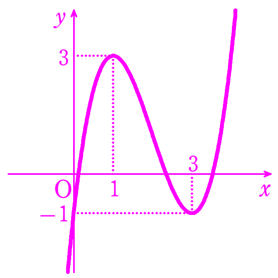
関数の極値クイズ

1 関数 $y=x^3-6x^2+9x-1$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

解答　$x=1$ で極大値 3，$x=3$ で極小値 -1，［図］



解説

$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

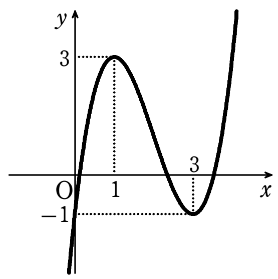
$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	……	1	……	3	……
y'	＋	0	－	0	＋
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

ゆえに，y は $x=1$ で極大値 3，$x=3$ で極小値 -1 をとる。

また，グラフは図のようになる。



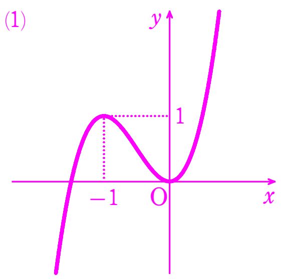
2 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2x^3+3x^2$　　(2)　$y=-x^3+x^2+x$

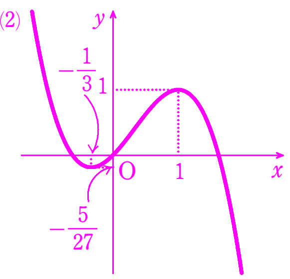
解答　(1)　$x=-1$ で極大値 1，$x=0$ で極小値 0，［図］

(2)　$x=1$ で極大値 1，$x=-\dfrac{1}{3}$ で極小値 $-\dfrac{5}{27}$，［図］

(1)



(2)



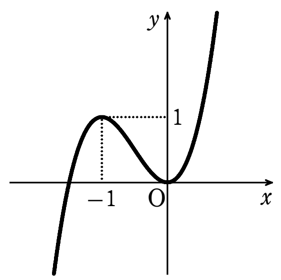
解説

(1)　$y'=6x^2+6x=6x(x+1)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ -1$

y の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	0	……
y'	＋	0	－	0	＋
y	↗	極大 1	↘	極小 0	↗



ゆえに，y は $x=-1$ で極大値 1，$x=0$ で極小値 0 をとる。

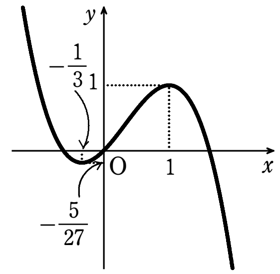
また，グラフは図のようになる。

(2)　$y'=-3x^2+2x+1=-(x-1)(3x+1)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ -\dfrac{1}{3}$

y の増減表は次のようになる。

x	……	$-\dfrac{1}{3}$	……	1	……
y'	－	0	＋	0	－
y	↘	極小 $-\dfrac{5}{27}$	↗	極大 1	↘

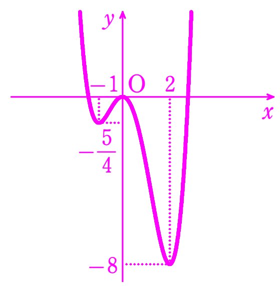


ゆえに，y は $x=1$ で極大値 1，$x=-\dfrac{1}{3}$ で極小値 $-\dfrac{5}{27}$ をとる。

また，グラフは図のようになる。

3 関数 $y=\dfrac{3}{4}x^4-x^3-3x^2$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

解答　$x=-1$ で極小値 $-\dfrac{5}{4}$，$x=0$ で極大値 0，$x=2$ で極小値 -8，［図］



解説

$y'=3x^3-3x^2-6x=3x(x^2-x-2)=3x(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ -1,\ 2$

y の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	0	……	2	……
y'	－	0	＋	0	－	0	＋
y	↘	極小 $-\dfrac{5}{4}$	↗	極大 0	↘	極小 -8	↗

ゆえに，y は

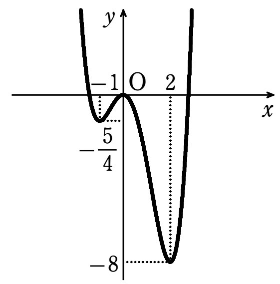
$x=-1$ で極小値 $-\dfrac{5}{4}$，

$x=0$ で極大値 0，

$x=2$ で極小値 -8

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



4 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

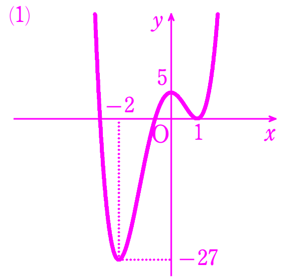
(1)　$y=3x^4+4x^3-12x^2+5$　　(2)　$y=x^4-8x^2+16$

(3)　$y=-x^4+4x^3-4x^2+2$　　(4)　$y=x^4+2x^3+1$

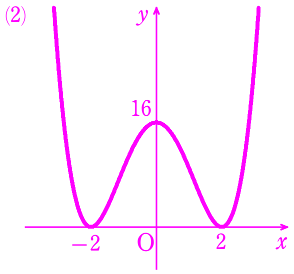
解答　(1)　$x=-2$ で極小値 -27，$x=0$ で極大値 5，$x=1$ で極小値 0，［図］

(2)　$x=0$ で極大値 16，$x=\pm2$ で極小値 0，［図］

(1)



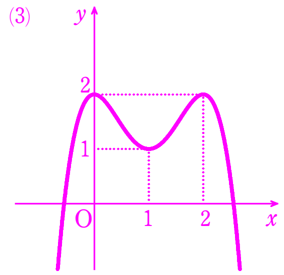
(2)



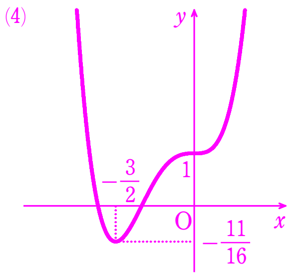
(3)　$x=0,\ 2$ で極大値 2，$x=1$ で極小値 1，［図］

(4)　$x=-\dfrac{3}{2}$ で極小値 $-\dfrac{11}{16}$，［図］

(3)



(4)



解説

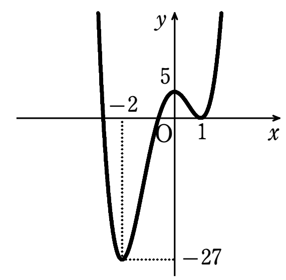
(1)　$y'=12x^3+12x^2-24x=12x(x^2+x-2)$

$=12x(x-1)(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ -2$

y の増減表は次のようになる。

x	……	-2	……	0	……	1	……
y'	－	0	＋	0	－	0	＋
y	↘	極小 -27	↗	極大 5	↘	極小 0	↗



ゆえに，y は

$x=-2$ で極小値 -27，$x=0$ で極大値 5，

$x=1$ で極小値 0 をとる。

また，グラフは右の図のようになる。

(2)　$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ -2,\ 2$

y の増減表は次のようになる。

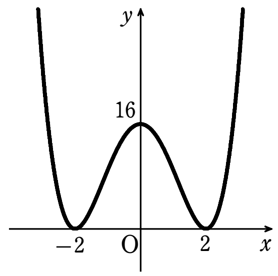
x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗	極大 16	↘	極小 0	↗

ゆえに，y は

$x=0$ で極大値 16，$x=\pm 2$ で極小値 0

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



(3) $y'=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x^2-3x+2)$

$=-4x(x-1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ 2$

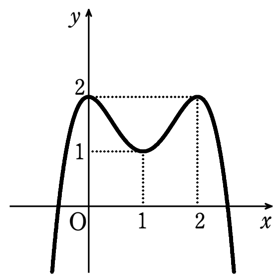
y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 2	↘	極小 1	↗	極大 2	↘

ゆえに，y は

$x=0,\ 2$ で極大値 2，$x=1$ で極小値 1 をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



(4) $y'=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ -\dfrac{3}{2}$

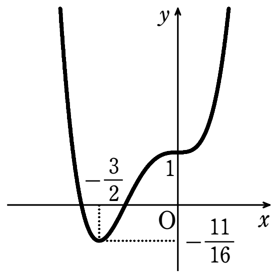
y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	$-\dfrac{3}{2}$	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	極小 $-\dfrac{11}{16}$	↗	1	↗

ゆえに，y は

$x=-\dfrac{3}{2}$ で極小値 $-\dfrac{11}{16}$　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



5 次の関数の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^3-27x$　　(2) $y=-x^3-3x^2+9x+10$

(3) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x$　　(4) $y=-x^4-\dfrac{4}{3}x^3+4x^2$

解答 (1) $x\leqq -3$，$3\leqq x$ で単調に増加，$-3\leqq x\leqq 3$ で単調に減少，

$x=-3$ で極大値 54，$x=3$ で極小値 -54，[図]

(2) $x\leqq -3$，$1\leqq x$ で単調に減少，$-3\leqq x\leqq 1$ で単調に増加，

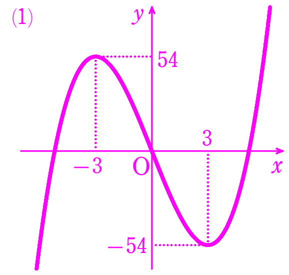
$x=-3$ で極小値 -17，$x=1$ で極大値 15，[図]

(3) 常に単調に減少，極値はない，[図]

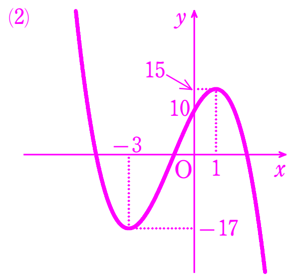
(4) $x\leqq -2$，$0\leqq x\leqq 1$ で単調に増加，$-2\leqq x\leqq 0$，$1\leqq x$ で単調に減少，

$x=-2$ で極大値 $\dfrac{32}{3}$，$x=0$ で極小値 0，$x=1$ で極大値 $\dfrac{5}{3}$，[図]

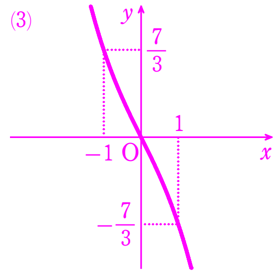
(1)



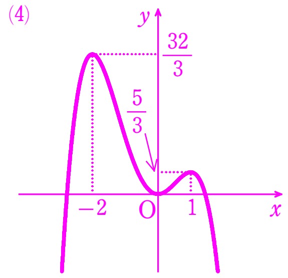
(2)



(3)



(4)



解説

(1) $y'=3x^2-27=3(x+3)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-3	$\cdots\cdots$	3	$\cdots\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 54	↘	極小 -54	↗

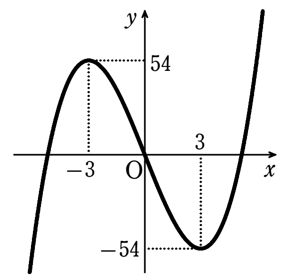
よって，$x\leqq -3$，$3\leqq x$ で単調に増加し，

$-3\leqq x\leqq 3$ で単調に減少する。

また，y は　$x=-3$ で　極大値　54

$x=3$　で　極小値 -54

をとる。グラフは図のようになる。



(2) $y'=-3x^2-6x+9=-3(x-1)(x+3)$

$y'=0$ とすると　　$x=1,\ -3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-3	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -17	↗	極大 15	↘

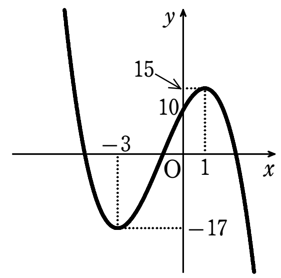
よって，$x\leqq -3$，$1\leqq x$ で単調に減少し，

$-3\leqq x\leqq 1$ で単調に増加する。

また，y は　$x=-3$ で　極小値 -17

$x=1$　で　極大値　15

をとる。グラフは図のようになる。



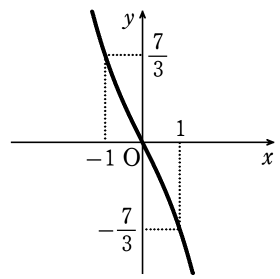
(3) $y'=-x^2-2=-(x^2+2)$

から，すべての実数の範囲で　　$y'<0$

よって，y は常に単調に減少する。

ゆえに，極値はない。

グラフは図のようになる。



(4) $y'=-4x^3-4x^2+8x=-4x(x^2+x-2)$

$=-4x(x-1)(x+2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ -2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 $\dfrac{32}{3}$	↘	極小 0	↗	極大 $\dfrac{5}{3}$	↘

よって，$x\leqq -2$，$0\leqq x\leqq 1$ で単調に増加し，

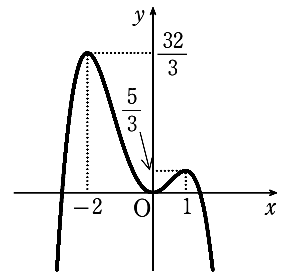
$-2\leqq x\leqq 0$，$1\leqq x$ で単調に減少する。

また，y は　$x=-2$ で　極大値 $\dfrac{32}{3}$

$x=0$　で　極小値 0

$x=1$　で　極大値 $\dfrac{5}{3}$

をとる。グラフは図のようになる。



6 次の関数の極値を求め，グラフをかけ。[各 25 点]

(1) $y=x^3-3x^2-9x+7$　　(2) $y=x^3-6x^2+12x-13$

解答 (1) $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

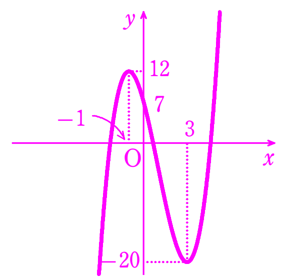
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 12	↘	極小 -20	↗

よって，$x=-1$ で極大値 12，

$x=3$ で極小値 -20

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



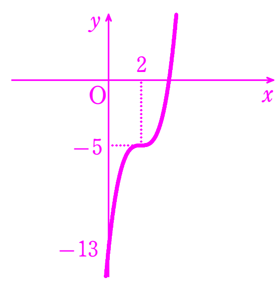
(2) $y'=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

すべての実数の範囲で $y'\geqq 0$ であるから，

y は常に単調に増加する。

よって，極値はない。

また，$x=2$ のとき $y'=0$ であるから，グラフは右の図のようになる。



解説

(1)　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

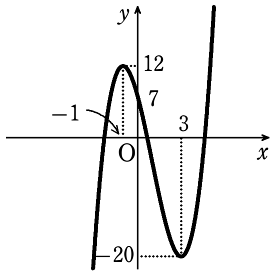
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 12	↘	極小 -20	↗

よって，$x=-1$ で極大値 12，

$x=3$ で極小値 -20

をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



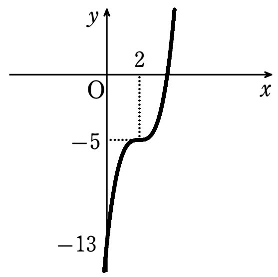
(2)　$y'=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

すべての実数の範囲で $y'\geqq 0$ であるから，

y は常に単調に増加する。

よって，極値はない。

また，$x=2$ のとき $y'=0$ であるから，グラフは右の図のようになる。



7 次の関数の増減を調べよ。また極値を求めよ。

(1)　$y=\frac{1}{3}x^3-9x$　　　(2)　$y=-x^3+x^2-x+1$

解答　(1)　$x\leqq -3,\ 3\leqq x$ で単調に増加，$-3\leqq x\leqq 3$ で単調に減少；

$x=-3$ で極大値 18，$x=3$ で極小値 -18

(2)　常に単調に減少する；極値をもたない

解説

(1)　$y'=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 18	↘	極小 -18	↗

よって　$x\leqq -3,\ 3\leqq x$ で単調に増加

$-3\leqq x\leqq 3$ で単調に減少　する。

また，$x=-3$ で極大値 18，$x=3$ で極小値 -18 をとる。

(2)　$y'=-3x^2+2x-1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}<0$

よって，常に単調に減少する。

したがって，極値をもたない。

8 次の関数の増減を調べよ。また極値を求めよ。

(1)　$y=-2x^3+3x^2+12x-4$　　　(2)　$y=x^3-3x^2+3x$

解答　(1)　$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ で単調に減少，$-1\leqq x\leqq 2$ で単調に増加；

$x=2$ で極大値 16，$x=-1$ で極小値 -11

(2)　常に単調に増加，極値をもたない

解説

(1)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -11	↗	極大 16	↘

よって　$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ で単調に減少

$-1\leqq x\leqq 2$ で単調に増加　する。

また，$x=2$ で極大値 16，$x=-1$ で極小値 -11 をとる。

(2)　$y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	1	↗

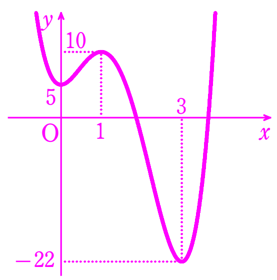
よって，常に単調に増加する。

したがって，極値をもたない。

9 4 次関数 $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2+5$ の極値を求めよ。また，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

解答　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，

$x=3$ で極小値 -22；[図]



解説

$f'(x)=12x^3-48x^2+36x=12x(x^2-4x+3)=12x(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ 3$

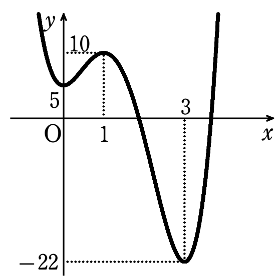
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 5	↗	極大 10	↘	極小 -22	↗

よって，　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，

$x=3$ で極小値 -22 をとる。

グラフは右の図のようになる。



10 次の 4 次関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^4-2x^2-3$　　　(2)　$y=x^4-4x$　　　(3)　$y=-x^4+4x^3-3$

解答　(1)　$x=-1$ で極小値 -4，

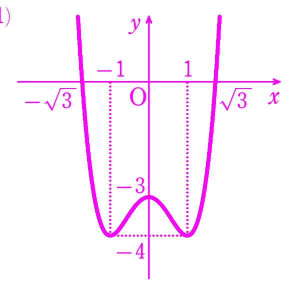
$x=0$ で極大値 -3，

$x=1$ で極小値 -4　[図]

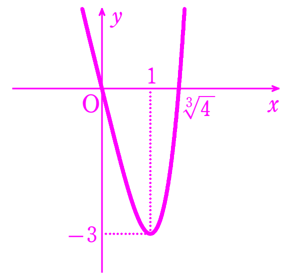
(2)　$x=1$ で極小値 -3　[図]

(3)　$x=3$ で極大値 24　[図]

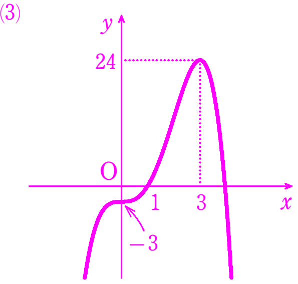
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ 1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -4	↗	極大 -3	↘	極小 -4	↗

よって，y は

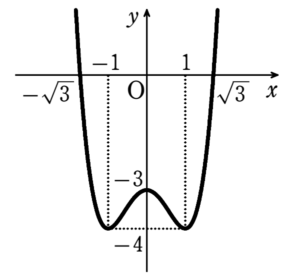
$x=-1$ で極小値 -4

$x=0$ で極大値 -3

$x=1$ で極小値 -4

をとる。

グラフは右の図のようになる。



(2)　$y'=4x^3-4=4(x^3-1)=4(x-1)(x^2+x+1)$

$y'=0$ とすると　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ であるから　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

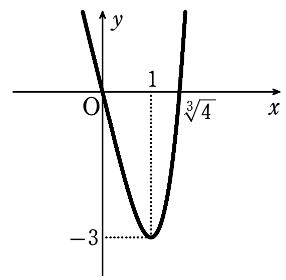
x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -3	↗

よって，y は

$x=1$ で極小値 -3

をとる。

グラフは右の図のようになる。



(3)　$y'=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

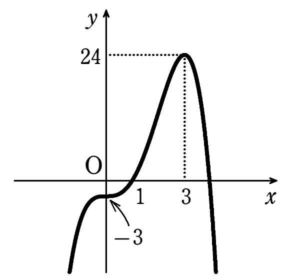
$y'=0$ とすると　$x=0,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↗	-3	↗	極大 24	↘

よって，y は $x=3$ で極大値 24 をとる。

グラフは右の図のようになる。



11 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=x^2-2x+3$　　(2) $y=-x^2+4x-5$

(3) $y=2x^3-6x+1$　　(4) $y=x^3+3x^2+4x+1$

(5) $y=-x^3+9x^2-15x$

解答　(1) $x=1$ で極小値 2　　(2) $x=2$ で極大値 -1

(3) $x=-1$ で極大値 5，$x=1$ で極小値 -3　　(4) 極値はない

(5) $x=1$ で極小値 -7，$x=5$ で極大値 25

解説

(1) $y'=2x-2=2(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 2	↗

よって，$x=1$ で極小値 2 をとる。

(2) $y'=-2x+4=-2(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大 -1	↘

よって，$x=2$ で極大値 -1 をとる。

(3) $y'=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 5	↘	極小 -3	↗

よって，$x=-1$ で極大値 5，$x=1$ で極小値 -3 をとる。

(4) $y'=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0$

ゆえに，y は常に単調に増加する。

よって，極値はない。

(5) $y'=-3x^2+18x-15=-3(x-1)(x-5)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 5$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -7	↗	極大 25	↘

よって，$x=1$ で極小値 -7，$x=5$ で極大値 25 をとる。

12 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^3-3x^2-9x+11$　　(2) $y=-x^3+3x$

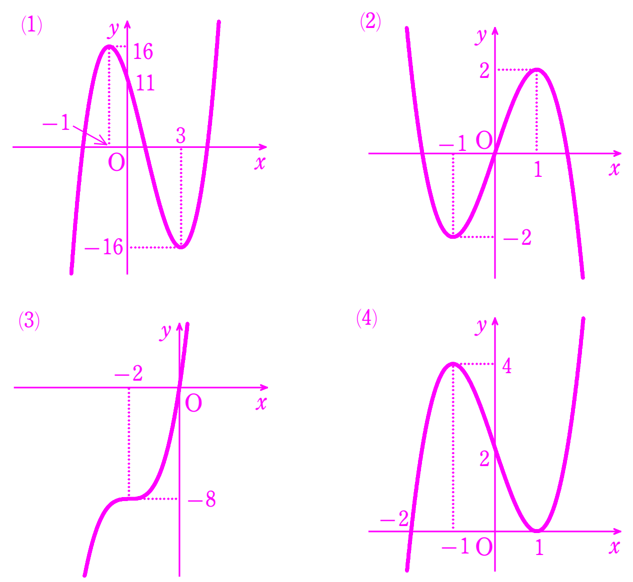
(3) $y=x^3+6x^2+12x$　　(4) $y=(x-1)^2(x+2)$

解答　(1) $x=-1$ で極大値 16，$x=3$ で極小値 -16 ；[図]

(2) $x=-1$ で極小値 -2，$x=1$ で極大値 2 ；[図]

(3) 極値はない，[図]

(4) $x=-1$ で極大値 4，$x=1$ で極小値 0；[図]



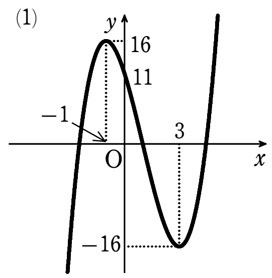
解説

(1) $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗



よって，$x=-1$ で極大値 16，

$x=3$ で極小値 -16 をとる。

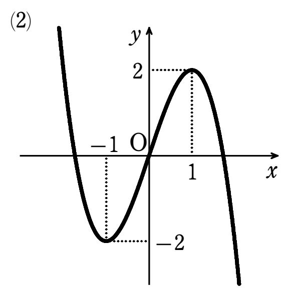
また，グラフは[図]のようになる。

(2) $y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘



よって，$x=-1$ で極小値 -2，

$x=1$ で極大値 2 をとる。

また，グラフは[図]のようになる。

(3) $y'=3x^2+12x+12=3(x+2)^2$

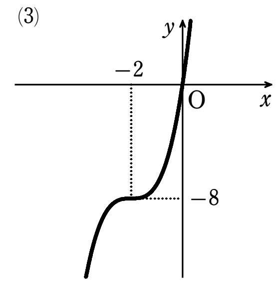
$x=-2$ のとき　$y'=0$

$x\neq-2$ のとき　$y'>0$

ゆえに，y は常に単調に増加する。

よって，極値はない。

また，グラフは[図]のようになる。



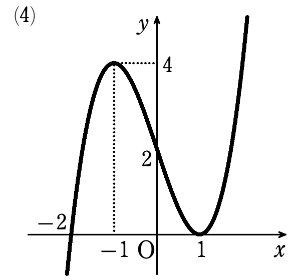
(4) $y=x^3-3x+2$ であるから

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



よって，$x=-1$ で極大値 4，

$x=1$ で極小値 0 をとる。

また，グラフは[図]のようになる。

13 関数 $f(x)=x^3+3x^2-3x+4$ について，$f'(x)=3(x^2+2x-1)$ である。

(1) $f(x)$ を x^2+2x-1 で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) $f(x)$ の極値を求めよ。

解答　(1) 商 $x+1$，余り $-4x+5$

(2) $x=-1-\sqrt{2}$ で極大値 $9+4\sqrt{2}$，$x=-1+\sqrt{2}$ で極小値 $9-4\sqrt{2}$

解説

(1) 右の計算から

商　$x+1$

余り　$-4x+5$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2+2x-1 \,\big)\, x^3+3x^2-3x+4 \\ x^3+2x^2-x \quad \\ \hline x^2-2x+4 \\ x^2+2x-1 \\ \hline -4x+5 \end{array}$$

(2) $f'(x)=0$ とすると　$x^2+2x-1=0$

これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(1) より　$f(x)=(x^2+2x-1)(x+1)-4x+5$

$x=-1\pm\sqrt{2}$ のとき，$x^2+2x-1=0$ であるから

$f(-1-\sqrt{2})=-4\cdot(-1-\sqrt{2})+5=9+4\sqrt{2}$

$f(-1+\sqrt{2})=-4\cdot(-1+\sqrt{2})+5=9-4\sqrt{2}$

よって

$x=-1-\sqrt{2}$ で極大値 $9+4\sqrt{2}$，

$x=-1+\sqrt{2}$ で極小値 $9-4\sqrt{2}$

をとる。

14 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=\frac{3}{2}x^4+2x^3-6x^2+5$　　(2)　$y=x^4+4x$

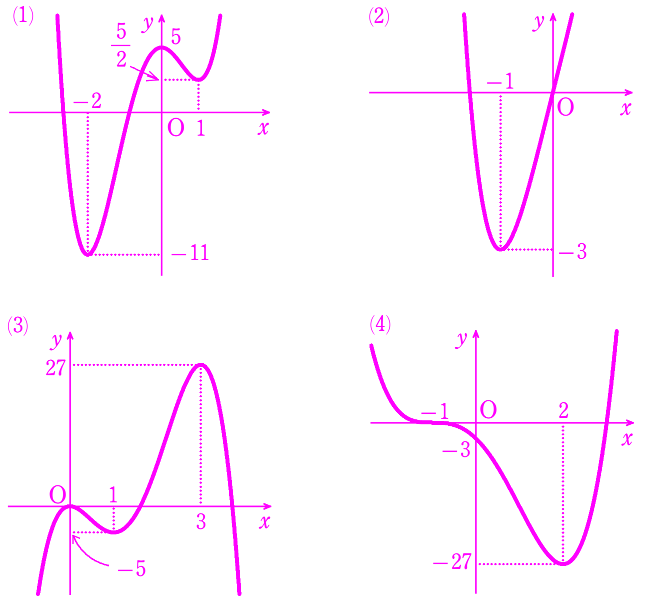
(3)　$y=-3x^4+16x^3-18x^2$　　(4)　$y=x^4-6x^2-8x-3$

解答　(1)　$x=-2$ で極小値 -11，$x=0$ で極大値 5，$x=1$ で極小値 $\frac{5}{2}$ ；[図]

(2)　$x=-1$ で極小値 -3；[図]

(3)　$x=0$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 -5，$x=3$ で極大値 27 ；[図]

(4)　$x=2$ で極小値 -27；[図]



解説

(1)　$y'=6x^3+6x^2-12x=6x(x-1)(x+2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ -2$

y の増減表は次のようになる。

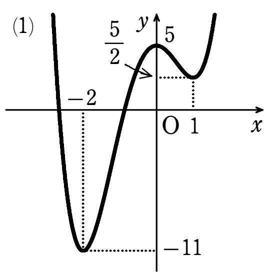
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -11	↗	極大 5	↘	極小 $\frac{5}{2}$	↗

よって，$x=-2$ で極小値 -11，

$x=0$ で極大値 5，

$x=1$ で極小値 $\frac{5}{2}$ をとる。

また，グラフは [図] のようになる。



(2)　$y'=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

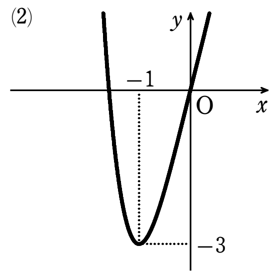
$y'=0$ とすると　　$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ であるから　　$x+1=0$

よって　　$x=-1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -3	↗



よって，$x=-1$ で極小値 -3 をとる。

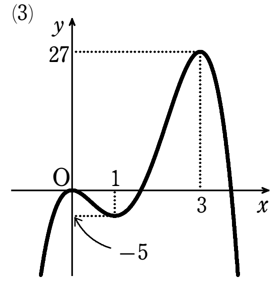
また，グラフは [図] のようになる。

(3)　$y'=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 0	↘	極小 -5	↗	極大 27	↘



よって，$x=0$ で極大値 0，

$x=1$ で極小値 -5，

$x=3$ で極大値 27 をとる。

また，グラフは [図] のようになる。

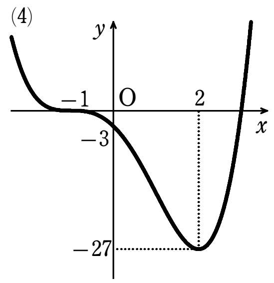
(4)　$y'=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)$

$=4(x+1)^2(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	極小 -27	↗



よって，$x=2$ で極小値 -27 をとる。

また，グラフは [図] のようになる。

15 次の関数に極値があれば，その極値を求めよ。

(1)　$y=x^3-9x^2+24x$　　(2)　$y=-2x^3+3x^2+12x-10$

(3)　$y=x^3+3x^2+7x+1$

解答　(1)　$x=2$ で極大値 20，$x=4$ で極小値 16

(2)　$x=-1$ で極小値 -17，$x=2$ で極大値 10　　(3)　極値はない

解説

(1)　$y'=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$y'=0$ とすると　　$x=2,\ 4$

y の増減表は右のようになる。

よって，この関数は

$x=2$ で極大値 20，$x=4$ で極小値 16

をとる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 20	↘	極小 16	↗

(2)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

y の増減表は右のようになる。

よって，この関数は

$x=-1$ で極小値 -17，$x=2$ で極大値 10

をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -17	↗	極大 10	↘

(3)　$y'=3x^2+6x+7=3(x+1)^2+4$

したがって，常に $y'>0$ であるから，y は常に増加する。

よって，この関数は極値をもたない。

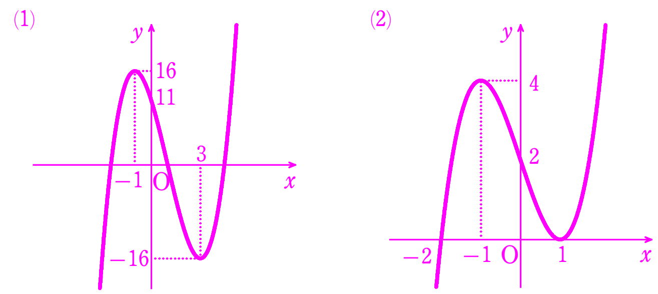
16 次の関数に極値があれば，その極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$　　(2)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(3)　$y=-2x^3+12x^2-18x$　　(4)　$y=-x^3+6x^2-12x+8$

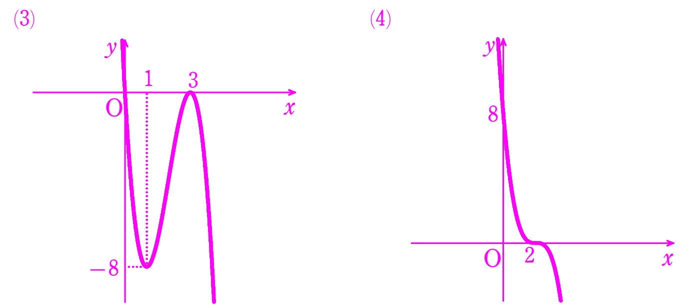
解答　(1)　$x=-1$ で極大値 16，$x=3$ で極小値 -16，[図]

(2)　$x=-1$ で極大値 4，$x=1$ で極小値 0，[図]



(3)　$x=1$ で極小値 -8，$x=3$ で極大値 0，[図]

(4)　極値はない，[図]



解説

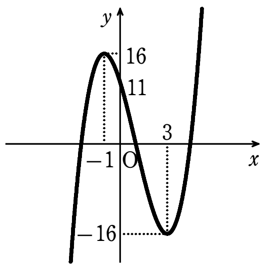
(1)　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

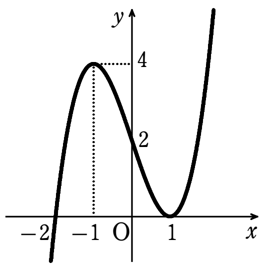
よって，この関数は
$x=-1$ で極大値 16,
$x=3$ で極小値 -16
をとる。
また，グラフは右の図のようになる。



(2)　$y=x^3-3x+2$ であるから
$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$y'=0$ とすると　　$x=\pm 1$
y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

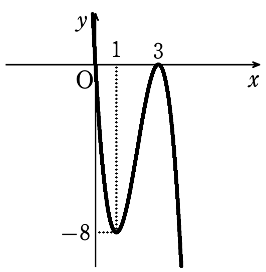
よって，この関数は
$x=-1$ で極大値 4,
$x=1$ で極小値 0
をとる。
また，グラフは右の図のようになる。



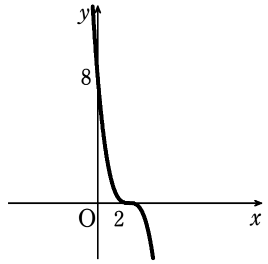
(3)　$y'=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　　$x=1,\ 3$
y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘

よって，この関数は
$x=1$ で極小値 -8,
$x=3$ で極大値 0
をとる。
また，グラフは右の図のようになる。



(4)　$y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$
したがって，常に $y'\leqq 0$ であるから，y は常に減少する。
よって，この関数は極値をもたない。
また，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{17}$ 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$　　　　(2)　$f(x)=-x^3-3x^2$

解答　(1)　$x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0
　　　(2)　$x=0$ で極大値 0，$x=-2$ で極小値 -4

解説

(1)　$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 1$
$f(x)$ の増減表は，右のようになる。
よって，この関数は
$x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0
をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

(2)　$f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$
$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2,\ 0$
$f(x)$ の増減表は，右のようになる。
よって，この関数は
$x=0$ で極大値 0，$x=-2$ で極小値 -4
をとる。

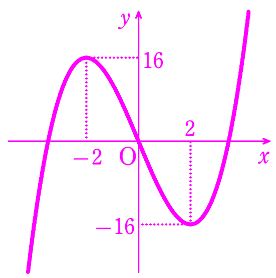
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘

$\boxed{18}$ 次の関数に極値があれば，それを求めよ。また，そのグラフをかけ。

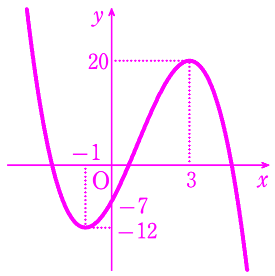
(1)　$y=x^3-12x$　　　　(2)　$y=-x^3+3x^2+9x-7$
(3)　$y=-(x-1)^2(x+2)$　　　　(4)　$y=x^3-3x^2+3x$

解答　(1)　$x=-2$ で極大値 16，$x=2$ で極小値 -16；[図]
　　　(2)　$x=3$ で極大値 20，$x=-1$ で極小値 -12；[図]
　　　(3)　$x=1$ で極大値 0，$x=-1$ で極小値 -4；[図]　　(4)　極値はない；[図]

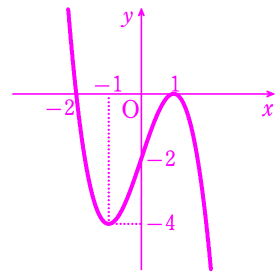
(1)



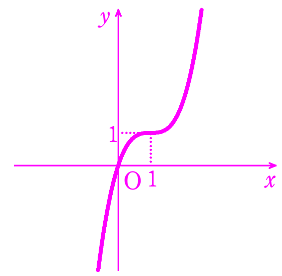
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$y'=0$ とすると　　$x=-2,\ 2$
y の増減表は，右のようになる。
よって，この関数は
$x=-2$ で極大値 16，$x=2$ で極小値 -16
をとる。グラフは [図] のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

(2)　$y'=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$
y の増減表は，右のようになる。
よって，この関数は
$x=3$ で極大値 20，$x=-1$ で極小値 -12
をとる。グラフは [図] のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -12	↗	極大 20	↘

(3)　$y=-x^3+3x-2$ であるから
$y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 1$
y の増減表は，右のようになる。
よって，この関数は
$x=1$ で極大値 0，$x=-1$ で極小値 -4
をとる。グラフは [図] のようになる。

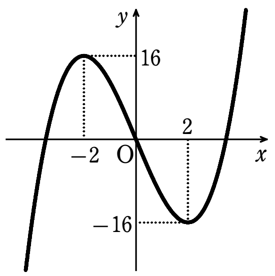
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘

(4)　$y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$
$y'=0$ とすると　　$x=1$
y の増減表は，右のようになる。
よって，この関数は極値をもたない。

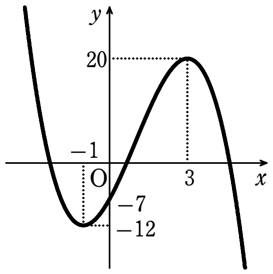
x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	1	↗

グラフは [図] のようになる。

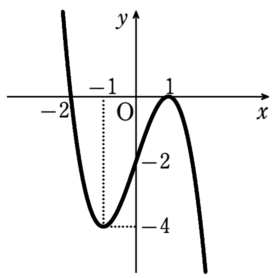
(1)



(2)



(3)



(4)