円の接線クイズ

1 次の円の，円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=20$，P$(-2,\ 4)$　　(2) $x^2+y^2=9$，P$(-2,\ -\sqrt{5})$

解答　(1) $x-2y=-10$　(2) $2x+\sqrt{5}y=-9$

解説

(1) $-2x+4y=20$　よって　$x-2y=-10$

(2) $-2x-\sqrt{5}y=9$　よって　$2x+\sqrt{5}y=-9$

2 点 A$(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$2x+y=5$，$-x+2y=5$

解説

接点を P$(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1{}^2+y_1{}^2=5$　……①

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$x_1x+y_1y=5$　……②

この直線が点 A を通るから

$x_1+3y_1=5$　……③

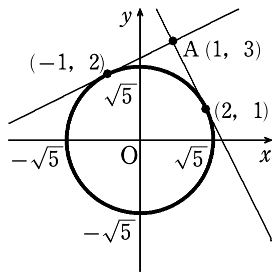
①，③から x_1 を消去して整理すると

$y_1{}^2-3y_1+2=0$　　ゆえに　$y_1=1,\ 2$

③から　$y_1=1$ のとき　$x_1=2$，　$y_1=2$ のとき　$x_1=-1$

よって，接線の方程式②は，次のようになる。

$2x+y=5$，　$-x+2y=5$



3 点 A$(-3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$\begin{cases}\text{接線}\ y=1\\ \text{接点}\ (0,\ 1)\end{cases}$　$\begin{cases}\text{接線}\ 3x+4y+5=0\\ \text{接点}\ \left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)\end{cases}$

解説

接点を P$(x_1,\ y_1)$ とすると　$x_1{}^2+y_1{}^2=1$　……①

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$x_1x+y_1y=1$　……②

この直線が点 A を通るから　$-3x_1+y_1=1$　……③

①，③から y_1 を消去して整理すると　$5x_1{}^2+3x_1=0$

ゆえに　$x_1=0,\ -\dfrac{3}{5}$

③から　$x_1=0$ のとき　$y_1=1$

$x_1=-\dfrac{3}{5}$ のとき　$y_1=-\dfrac{4}{5}$

このとき，接線の方程式②は，それぞれ　$y=1$，$3x+4y+5=0$

答　$\begin{cases}\text{接線}\ y=1\\ \text{接点}\ (0,\ 1)\end{cases}$　$\begin{cases}\text{接線}\ 3x+4y+5=0\\ \text{接点}\ \left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)\end{cases}$

4 次のような円の接線の方程式を求めよ。

(1) 円 $x^2+y^2=9$ の接線で，直線 $4x+3y=1$ に平行なもの

(2) 円 $x^2+y^2=9$ の接線で，直線 $3x+y=5$ に垂直なもの

解答　(1) $4x+3y=15$，$4x+3y=-15$　(2) $x-3y=3\sqrt{10}$，$x-3y=-3\sqrt{10}$

解説

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると　$x_1{}^2+y_1{}^2=9$　……①

接線の方程式は　$x_1x+y_1y=9$　……②

(1) ②が直線 $4x+3y=1$ に平行であるための必要十分条件は　$4y_1-3x_1=0$　……③

①，③から　$x_1=\dfrac{12}{5}$，$y_1=\dfrac{9}{5}$　または　$x_1=-\dfrac{12}{5}$，$y_1=-\dfrac{9}{5}$

よって，求める接線の方程式は，②から

$\dfrac{12}{5}x+\dfrac{9}{5}y=9$　または　$-\dfrac{12}{5}x-\dfrac{9}{5}y=9$

すなわち　$4x+3y=15$，$4x+3y=-15$

(2) ②が直線 $3x+y=5$ に垂直であるための必要十分条件は　$3x_1+y_1=0$　……④

①，④から　$x_1=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y_1=-\dfrac{9}{\sqrt{10}}$　または　$x_1=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$y_1=\dfrac{9}{\sqrt{10}}$

よって，求める接線の方程式は，②から

$\dfrac{3}{\sqrt{10}}x-\dfrac{9}{\sqrt{10}}y=9$　または　$-\dfrac{3}{\sqrt{10}}x+\dfrac{9}{\sqrt{10}}y=9$

すなわち　$x-3y=3\sqrt{10}$，$x-3y=-3\sqrt{10}$

別解 1　(1)　直線 $4x+3y=1$ に平行な直線の方程式は $4x+3y=c$ とおける。

$y=-\dfrac{1}{3}(4x-c)$

を $x^2+y^2=9$ に代入して

$25x^2-8cx+c^2-81=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-4c)^2-25(c^2-81)=-9(c^2-225)$

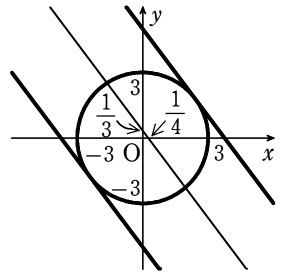
直線が円に接するための必要十分条件は $D=0$ であるから

$-9(c^2-225)=0$　　すなわち　　$c^2=225$

よって　$c=\pm 15$

ゆえに，求める接線の方程式は

$4x+3y=15$，$4x+3y=-15$



(2)　直線 $3x+y=5$ に垂直な直線の方程式は

$x-3y=c$ とおける。

$x=3y+c$ を $x^2+y^2=9$ に代入して

$10y^2+6cy+c^2-9=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(3c)^2-10(c^2-9)=-c^2+90$

直線が円に接するための必要十分条件は

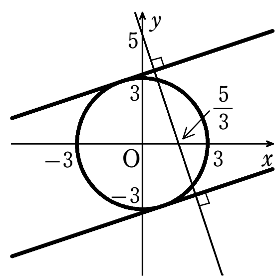
$D=0$ であるから

$-c^2+90=0$　すなわち　$c^2=90$

よって　$c=\pm 3\sqrt{10}$

ゆえに，求める接線の方程式は

$x-3y=3\sqrt{10}$，$x-3y=-3\sqrt{10}$



別解 2　(1)　直線 $4x+3y=1$ に平行な直線

$4x+3y+c=0$ と円の中心 $(0,\ 0)$ との距離は

$\dfrac{|c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|c|}{5}$

これが半径 3 に等しいから　$\dfrac{|c|}{5}=3$

よって　$c=\pm 15$

求める接線の方程式は

$4x+3y+15=0$，$4x+3y-15=0$

(2)　直線 $3x+y=5$ に垂直な直線 $x-3y+c=0$ と円の中心 $(0,\ 0)$ との距離は

$\dfrac{|c|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|c|}{\sqrt{10}}$

これが半径 3 に等しいから　$\dfrac{|c|}{\sqrt{10}}=3$

よって　$c=\pm 3\sqrt{10}$

求める接線の方程式は　$x-3y+3\sqrt{10}=0$，$x-3y-3\sqrt{10}=0$

5 点 P$(0,\ -3)$ を通り，円 $x^2+y^2+2x-1=0$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$y=-x-3$，$(-2,\ -1)$；$y=7x-3$，$\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right)$

解説

直線 $x=0$ は接線にはなりえないので，求める接線の方程式は，傾きを m として

$y=mx-3$　……①

としてよい。

①を円の方程式 $x^2+y^2+2x-1=0$ ……② に代入して整理すると

$(m^2+1)x^2-2(3m-1)x+8=0$　……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(3m-1)^2-(m^2+1)\cdot 8$

$=m^2-6m-7=(m+1)(m-7)$

直線①が円②に接するための必要十分条件は $D=0$ であるから

$(m+1)(m-7)=0$　　これを解いて　　$m=-1,\ 7$

このとき，③の重解は　$x=\dfrac{3m-1}{m^2+1}$　……④

[1] $m=-1$ のとき　接線の方程式は　$y=-x-3$

また，このとき④から　$x=\dfrac{3\cdot(-1)-1}{(-1)^2+1}=\dfrac{-4}{2}=-2$

$y=-1\cdot(-2)-3=-1$

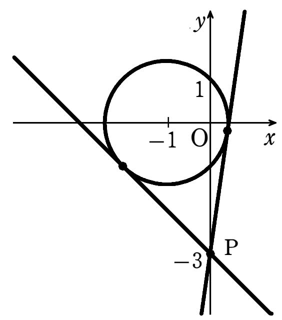
ゆえに，接点の座標は　$(-2,\ -1)$

[2] $m=7$ のとき　接線の方程式は　$y=7x-3$

また，このとき④から　$x=\dfrac{3\cdot 7-1}{7^2+1}=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$

$y=7\cdot\dfrac{2}{5}-3=-\dfrac{1}{5}$

ゆえに，接点の座標は　$\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right)$



6 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 上の点 $(4,\ 2)$ におけるこの円の接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y-20=0$

解説

円の中心 $(1,\ -2)$ と接点 $(4,\ 2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{2-(-2)}{4-1}=\frac{4}{3}$$

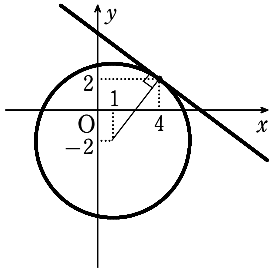
円の接線と接点を通る半径とは垂直であるから，

点 $(4,\ 2)$ を接点とする接線の傾きは $-\frac{3}{4}$ である。

よって，接線の方程式は

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-4)$$

ゆえに　$3x+4y-20=0$



別解 1　円 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ を，原点が中心になるように平行移動するには，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すればよい。

このように平行移動すると，円は $x^2+y^2=25$ に，接点は $(3,\ 4)$ に移る。

点 $(3,\ 4)$ における円 $x^2+y^2=25$ の接線の方程式は $3x+4y=25$ である。

これを x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$3(x-1)+4(y+2)=25 \quad すなわち \quad 3x+4y-20=0$$

別解 2　直線 $x=4$ は円の接線にならないから，求める接線の方程式は $y-2=m(x-4)$

すなわち $mx-y-4m+2=0$ とおける。

円の接線と円の中心の距離は，円の半径に等しいから　$\dfrac{|-3m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$

よって　$(-3m+4)^2=25(m^2+1)$　　整理して　$16m^2+24m+9=0$

すなわち　$(4m+3)^2=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{3}{4}$

よって，求める接線の方程式は　$y-2=-\dfrac{3}{4}(x-4)$

ゆえに　$3x+4y-20=0$

7 次の円の，円上の点 P における接線の方程式を求めよ。[各 5 点]

(1)　$x^2+y^2=5$，$\mathrm{P}(1,\ -2)$　　(2)　$x^2+y^2=6$，$\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{5})$

解答　(1)　$x-2y=5$　　(2)　$-x+\sqrt{5}\,y=6$

解説

(1)　$x-2y=5$　　(2)　$-x+\sqrt{5}\,y=6$

8 点 $\mathrm{A}(3,\ 4)$ から，円 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。[25 点]

解答　$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ を変形すると

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4 \cdots\cdots ①$$

点 $(3,\ 4)$ を通る直線のうち，直線 $x=3$ は接線でないから，接線の方程式は

$$y-4=m(x-3) \cdots\cdots ②$$

とおける。変形すると

$$mx-y-3m+4=0 \cdots\cdots ③$$

円 ① の中心 $(-1,\ 2)$ と直線 ③ の距離は，円 ① の半径 2 に等しいから

$$\frac{|-m-2-3m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

よって　$(-4m+2)^2=4(m^2+1)$　すなわち　$m(3m-4)=0$

ゆえに　$m=0,\ \dfrac{4}{3}$

よって，これらを ② に代入すると，求める接線の方程式は

$$y=4,\quad y=\frac{4}{3}x$$

解説

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ を変形すると

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4 \cdots\cdots ①$$

点 $(3,\ 4)$ を通る直線のうち，直線 $x=3$ は接線でないから，接線の方程式は

$$y-4=m(x-3) \cdots\cdots ②$$

とおける。変形すると

$$mx-y-3m+4=0 \cdots\cdots ③$$

円 ① の中心 $(-1,\ 2)$ と直線 ③ の距離は，円 ① の半径 2 に等しいから

$$\frac{|-m-2-3m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

よって　$(-4m+2)^2=4(m^2+1)$　すなわち　$m(3m-4)=0$

ゆえに　$m=0,\ \dfrac{4}{3}$

よって，これらを ② に代入すると，求める接線の方程式は

$$y=4,\quad y=\frac{4}{3}x$$

9 次の円の，与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=10$，点 $(1,\ -3)$　　(2)　$x^2+y^2=13$，点 $(-3,\ 2)$

解答　(1)　$x-3y=10$　　(2)　$-3x+2y=13$

解説

(1)　$1\cdot x+(-3)y=10$　すなわち　$x-3y=10$

(2)　$(-3)x+2y=13$　すなわち　$-3x+2y=13$

10 次の円の周上の点 $\mathrm{A}(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25$$

解答　$3x+4y=36$

解説

円の中心を $\mathrm{C}(1,\ 2)$ とすると，直線 CA の傾きは　$\dfrac{6-2}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

求める接線の傾きを m とすると　$m\cdot\dfrac{4}{3}=-1$　　よって　$m=-\dfrac{3}{4}$

接点が $\mathrm{A}(4,\ 6)$ であるから，接線の方程式は

$$y-6=-\frac{3}{4}(x-4) \quad すなわち \quad 3x+4y=36$$

11 円 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 上の点 $\mathrm{A}(6,\ 8)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=50$

解説

(解答 1)　円の中心を $\mathrm{C}(3,\ 4)$ とする。

直線 CA の傾きは　$\dfrac{8-4}{6-3}=\dfrac{4}{3}$

よって，求める接線の傾きは　$-\dfrac{3}{4}$

接点が $\mathrm{A}(6,\ 8)$ であるから，求める接線の方程式は

$$y-8=-\frac{3}{4}(x-6) \quad すなわち \quad 3x+4y=50$$

(解答 2)　求める接線は，点 A を通り，x 軸に垂直でないから，

$$y=m(x-6)+8 \quad すなわち \quad mx-y-6m+8=0$$

と表される。中心 $(3,\ 4)$ と接線の距離が 5 であるから

$$\frac{|m\cdot 3-4-6m+8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$$

よって　$|-3m+4|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(-3m+4)^2=25(m^2+1)$

整理すると　$(4m+3)^2=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{3}{4}$

よって，求める接線の方程式は　$3x+4y=50$

(解答 3)　中心を原点に移した円 $x^2+y^2=25$ の $\mathrm{A}'(6-3,\ 8-4)$ における接線の方程式は

$$3x+4y=25$$

中心を $(3,\ 4)$ に戻すと　$3(x-3)+4(y-4)=25$

よって，求める接線の方程式は　$3x+4y=50$

参考　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は，次の方程式で表される。

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

これを公式として用いると，求める接線の方程式は

$$(6-3)(x-3)+(8-4)(y-4)=25$$

よって　$3x+4y=50$

12 (1)　点 $(-1,\ 2)$ を中心とし，直線 $4x+3y-12=0$ に接する円の方程式を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ に接し，傾きが 2 の直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$　　(2)　$y=2x\pm 3\sqrt{5}$

解説

(1)　求める円の方程式は，半径を r とすると

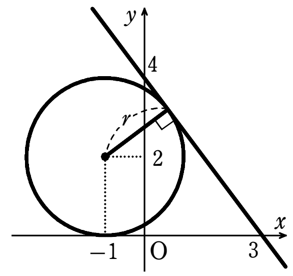
$$(x+1)^2+(y-2)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

円 ① が直線 $4x+3y-12=0$ …… ② に接するための条件は，円の中心 $(-1,\ 2)$ と直線 ② との距離が円の半径に等しいことであるから

$$r=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 2-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

よって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4$$



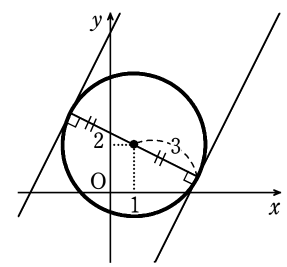
(2)　円の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，求める直線の傾きは 2 であるから，その方程式を　$y=2x+n$　…… ②

すなわち，$2x-y+n=0$　とする。

直線 ② が円 ① に接するための条件は，円の中心 $(1,\ 2)$ と直線 ② の距離が円の半径 3 に等しいことであるから　$\dfrac{|2\cdot 1-2+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$



よって　$|n|=3\sqrt{5}$　すなわち　$n=\pm3\sqrt{5}$

これを ② に代入して，求める直線の方程式は　$y=2x\pm3\sqrt{5}$

13 (1)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，直線 $3x+4y=12$ と両座標軸に接する円の方程式を求めよ。

(2)　円 $x^2+2x+y^2-2y=0$ に接し，傾きが -1 の直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(x-6)^2+(y-6)^2=36$，$(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　(2)　$y=-x\pm2$

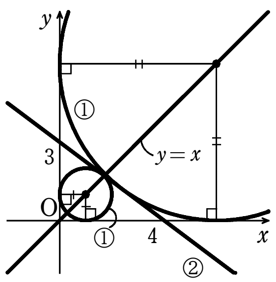
解説

(1)　中心は直線 $y=x$ 上にあるから，その座標を $(t,\ t)$ とおくことができる。

また，円は両座標軸に接するから，半径は $|t|$ であり，求める円の方程式は，次のように表される。

$(x-t)^2+(y-t)^2=|t|^2$　…… ①

円 ① が直線 $3x+4y=12$ …… ② に接するための条件は，円の中心 $(t,\ t)$ と直線 ② との距離が円の半径 $|t|$ に等しいことであるから　$\dfrac{|3t+4t-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|t|$



ゆえに　$|7t-12|=5|t|$　　よって　$7t-12=\pm5t$

$7t-12=5t$ から　$t=6$，　$7t-12=-5t$ から　$t=1$

これを ① に代入して，求める円の方程式は

$(x-6)^2+(y-6)^2=36$，$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

(2)　求める直線の方程式を $y=-x+k$ …… ① とし，$x^2+2x+y^2-2y=0$ …… ② とする。

① から　$x+y-k=0$　　② から　$(x+1)^2+(y-1)^2=2$

直線 ① と円 ② が接するための条件は，円の中心 $(-1,\ 1)$ と直線 ① の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいことである。

したがって　$\dfrac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$　すなわち　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ゆえに　$|k|=2$　　よって　$k=\pm2$

これを ① に代入して，求める直線の方程式は　$y=-x\pm2$

別解　① を ② に代入すると　$x^2+2x+(-x+k)^2-2(-x+k)=0$

整理して　$2x^2+2(2-k)x+k^2-2k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2-k)^2-2(k^2-2k)=4-k^2$

直線 ① と円 ② が接するための条件は，$D=0$ であるから　$4-k^2=0$

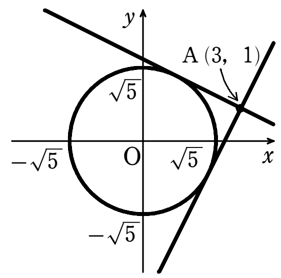
よって　$k=\pm2$

これを ① に代入して，求める直線の方程式は　$y=-x\pm2$

14 点 A $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$x+2y=5$，$2x-y=5$

解説



接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x+y_1y=5$

これが点 $(3,\ 1)$ を通るから

$3x_1+y_1=5$

よって　$y_1=5-3x_1$　…… ①

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=5$ 上にあるから

${x_1}^2+{y_1}^2=5$　…… ②

① を ② に代入して　${x_1}^2+(5-3x_1)^2=5$

整理すると　${x_1}^2-3x_1+2=0$　　ゆえに　$x_1=1,\ 2$

① から　$x_1=1$ のとき　$y_1=2$，　$x_1=2$ のとき　$y_1=-1$

したがって，接線の方程式は　$x+2y=5$，$2x-y=5$

15 点 $(2,\ 4)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

解答　順に $3x+y=10$，$(3,\ 1)$；$-x+3y=10$，$(-1,\ 3)$

解説

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は　$x_1x+y_1y=10$

これが点 $(2,\ 4)$ を通るから　$2x_1+4y_1=10$

よって　$x_1=5-2y_1$　…… ①

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから　${x_1}^2+{y_1}^2=10$　…… ②

① を ② に代入して　$(5-2y_1)^2+{y_1}^2=10$

整理すると　${y_1}^2-4y_1+3=0$　　ゆえに　$y_1=1,\ 3$

① から　$y_1=1$ のとき　$x_1=3$，　$y_1=3$ のとき　$x_1=-1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$3x+y=10$，$(3,\ 1)$ と $-x+3y=10$，$(-1,\ 3)$

16 点 A $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する 2 本の接線の接点を P，Q とする。このとき，直線 PQ の方程式を求めよ。

解答　$3x+y=5$

解説

$\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(p',\ q')$ とすると，接線の方程式はそれぞれ

$px+qy=5$，　$p'x+q'y=5$

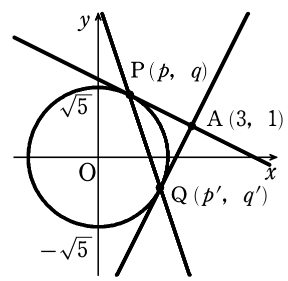
点 A $(3,\ 1)$ を通るから，それぞれ

$3p+q=5$，　$3p'+q'=5$

これは $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(p',\ q')$ が直線 $3x+y=5$ 上にあることを示している。

したがって，直線 PQ の方程式は

$3x+y=5$



17 点 $(2,\ -3)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた 2 本の接線の 2 つの接点を結ぶ直線の方程式を求めよ。

解答　$2x-3y=10$

解説

2 つの接点を $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(p',\ q')$ とすると，接線の方程式は，それぞれ

$px+qy=10$，$p'x+q'y=10$

点 $(2,\ -3)$ を通るから，それぞれ

$2p-3q=10$，$2p'-3q'=10$

を満たし，これは 2 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(p',\ q')$ が直線 $2x-3y=10$ 上にあることを示している。

したがって，求める直線の方程式は　$2x-3y=10$

18 次の円の，円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=9$，点 $\mathrm{P}(1,\ 2\sqrt{2})$　　(2)　$x^2+y^2=100$，点 $\mathrm{P}(-6,\ 8)$

(3)　$x^2+y^2=49$，点 $\mathrm{P}(-7,\ 0)$

解答　(1)　$x+2\sqrt{2}y=9$　　(2)　$-3x+4y=50$　　(3)　$x=-7$

解説

(1)　$1\cdot x+2\sqrt{2}y=9$　　すなわち　$x+2\sqrt{2}y=9$

(2)　$(-6)x+8y=100$　　すなわち　$-3x+4y=50$

(3)　$(-7)x+0\cdot y=49$　　すなわち　$x=-7$

19 次の点を通り，与えられた円に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1)　点 $(4,\ 2)$，$x^2+y^2=4$　　(2)　点 $(-2,\ 4)$，$x^2+y^2=10$

解答　(1)　$y=2$，$(0,\ 2)$；$4x-3y=10$，$\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

(2)　$-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

解説

(1)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから　${x_1}^2+{y_1}^2=4$　…… ①

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=4$　…… ②

この直線が点 $(4,\ 2)$ を通るから　$4x_1+2y_1=4$

よって　$y_1=2-2x_1$　…… ③

③ を ① に代入して　${x_1}^2+(2-2x_1)^2=4$

ゆえに　$5{x_1}^2-8x_1=0$

これを解いて　$x_1=0,\ \dfrac{8}{5}$

[1]　$x_1=0$ のとき，③ から　$y_1=2$

よって，接点の座標は　$(0,\ 2)$

接線の方程式は，② から　$0\cdot x+2\cdot y=4$

すなわち　$y=2$

[2]　$x_1=\dfrac{8}{5}$ のとき，③ から　$y_1=-\dfrac{6}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

接線の方程式は，② から　$\dfrac{8}{5}\cdot x+\left(-\dfrac{6}{5}\right)\cdot y=4$

すなわち　$4x-3y=10$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから　${x_1}^2+{y_1}^2=10$　…… ①

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=10$　…… ②

この直線が点 $(-2,\ 4)$ を通るから　$-2x_1+4y_1=10$

よって　$x_1=2y_1-5$ ……③

③ を ① に代入して　$(2y_1-5)^2+y_1{}^2=10$

ゆえに　$y_1{}^2-4y_1+3=0$

これを解いて　$y_1=1,\ 3$

[1]　$y_1=1$ のとき，③ から　$x_1=-3$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，② から　$-3\cdot x+1\cdot y=10$

すなわち　$-3x+y=10$

[2]　$y_1=3$ のとき，③ から　$x_1=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，② から　$1\cdot x+3\cdot y=10$

すなわち　$x+3y=10$

20 円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$2x-3y+2=0$

解説

円の方程式を変形すると　$(x+3)^2+(y-3)^2=13$

円の中心 $(-3,\ 3)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{0-3}{-1+3}=-\dfrac{3}{2}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(-1,\ 0)$ を通るから，その方程式は

$$y=\frac{2}{3}(x+1)$$

よって　$2x-3y+2=0$

21 次の円の接線の方程式と，その接点の座標を求めよ。

(1)　円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ の接線で，傾きが 2 のもの

(2)　円 $x^2+y^2-6x+8=0$ の接線で，原点を通るもの

解答　(1)　$y=2x+3\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{-5-6\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{-10+3\sqrt{5}}{5}\right)$；

$y=2x-3\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{-5+6\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{-10-3\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$，$\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$；$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$，$\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

解説

(1)　求める接線の方程式を $y=2x+k$ ……① とおく。

① を円の方程式に代入して　$x^2+(2x+k)^2+2x+4(2x+k)-4=0$

整理すると　$5x^2+2(2k+5)x+k^2+4k-4=0$ ……②

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k+5)^2-5(k^2+4k-4)=-k^2+45$$

直線 ① が円に接するから，$D=0$ が成り立つ。

よって　$-k^2+45=0$　　ゆえに　$k=\pm3\sqrt{5}$

[1]　$k=3\sqrt{5}$ のとき

接線の方程式は　$y=2x+3\sqrt{5}$ ……③

接点の x 座標は，② の重解であるから　$x=-\dfrac{2k+5}{5}=\dfrac{-5-6\sqrt{5}}{5}$

接点の y 座標は，③ から　$y=2\cdot\dfrac{-5-6\sqrt{5}}{5}+3\sqrt{5}=\dfrac{-10+3\sqrt{5}}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{-5-6\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{-10+3\sqrt{5}}{5}\right)$

[2]　$k=-3\sqrt{5}$ のとき

接線の方程式は　$y=2x-3\sqrt{5}$ ……④

接点の x 座標は，② の重解であるから　$x=-\dfrac{2k+5}{5}=\dfrac{-5+6\sqrt{5}}{5}$

接点の y 座標は，④ から　$y=2\cdot\dfrac{-5+6\sqrt{5}}{5}-3\sqrt{5}=\dfrac{-10-3\sqrt{5}}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{-5+6\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{-10-3\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　直線 $x=0$ は与えられた円の接線ではない。

よって，求める接線の方程式は $y=mx$ ……① とおける。

① を円の方程式に代入して　$x^2+(mx)^2-6x+8=0$

整理すると　$(m^2+1)x^2-6x+8=0$ ……②

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-8(m^2+1)=-8m^2+1$$

直線 ① が円に接するから，$D=0$ が成り立つ。

よって　$-8m^2+1=0$　　ゆえに　$m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[1]　$m=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

接線の方程式は　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

接点の x 座標は，② の重解であるから　$x=\dfrac{3}{m^2+1}=\dfrac{8}{3}$

接点の y 座標は　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

[2]　$m=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

接線の方程式は　$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

接点の x 座標は，② の重解であるから　$x=\dfrac{3}{m^2+1}=\dfrac{8}{3}$

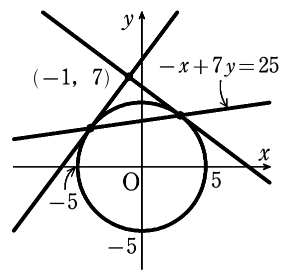
接点の y 座標は　$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

22 点 $(-1,\ 7)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する 2 つの直線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

解答　$-x+7y=25$

解説



$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とすると，A，B における接線の方程式は，それぞれ

$x_1x+y_1y=25$，$x_2x+y_2y=25$

これらはともに点 $(-1,\ 7)$ を通るから

$-x_1+7y_1=25$ ……①

$-x_2+7y_2=25$ ……②

①，② から，2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ は直線 $-x+7y=25$ 上にある。

よって，直線 AB の方程式は　$-x+7y=25$

別解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=25$ ……①

点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 $(-1,\ 7)$ を通るから　$-x_1+7y_1=25$ ……②

② から　$x_1=7y_1-25$ ……③

③ を ① に代入して　$(7y_1-25)^2+y_1{}^2=25$

よって　$y_1{}^2-7y_1+12=0$

これを解いて　$y_1=3,\ 4$

③ から　$y_1=3$ のとき $x_1=-4$，　$y_1=4$ のとき $x_1=3$

よって，A，B の座標は　$(-4,\ 3)$，$(3,\ 4)$

ゆえに，直線 AB の方程式は　$y-3=\dfrac{4-3}{3+4}(x+4)$

すなわち　$-x+7y=25$

23 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=43$

解説

円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$y-7=-\dfrac{3}{4}(x-5)$　　すなわち　$3x+4y=43$

別解　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ……①

を，中心 $(2,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=25$ ……②

になる。

この平行移動により，円 ① 上の点 $(5,\ 7)$ は点 $(3,\ 4)$ に移る。

点 $(3,\ 4)$ における円 ② の接線の方程式は　$3x+4y=25$ ……③

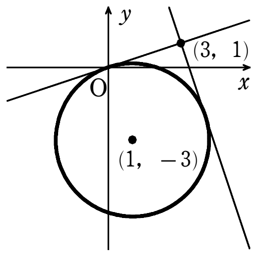
求める接線は，③ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は　$3(x-2)+4(y-3)=25$

すなわち　$3x+4y=43$

24 点 $(3,\ 1)$ から円 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

解説



円の中心は $(1,\ -3)$，半径は $\sqrt{10}$ であるから，
点 $(3,\ 1)$ から引いた接線は x 軸に垂直でない。
よって，点 $(3,\ 1)$ から引いた接線の方程式は

$$y=m(x-3)+1 \quad \cdots\cdots ①$$

すなわち $mx-y-3m+1=0$ と表せる。
円の中心 $(1,\ -3)$ と接線の距離は，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けると

$$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$$

両辺を 2 乗して　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　$(m+3)(3m-1)=0$　　よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，① から，接線の方程式は　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

参考　① を $(x-1)^2+(y+3)^2=10$ に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$$

この 2 次方程式の判別式を D として，$D=0$ となる m の値を求めて解答することもできる。