

N は直線 AB 上にあるから　$\frac{k}{2}+\frac{k}{4}=1$

これを解いて　$k=\frac{4}{3}$

したがって　$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

14 △ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，辺 AC を 3：1 に内分する点を E とし，線分 CD，BE の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



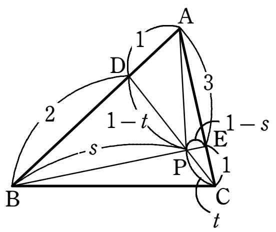
解答　$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

解説

BP：PE＝s：$(1-s)$，CP：PD＝t：$(1-t)$とすると

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{4}s\vec{c}$ ……①

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$ ……②



①，② から　$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{4}s\vec{c}=\frac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから　$1-s=\frac{1}{3}t$，$\frac{3}{4}s=1-t$

これを解いて　$s=\frac{8}{9}$，$t=\frac{1}{3}$

$s=\frac{8}{9}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{AP}=\left(1-\frac{8}{9}\right)\vec{b}+\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\vec{c}=\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

別解　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PE}\times\frac{EC}{CA}\times\frac{AD}{DB}=1$$

が成り立つ。

$\frac{EC}{CA}=\frac{1}{4}$，$\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$ であるから　$\frac{BP}{PE}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=1$　すなわち　$\frac{BP}{PE}=8$

よって，点 P は線分 BE を 8：1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AE}}{8+1}=\frac{\vec{b}+8\times\frac{3}{4}\vec{c}}{9}=\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

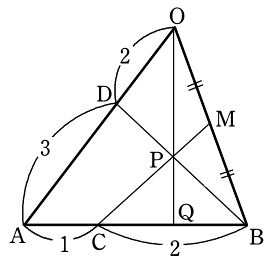
参考　メネラウスの定理（数学A）

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない 1 つの直線 ℓ と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき　$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$

15 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を 1：2 に内分する点を C，辺 OA を 2：3 に内分する点を D，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき，AQ：QB を求めよ。



解答　(1)　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$　　(2)　2：1

解説

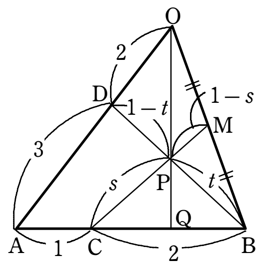
(1)　CP：PM＝s：$(1-s)$，BP：PD＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OM}=(1-s)\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+\frac{s}{2}\vec{b}$

$=\frac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\frac{2+s}{6}\vec{b}$ ……①

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ ……②



①，② から　$\frac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\frac{2+s}{6}\vec{b}=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\frac{2(1-s)}{3}=\frac{2}{5}t$，$\frac{2+s}{6}=1-t$

これを解いて　$s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{5}{9}$

$t=\frac{5}{9}$ を ② に代入して　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\vec{a}+\left(1-\frac{5}{9}\right)\vec{b}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$ ……③

(2)　点 Q が直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k がある。

③ から　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{9}k\vec{a}+\frac{4}{9}k\vec{b}$ ……④

また，AQ：QB＝u：$(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$ ……⑤

④，⑤ から　$\frac{2}{9}k\vec{a}+\frac{4}{9}k\vec{b}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\frac{2}{9}k=1-u$，$\frac{4}{9}k=u$

これを解いて　$u=\frac{2}{3}$，$k=\frac{3}{2}$

したがって　AQ：QB＝$\frac{2}{3}$：$\frac{1}{3}$＝2：1

参考　次の項目「ベクトル方程式」で学習する以下のことを用いてもよい。

点 P$(\vec{p})$ が 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線上にある $\iff$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

別解　点 Q が直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k がある。

③ から　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{9}k\vec{a}+\frac{4}{9}k\vec{b}$

点 Q は直線 AB 上にあるから　$\frac{2}{9}k+\frac{4}{9}k=1$

よって　$k=\frac{3}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\frac{1\cdot\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}$

よって　AQ：QB＝2：1

16 △OAB において，辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 2：3 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$

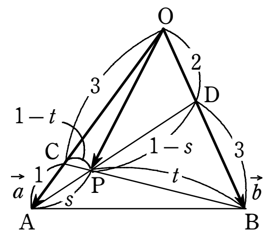
解説

AP：PD＝s：$(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}$ ……①

BP：PC＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ ……②



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$1-s=\frac{3}{4}t$，$\frac{2}{5}s=1-t$

これを解くと　$s=\frac{5}{14}$，$t=\frac{6}{7}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$

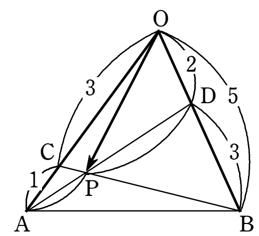
別解　[メネラウスの定理（数学 A で学習）を利用]

△OAD と直線 BC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BO}=1$$

すなわち　$\frac{3}{1}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{3}{5}=1$

よって，$\frac{AP}{PD}=\frac{5}{9}$ であるから　AP：PD＝5：9



したがって

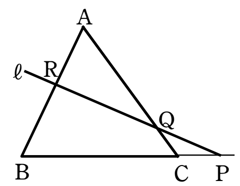
$$\overrightarrow{OP}=\frac{9\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OD}}{5+9}=\frac{9}{14}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{14}\overrightarrow{OD}=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{5}{14}\times\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{9}{14}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$$

参考　[メネラウスの定理]

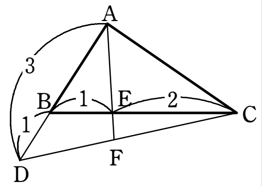
△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。これをメネラウスの定理という。



17 △ABCにおいて，辺ABを3：1に外分する点をD，辺BCを1：2に内分する点をEとし，直線AEと直線CDの交点をFとする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



解答　$\overrightarrow{AF}=\frac{6}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$

解説

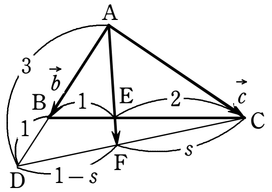
CF：FD$=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{AF}=s\overrightarrow{AD}+(1-s)\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$　……①

また，点Fは直線AE上にあるから，

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$（$k$ は実数）

と表される。



$\overrightarrow{AE}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{2}{3}k\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}$　……②

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから，①，② より

$\frac{3}{2}s=\frac{2}{3}k$，$1-s=\frac{k}{3}$

これを解くと　$s=\frac{4}{7}$，$k=\frac{9}{7}$

したがって　$\overrightarrow{AF}=\frac{6}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$

参考　メネラウスの定理を用いてもよい。メネラウスの定理から，CF：FDを求めることができる。

18 △OABにおいて，辺OAを2：3に内分する点をC，辺OBを5：3に内分する点をD，辺ABの中点をMとし，線分BCと線分MDの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

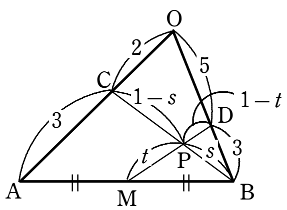
(2) 直線OPと辺ABの交点をQとするとき，AQ：QBを求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{7}{12}\vec{b}$　(2) 7：2

解説

(1) BP：PC$=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$　……①



MP：PD$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{OD}$

$=(1-t)\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{5}{8}t\vec{b}$

$=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{4+t}{8}\vec{b}$　……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

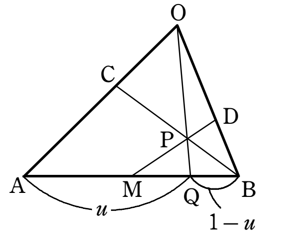
$\frac{2}{5}s=\frac{1-t}{2}$，$1-s=\frac{4+t}{8}$

これを解くと　$s=\frac{5}{12}$，$t=\frac{2}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{7}{12}\vec{b}$

(2) 点Qは直線OP上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）と表される。

よって，(1) から



$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{7}{12}\vec{b}\right)$

$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{7}{12}k\vec{b}$　……③

AQ：QB$=u:(1-u)$ とすると

$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OB}$

$=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$　……④

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，③，④ より　$\frac{k}{6}=1-u$，$\frac{7}{12}k=u$

これを解くと　$k=\frac{4}{3}$，$u=\frac{7}{9}$

したがって　AQ：QB$=\frac{7}{9}:\frac{2}{9}=7:2$

参考　2点A，Bが異なるとき

点Pが直線AB上にある

$\iff$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ かつ $s+t=1$ となる実数 s，t がある

これを用いると，(2) は次のように解くことができる。

点Qは直線AB上にあり，$\overrightarrow{OQ}=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{7}{12}k\vec{b}$ であるから　$\frac{k}{6}+\frac{7}{12}k=1$

ゆえに　$k=\frac{4}{3}$

よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{7}{12}\times\frac{4}{3}\vec{b}=\frac{2\vec{a}+7\vec{b}}{9}=\frac{2\vec{a}+7\vec{b}}{7+2}$

したがって，点Qは線分ABを7：2に内分する点であるから

AQ：QB$=7:2$

19 △OABにおいて，辺OAを3：1に内分する点をC，辺OBを4：1に内分する点をDとする。また，線分ADと線分BCの交点をP，直線OPと辺ABの交点をQとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

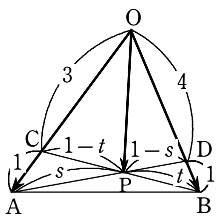
(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　(2) OP：PQを求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　(2) 7：1

解説

(1) AP：PD$=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}$　……①



BP：PC$=t:(1-t)$ とすると

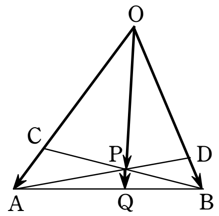
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$1-s=\frac{3}{4}t$，$\frac{4}{5}s=1-t$　　これを解くと　$s=\frac{5}{8}$，$t=\frac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2) 点Qは直線OP上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）と表される。よって，(1) から



$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$

点Qは直線AB上にあるから　$\frac{3}{8}k+\frac{1}{2}k=1$

したがって　$k=\frac{8}{7}$

よって，$\overrightarrow{OQ}=\frac{8}{7}\overrightarrow{OP}$ であるから　OP：PQ$=7:1$