面積クイズ(難)

$\boxed{1}$ 曲線 $y=x^2(x-3)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{27}{4}$

解説

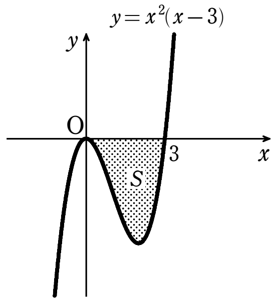
曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

方程式　$x^2(x-3)=0$

を解いて　$x=0,\ 3$

区間 $0\leqq x\leqq 3$ において $y\leqq 0$ であるから，

求める面積 S は



$$S=-\int_0^3 x^2(x-3)dx$$

$$=-\int_0^3 (x^3-3x^2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{4}-x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

$\boxed{2}$ 曲線 $y=x^2(x-4)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{64}{3}$

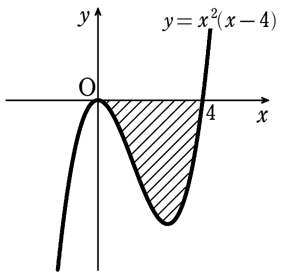
解説

曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

$x^2(x-4)=0$ を解いて　$x=0,\ 4$

区間 $0\leqq x\leqq 4$ において $y\leqq 0$ であるから，求める

面積 S は



$$S=-\int_0^4 x^2(x-4)dx$$

$$=-\int_0^4 (x^3-4x^2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3\right]_0^4=\frac{64}{3}$$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=x^3-4x^2+3x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答 $\frac{37}{12}$

解説

曲線 $y=x^3-4x^2+3x$ と x 軸の交点の x 座標は，

方程式

$x^3-4x^2+3x=0$

の解である。これを解くと

$x(x-1)(x-3)=0$

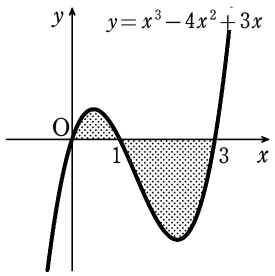
から　$x=0,\ 1,\ 3$

また，曲線は右の図のようになり

区間 $0\leqq x\leqq 1$ において　$y\geqq 0$

区間 $1\leqq x\leqq 3$ において　$y\leqq 0$

である。よって，求める面積の和 S は



$$S=\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx-\int_1^3 (x^3-4x^2+3x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=\frac{37}{12}$$

$\boxed{4}$ 曲線 $y=x^3-3x^2+2x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答 $\frac{1}{2}$

解説

曲線 $y=x^3-3x^2+2x$ と x 軸の交点の x 座標は，

方程式 $x^3-3x^2+2x=0$ の解である。

これを解くと　$x(x-1)(x-2)=0$

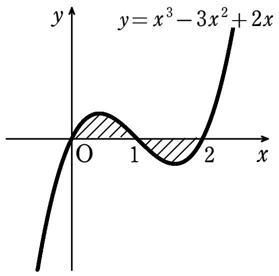
から　$x=0,\ 1,\ 2$

また，曲線は図のようになり

区間 $0\leqq x\leqq 1$ において　$y\geqq 0$，

区間 $1\leqq x\leqq 2$ において　$y\leqq 0$

である。よって，求める面積の和 S は



$$S=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx-\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

$\boxed{5}$ 曲線 $y=x^3-4x$ と，その曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{27}{4}$

解説

$y=x^3-4x$　…… ①

の右辺を $f(x)$ とおくと　$f(x)=x^3-4x$，$f'(x)=3x^2-4$

ゆえに　$f'(1)=3-4=-1$

よって，点 $(1,\ -3)$ における接線の方程式は

$y-(-3)=-(x-1)$

すなわち

$y=-x-2$　…… ②

①，② から，y を消去すると

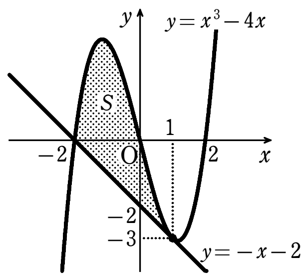
$x^3-4x=-x-2$　…… ③

これを整理して因数分解すると

$(x-1)^2(x+2)=0$

ゆえに　$x=1,\ -2$

よって，曲線 ① と接線 ② の接点でない共有点の x 座標は -2 であり，曲線 ① と接線 ② は上の図のようになる。



したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^1 \{(x^3-4x)-(-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$

$\boxed{6}$ 曲線 $y=x^3+2x^2-3x$ と，その曲線上の点 $(-2,\ 6)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{64}{3}$

解説

$y=x^3+2x^2-3x$　…… ①　の右辺を $f(x)$ とおくと

$f(x)=x^3+2x^2-3x$，$f'(x)=3x^2+4x-3$

ゆえに

$f'(-2)=12-8-3=1$

よって，点 $(-2,\ 6)$ における接線の方程式は

$y-6=1\cdot(x+2)$

すなわち　$y=x+8$　…… ②

①，② から，y を消去すると

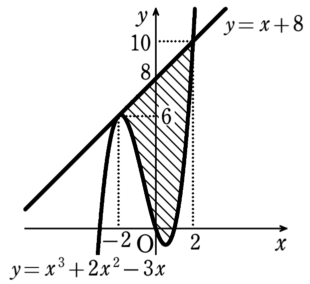
$x^3+2x^2-3x=x+8$

これを整理して因数分解すると

$(x+2)^2(x-2)=0$

ゆえに　$x=-2,\ 2$

よって，曲線 ① と接線 ② の接点でない共有点の x 座標は 2 であり，曲線 ① と接線 ② は図のようになる。



したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^2 \{(x+8)-(x^3+2x^2-3x)\}dx=\int_{-2}^2 (-x^3-2x^2+4x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x\right]_{-2}^2=\frac{64}{3}$$

$\boxed{7}$ 放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 A $(-1,\ 1)$，B $(2,\ 4)$ がある。

(1)　点 A における放物線の接線の方程式を求めよ。

(2)　点 B における放物線の接線の方程式を求めよ。

(3)　(1)，(2) で求めた 2 つの接線と，放物線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 (1)　$y=-2x-1$　(2)　$y=4x-4$　(3)　$\frac{9}{4}$

解説

(1)　$f(x)=x^2$ とおくと　$f'(x)=2x$　よって　$f'(-1)=-2$

ゆえに，点 A $(-1,\ 1)$ における接線の方程式は

$y-1=-2(x+1)$　すなわち　$y=-2x-1$

(2)　(1) より　$f'(2)=4$

ゆえに，点 B $(2,\ 4)$ における接線の方程式は

$y-4=4(x-2)$　すなわち　$y=4x-4$

(3)　$y=x^2$　…… ①

$y=-2x-1$　…… ②

$y=4x-4$　…… ③

とする。放物線 ① と接線 ② の共有点は接点 A $(-1,\ 1)$ であり，放物線 ① と接線 ③

の共有点は接点 B$(2,\ 4)$ である。

また，2 つの接線 ② と ③ の交点の x 座標は，次の方程式の解である。

$$-2x-1=4x-4$$

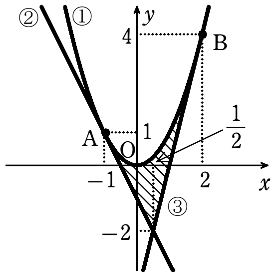
これを解いて　　$x=\frac{1}{2}$

放物線 ① と接線 ②，③ は図のようになり，

区間 $-1\leqq x\leqq \frac{1}{2}$ では　$x^2\geqq -2x-1$

区間 $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ では　$x^2\geqq 4x-4$

である。よって，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{9}{4}$$

参考　$\int(x+a)^2dx=\frac{1}{3}(x+a)^3+C$ を用いると，S は次のように計算できる。

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3$$

$$=\frac{9}{4}$$

8　次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2$，$y=x-2$　　(2)　$y=x^2-4$，x 軸，$x=-3$，$x=4$

(3)　$y=x(x+2)^2$，x 軸

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　　(2)　$\frac{71}{3}$　　(3)　$\frac{4}{3}$

解説

(1)　放物線 $y=-x^2$ と直線 $y=x-2$ の交点の x 座標は，方程式

$$-x^2=x-2$$

の解である。これを解くと

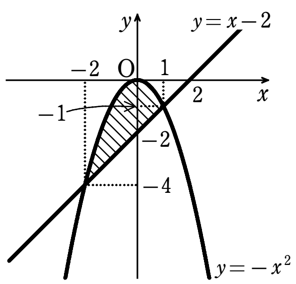
$$(x-1)(x+2)=0$$

から　　$x=1,\ -2$

また，放物線と直線は図のようになり，

$-2\leqq x\leqq 1$ では，$-x^2\geqq x-2$ である。

よって，求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^{1}\{-x^2-(x-2)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

(2)　放物線 $y=x^2-4$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-4=0$$

の解である。これを解くと　　$x=\pm 2$

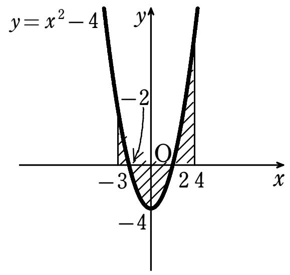
また，放物線と直線は図のようになり，

$-3\leqq x\leqq -2$，$2\leqq x\leqq 4$ では　$x^2-4\geqq 0$

$-2\leqq x\leqq 2$ では　$x^2-4\leqq 0$

である。

よって，求める面積 S は



$$S=\int_{-3}^{-2}(x^2-4)dx-\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx+\int_{2}^{4}(x^2-4)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=\frac{71}{3}$$

(3)　曲線 $y=x(x+2)^2$ と x 軸の共有点の x 座標は，

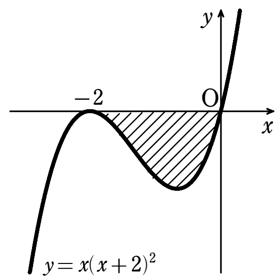
方程式　　$x(x+2)^2=0$

の解である。これを解くと

$$x=0,\ -2$$

また，この曲線は図のようになり，$-2\leqq x\leqq 0$ では $y\leqq 0$ である。

よって，求める面積 S は



$$S=-\int_{-2}^{0}x(x+2)^2dx$$

$$=-\int_{-2}^{0}(x^3+4x^2+4x)dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

9　曲線 $y=x^3-4x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。[25点]

解答　曲線 $y=x^3-4x$ と x 軸の交点の x 座標は，

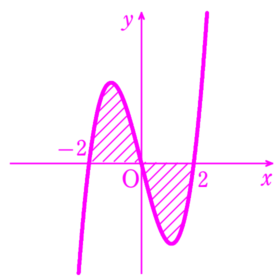
方程式 $x^3-4x=0$ を解いて

$$x(x+2)(x-2)=0$$

よって　　$x=0,\ -2,\ 2$

また，曲線は右の図のようになるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-(4-8)-(4-8)=8$$

解説

曲線 $y=x^3-4x$ と x 軸の交点の x 座標は，

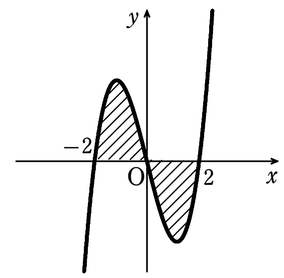
方程式 $x^3-4x=0$ を解いて

$$x(x+2)(x-2)=0$$

よって　　$x=0,\ -2,\ 2$

また，曲線は右の図のようになるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}$$

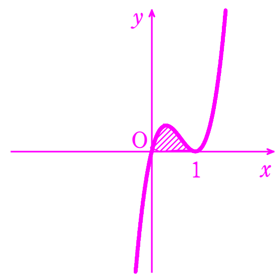
$$=-(4-8)-(4-8)=8$$

10　曲線 $y=x(x-1)^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。[20点]

解答　曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

$x(x-1)^2=0$ を解いて　　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ において $y\geqq 0$ であるから



$$S=\int_{0}^{1}x(x-1)^2dx=\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x)dx$$

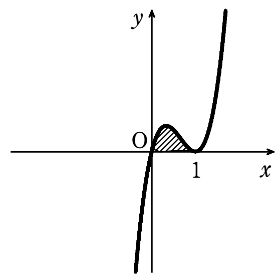
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{12}$$

解説

曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

$x(x-1)^2=0$ を解いて　　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ において $y\geqq 0$ であるから



$$S=\int_{0}^{1}x(x-1)^2dx=\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{12}$$

11　曲線 C : $y=x^3-x^2-3x-2$ 上の点 P$(-1,\ -1)$ における接線を l とする。[各10点]

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

(2)　接線 l が曲線 C と共有する，点 P 以外の点の x 座標を求めよ。

(3)　曲線 C と接線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$f(x)=x^3-x^2-3x-2$ とおくと　　$f'(x)=3x^2-2x-3$

よって　　$f'(-1)=2$

ゆえに，接線 l の方程式は　　$y+1=2(x+1)$　　すなわち　　$y=2x+1$

(2)　曲線 C と接線 l の共有点の x 座標は，方程式

$$x^3-x^2-3x-2=2x+1$$

の実数解である。

整理して　　$x^3-x^2-5x-3=0$

よって　$(x+1)^2(x-3)=0$

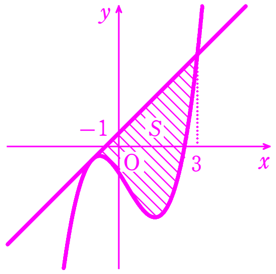
これを解いて　$x=-1,\ 3$

よって，求める x 座標は　3

(3)　$S=\int_{-1}^{3}\{(2x+1)-(x^3-x^2-3x-2)\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(-x^3+x^2+5x+3)dx$

$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$



解説

(1)　$f(x)=x^3-x^2-3x-2$ とおくと　$f'(x)=3x^2-2x-3$

よって　$f'(-1)=2$

ゆえに，接線 l の方程式は　$y+1=2(x+1)$　すなわち　$y=2x+1$

(2)　曲線 C と接線 l の共有点の x 座標は，方程式

$$x^3-x^2-3x-2=2x+1$$

の実数解である。

整理して　$x^3-x^2-5x-3=0$

よって　$(x+1)^2(x-3)=0$

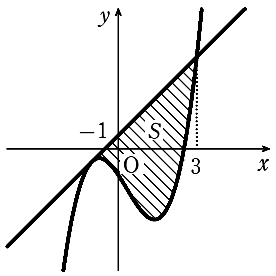
これを解いて　$x=-1,\ 3$

よって，求める x 座標は　3

(3)　$S=\int_{-1}^{3}\{(2x+1)-(x^3-x^2-3x-2)\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(-x^3+x^2+5x+3)dx$

$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$



12　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x$，x 軸，$x=3$　　(2)　$y=x^3-2x^2-x+2$，x 軸

解答　(1)　$\frac{8}{3}$　　(2)　$\frac{37}{12}$

解説

(1)　$x^2-2x=x(x-2)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は　$x=0,\ 2$

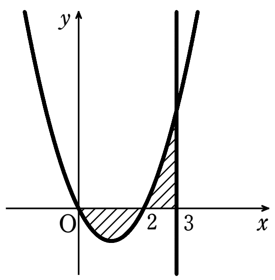
よって，図から，求める面積 S は

$S=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3$

$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+0+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)$

$=\frac{8}{3}$



(2)　$x^3-2x^2-x+2=x(x^2-1)-2(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x-2)$

$=(x+1)(x-1)(x-2)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

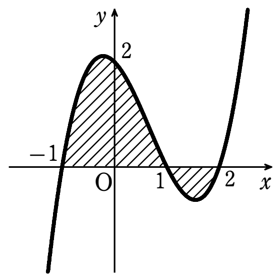
$x=-1,\ 1,\ 2$

よって，図から，求める面積 S は

$S=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$

$=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)-0-\left\{\frac{16-1}{4}-\frac{2}{3}(8-1)-\frac{4-1}{2}+2(2-1)\right\}=\frac{37}{12}$



13　次の曲線，直線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=2x^2+3x-2$　　(2)　$y=x^2-4x-5$ $(x\leqq4)$，$x=-2$，$x=4$

(3)　$y=x^3-5x^2+6x$

解答　(1)　$\frac{125}{24}$　　(2)　$\frac{110}{3}$　　(3)　$\frac{37}{12}$

解説

(1)　$2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

$x=-2,\ \frac{1}{2}$

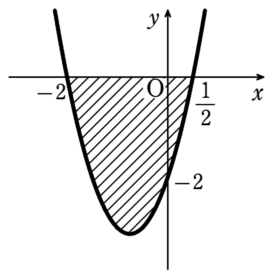
よって，図から，求める面積 S は

$S=-\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(2x^2+3x-2)dx$

$=-\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$

$=-\left\{\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{8}-1\right)-\left(-\frac{16}{3}+6+4\right)\right\}$

$=\frac{125}{24}$



別解　$S=-\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(2x^2+3x-2)dx=-2\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$

$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}^3=\frac{125}{24}$

(2)　$x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

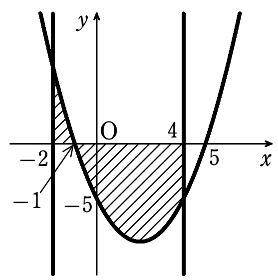
$x=-1,\ 5$

よって，図から，求める面積 S は

$S=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x-5)dx-\int_{-1}^{4}(x^2-4x-5)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-1}^{4}$

$=2\cdot\frac{8}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{92}{3}\right)=\frac{110}{3}$



(3)　$x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)$

$=x(x-2)(x-3)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

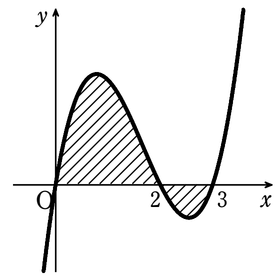
$x=0,\ 2,\ 3$

よって，図から，求める面積 S は

$S=\int_{0}^{2}(x^3-5x^2+6x)dx-\int_{2}^{3}(x^3-5x^2+6x)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3$

$=2\cdot\frac{8}{3}-0-\frac{9}{4}=\frac{37}{12}$



14　連立不等式 $y\geqq x^2-1$，$y\leqq x+5$，$y\leqq -3x+9$ の表す領域の面積 S を求めよ。

解答　$\frac{50}{3}$

解説

境界線の方程式は

$y=x^2-1$ ……①，$y=x+5$ ……②，$y=-3x+9$ ……③

①，② を連立して解くと

$(x,\ y)=(-2,\ 3),\ (3,\ 8)$

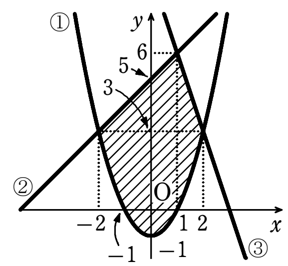
①，③ を連立して解くと

$(x,\ y)=(-5,\ 24),\ (2,\ 3)$

②，③ を連立して解くと

$(x,\ y)=(1,\ 6)$

したがって，連立不等式の表す領域は，図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



よって，求める面積 S は

$S=\int_{-2}^{1}\{(x+5)-(x^2-1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(-3x+9)-(x^2-1)\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x^2+x+6)dx+\int_{1}^{2}(-x^2-3x+10)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+10x\right]_{1}^{2}$

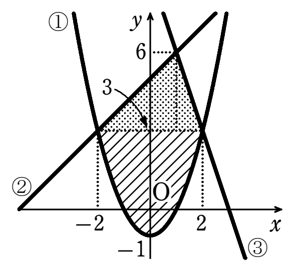
$=\frac{27}{2}+\frac{19}{6}=\frac{50}{3}$

別解　領域を右のように分けて考えると

$S=\int_{-2}^{2}\{3-(x^2-1)\}dx+\frac{1}{2}\cdot\{2-(-2)\}\cdot(6-3)$

$=-\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx+6$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3+6=\frac{50}{3}$



15　連立不等式 $2y-x^2\geqq0$，$5x-4y+7\geqq0$，$x+y-4\leqq0$ の表す領域の面積 S を求めよ。

解答　$\frac{9}{2}$

解説

境界線の方程式は，$2y-x^2=0$，$5x-4y+7=0$，$x+y-4=0$ から，それぞれ

$y=\dfrac{x^2}{2}$ ……①，$y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{7}{4}$ ……②，$y=-x+4$ ……③

①，② を連立して解くと

$(x,\ y)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{49}{8}\right)$

①，③ を連立して解くと

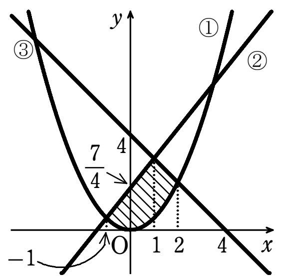
$(x,\ y)=(-4,\ 8),\ (2,\ 2)$

②，③ を連立して解くと

$(x,\ y)=(1,\ 3)$

領域は，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



したがって，図から，求める面積は

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{5}{4}x+\frac{7}{4}\right)-\frac{x^2}{2}\right\}dx+\int_{1}^{2}\left\{(-x+4)-\frac{x^2}{2}\right\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{7}{4}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(-\frac{x^2}{2}-x+4\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{7}{4}x\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^2$$

$$=2\cdot\frac{19}{12}+\frac{4}{3}=\frac{9}{2}$$

16 放物線 $C:y=2-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ における接線を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 直線 ℓ と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 (1) $y=-2x+3$ (2) $\dfrac{1}{3}$

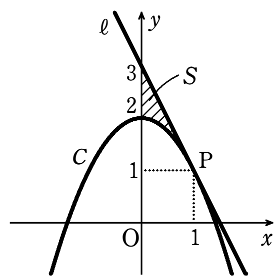
解説

(1) $y=2-x^2$ から $y'=-2x$

よって，$\mathrm{P}(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$y-1=-2(x-1)$

すなわち $y=-2x+3$



(2) $S=\displaystyle\int_0^1\{(-2x+3)-(2-x^2)\}dx$

$$=\int_0^1(x-1)^2dx=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

17 放物線 $C:y=x^2-2x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1) 原点 $(0,\ 0)$ を通る C の接線のうち，傾きが負であるものの方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答 (1) $y=-4x$ (2) $\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $y=x^2-2x+1$ から $y'=2x-2$

よって，放物線 C 上の点 $(a,\ a^2-2a+1)$ における接線の方程式は

$y-(a^2-2a+1)=(2a-2)(x-a)$

すなわち $y=(2a-2)x-a^2+1$ ……①

この直線が原点 $(0,\ 0)$ を通るから $0=-a^2+1$

これを解くと $a=\pm1$

$2a-2<0$ であるから $a=-1$

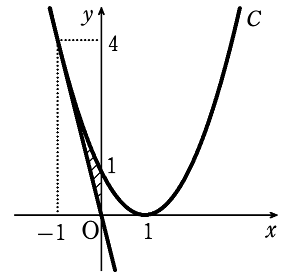
よって，求める接線の方程式は，① から $y=-4x$

(2) 求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^2-2x+1)-(-4x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$



18 放物線 $y=x^2$ と，点 $(1,\ -3)$ を通りこの放物線に接する 2 直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 $\dfrac{16}{3}$

解説

$y=x^2$ から $y'=2x$

接点の x 座標を t とすると，接線の方程式は

$y-t^2=2t(x-t)$

すなわち $y=2tx-t^2$

この直線が点 $(1,\ -3)$ を通るから

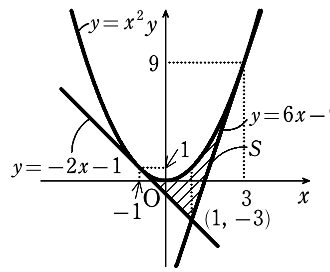
$-3=2t-t^2$

ゆえに $t^2-2t-3=0$

これを解くと $t=-1,\ 3$

よって，接線の方程式は $t=-1$ のとき $y=-2x-1$

$t=3$ のとき $y=6x-9$



2 接線の交点の x 座標は $x=1$

求める面積 S は，図の斜線部分で

$$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{16}{3}$$

19 放物線 $y=-x^2+x$ と点 $(0,\ 0)$ における接線，点 $(2,\ -2)$ における接線により囲まれる図形の面積を求めよ。

解答 $\dfrac{2}{3}$

解説

$y=-x^2+x$ から $y'=-2x+1$

点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は

$y-0=1\cdot(x-0)$ すなわち $y=x$ ……①

点 $(2,\ -2)$ における接線の方程式は

$y-(-2)=-3(x-2)$ すなわち $y=-3x+4$ ……②

2 直線 ①，② の交点の x 座標は，$x=-3x+4$ から $x=1$

よって，求める面積を S とすると

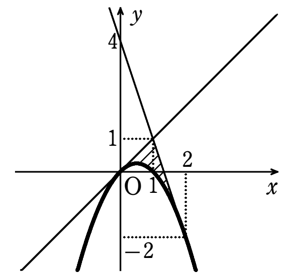
$$S=\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx$$

$$+\int_1^2\{(-3x+4)-(-x^2+x)\}dx$$

$$=\int_0^1x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$



20 2 つの放物線を $F_1:y=x^2+x+2$，$F_2:y=x^2-7x+10$ とする。

(1) F_1 と F_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 F_1，F_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 (1) $y=-x+1$ (2) $\dfrac{16}{3}$

解説

(1) F_1 上の点 $(a,\ a^2+a+2)$ における接線の方程式は，$y'=2x+1$ から

$y-(a^2+a+2)=(2a+1)(x-a)$

すなわち $y=(2a+1)x-a^2+2$ ……①

F_2 上の点 $(b,\ b^2-7b+10)$ における接線の方程式は，$y'=2x-7$ から

$y-(b^2-7b+10)=(2b-7)(x-b)$

すなわち $y=(2b-7)x-b^2+10$ ……②

直線 ℓ は ① と ② が一致する場合であるから

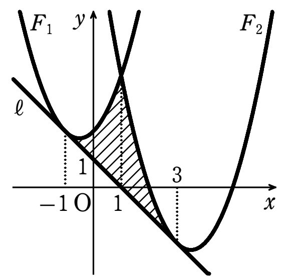
$2a+1=2b-7$ かつ $-a^2+2=-b^2+10$

第 1 式から $b=a+4$

これを第 2 式に代入して $-a^2+2=-(a+4)^2+10$

これを解くと $a=-1$ ゆえに $b=3$

よって，ℓ の方程式は $y=-x+1$



(2) F_1 と F_2 の交点の x 座標は，

$x^2+x+2=x^2-7x+10$

を解いて $x=1$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2+x+2)-(-x+1)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-7x+10)-(-x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{16}{3}$$

21 直線 ℓ は，傾きが正で，2 つの放物線 $C_1:y=x^2$，$C_2:y=4x^2+12x$ に接している。直線 ℓ の方程式を求めよ。また，放物線 C_1，C_2 および直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答 順に $y=4x-4$，4

解説

C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ から

$y-a^2=2a(x-a)$　すなわち　$y=2ax-a^2$　…… ①

C_2 上の点 $(b,\ 4b^2+12b)$ における接線の方程式は，$y'=8x+12$ から

$y-(4b^2+12b)=(8b+12)(x-b)$

すなわち　$y=(8b+12)x-4b^2$　…… ②

直線 ℓ は ① と ② が一致する場合であるから

$2a=8b+12,\ -a^2=-4b^2$

すなわち　$a=4b+6$　…… ③，$a^2=4b^2$　…… ④

③ を ④ に代入して整理すると　$b^2+4b+3=0$

これを解いて　$b=-1,\ -3$

直線 ℓ の傾きは正であるから，② より　$8b+12>0$

よって　$b=-1$

③ から　$a=2$

① から，直線 ℓ の方程式は　$y=4x-4$

C_1 と C_2 の交点の x 座標は，$x^2=4x^2+12x$ を解いて

$x=0,\ -4$

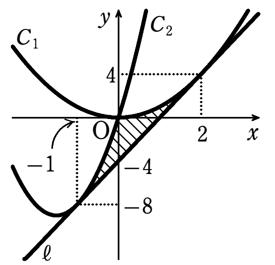
よって，図から，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{0}\{4x^2+12x-(4x-4)\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}4(x+1)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$$



22 曲線 $y=x^3-5x^2+2x+6$ と，その曲線上の点 $(3,\ -6)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{64}{3}$

解説

$y'=3x^2-10x+2$ であるから，接線の方程式は

$y-(-6)=(3\cdot3^2-10\cdot3+2)(x-3)$

すなわち　$y=-x-3$

この接線と曲線の共有点の x 座標は，

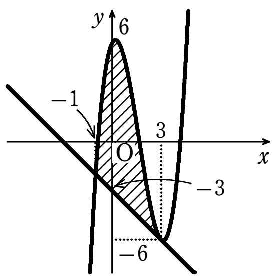
$x^3-5x^2+2x+6=-x-3$

すなわち　$x^3-5x^2+3x+9=0$　の解である。

左辺が $(x-3)^2$ を因数にもつことに注意して，因数分解すると　$(x-3)^2(x+1)=0$

よって　$x=3,\ -1$

したがって，図から，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{3}\{(x^3-5x^2+2x+6)-(-x-3)\}dx=\int_{-1}^{3}(x-3)^2(x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x-3)^2\{(x-3)+4\}dx=\int_{-1}^{3}\{(x-3)^3+4(x-3)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-3)^4}{4}\right]_{-1}^{3}+4\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{-1}^{3}=-64+\frac{256}{3}=\frac{64}{3}$$

23 曲線 $y=x-x^3$ と，その曲線上の点 $(-1,\ 0)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{27}{4}$

解説

$y'=1-3x^2$ であるから，曲線上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は

$y-0=\{1-3\cdot(-1)^2\}(x+1)$　すなわち　$y=-2x-2$

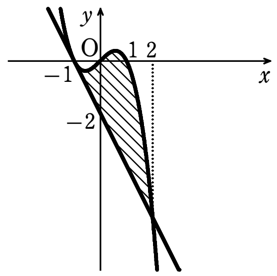
この接線と曲線の共有点の x 座標は，

$x-x^3=-2x-2$　すなわち　$x^3-3x-2=0$ の解である。

ゆえに　$(x+1)^2(x-2)=0$

よって　$x=-1,\ 2$

したがって，図から，求める面積は



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x-x^3)-(-2x-2)\}dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3-3(x+1)^2\}dx$$

$$=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-(x+1)^3\right]_{-1}^{2}=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$$

24 $f(x)=x^4+2x^3-2x^2$ として，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点で接する直線の方程式 $y=g(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と (1) で求めた直線 $y=g(x)$ で囲まれる部分の面積を S とする。S の値を求めよ。

解答　(1)　$y=3x-\dfrac{9}{4}$　　(2)　$\dfrac{49\sqrt{7}}{30}$

解説

(1)　$g(x)=mx+n$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が $x=a,\ x=b\ (a<b)$ の 2 点で接するとき，次の恒等式が成り立つ。

$x^4+2x^3-2x^2-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2$

(左辺)$=x^4+2x^3-2x^2-mx-n$

(右辺)$=x^4-2(a+b)x^3+\{(a+b)^2+2ab\}x^2-2ab(a+b)x+a^2b^2$

両辺の係数を比較して

$2=-2(a+b)$　…… ①，　$-2=(a+b)^2+2ab$　…… ②，

$-m=-2ab(a+b)$　…… ③，　$-n=a^2b^2$　…… ④

① から　$a+b=-1$　　これと ② から　$ab=-\dfrac{3}{2}$

これらを ③，④ に代入して　$m=3,\ n=-\dfrac{9}{4}$

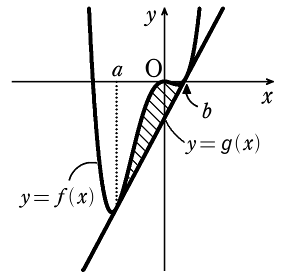
$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2+t-\dfrac{3}{2}=0$ の解 $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$ であるから　$a\fallingdotseq b$

したがって，求める直線の方程式は　$y=3x-\dfrac{9}{4}$

(2)　$a=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$，$b=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ から

$b-a=\sqrt{7}$

区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるから



$$S=\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{a}^{b}(x-a)^2(x-b)^2dx$$

$$=\int_{a}^{b}(x-a)^2\{(x-a)+(a-b)\}^2dx$$

$$=\int_{a}^{b}(x-a)^2\{(x-a)^2+2(x-a)(a-b)+(a-b)^2\}dx$$

$$=\int_{a}^{b}\{(x-a)^4+2(x-a)^3(a-b)+(x-a)^2(a-b)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}(x-a)^5+2\cdot\frac{1}{4}(x-a)^4\cdot(a-b)+\frac{1}{3}(x-a)^3\cdot(a-b)^2\right]_{a}^{b}$$

$$=\frac{1}{5}(b-a)^5+2\cdot\frac{1}{4}(b-a)^4\cdot(a-b)+\frac{1}{3}(b-a)^3\cdot(a-b)^2$$

$$=\frac{1}{5}(b-a)^5-2\cdot\frac{1}{4}(b-a)^4\cdot(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^3\cdot\{-(b-a)\}^2$$

$$=\frac{1}{5}(b-a)^5-\frac{1}{2}(b-a)^5+\frac{1}{3}(b-a)^5$$

$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)(b-a)^5$$

$$=\frac{1}{30}(b-a)^5=\frac{1}{30}(\sqrt{7})^5=\frac{49\sqrt{7}}{30}$$

25 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点で接する直線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と (1) で求めた直線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$y=4x-4$　　(2)　$\dfrac{81}{10}$

解説

(1)　曲線　$y=f(x)$ と直線 $y=mx+n$ が，$x=a,\ b\ (a<b)$ の 2 点で接するとき，次の恒等式が成り立つ。

$f(x)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2$　…(※)

よって

$x^4+2x^3-3x^2-mx-n$

$=x^4-2(a+b)x^3+\{(a+b)^2+2ab\}x^2-2ab(a+b)x+a^2b^2$

両辺の係数を比較して

$2=-2(a+b)$　…… ①，$-3=(a+b)^2+2ab$　…… ②，

$-m=-2ab(a+b)$　…… ③，$-n=a^2b^2$　…… ④

① から　$a+b=-1$　　これと ② から　$ab=-2$

これらを ③，④ に代入して　$m=4,\ n=-4$

$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2+t-2=0$ の解 $t=-2,\ 1$ であるから

$a\fallingdotseq b$

よって，求める直線の方程式は　$y=4x-4$

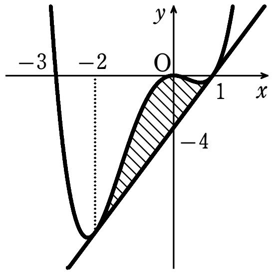
(2)　$a<b$ であるから　　$a=-2,\ b=1$

区間 $-2\leqq x\leqq 1$ で

$$x^4+2x^3-3x^2\geqq 4x-4$$

であるから

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^4+2x^3-3x^2)-(4x-4)\}dx$$
$$=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-2+4\right)-\left(-\frac{32}{5}+8+8-8-8\right)=\frac{81}{10}$$



参考

(※)を用いると

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^4+2x^3-3x^2)-(4x-4)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x+2)^2(x-1)^2dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x+2)^2\{(x+2)-3\}^2dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x+2)^2\{(x+2)^2-6(x+2)+9\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\{(x+2)^4-6(x+2)^3+9(x+2)^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}(x+2)^5-\frac{3}{2}(x+2)^4+3(x+2)^3\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{1}{5}\cdot3^5-\frac{3}{2}\cdot3^4+3\cdot3^3=3^4\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}+1\right)=\frac{81}{10}$$

$\boxed{26}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=y^2,\ x=y+2$　　　(2)　$y=2x^2,\ 4x=y^2$

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　　(2)　$\frac{2}{3}$

解説

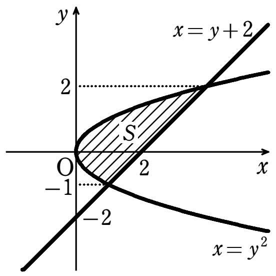
(1)　放物線と直線の交点の y 座標は，

$y^2=y+2$　すなわち　$y^2-y-2=0$

を解くと，$(y+1)(y-2)=0$から　　$y=-1,\ 2$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy=-\int_{-1}^{2}(y+1)(y-2)dy$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$$



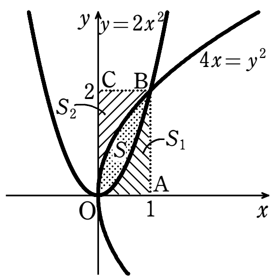
(2)　2 曲線 $y=2x^2$，$4x=y^2$ の交点の x 座標は，y を消去した方程式 $4x=4x^4$ の実数解である。

$x(x^3-1)=0$ から　　$x=0,\ 1$

求める面積は，右の図において，長方形 OABC の面積から，2 つの図形の面積 S_1，S_2 を引いて得られる。

したがって

$$S=1\cdot2-\int_{0}^{1}2x^2dx-\int_{0}^{2}\frac{y^2}{4}dy$$
$$=2-\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{1}-\left[\frac{y^3}{12}\right]_{0}^{2}=2-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$



$\boxed{27}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=y^2-2y$，y 軸　　　(2)　$y^2=2x,\ y^2=2+4y-2x$

解答　(1)　$\frac{4}{3}$　　(2)　$\frac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

(1)　放物線と y 軸の交点の y 座標は，

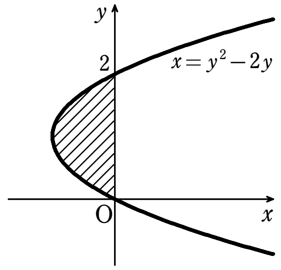
$y^2-2y=0$　すなわち　$y(y-2)=0$

の解である。

これを解くと　　$y=0,\ 2$

よって

$$S=-\int_{0}^{2}(y^2-2y)dy$$
$$=-\int_{0}^{2}y(y-2)dy$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3=\frac{4}{3}$$



(2)　2 曲線の交点の y 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は

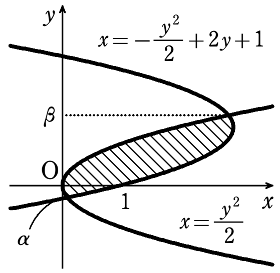
$y^2=2+4y-y^2$　すなわち　$y^2-2y-1=0$ ……①

の解である。

また，$y^2=2+4y-2x$ から

$$x=-\frac{y^2}{2}+2y+1$$

グラフは右の図のようになる。



したがって

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(-\frac{y^2}{2}+2y+1\right)-\frac{y^2}{2}\right\}dy=-\int_{\alpha}^{\beta}(y^2-2y-1)dy=-\int_{\alpha}^{\beta}(y-\alpha)(y-\beta)dy$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

α，β は ① の解 $y=1\pm\sqrt{2}$ で，$\alpha<\beta$ から　　$\alpha=1-\sqrt{2}$，$\beta=1+\sqrt{2}$

よって　　$S=\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{28}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+3$，x 軸，$x=-1$，$x=3$　　　(2)　$y=-2x^2+x+2$，x 軸，y 軸，$x=1$

(3)　$y=-x^2+2x$，x 軸　　　(4)　$y=-x^2-2x+3$，x 軸

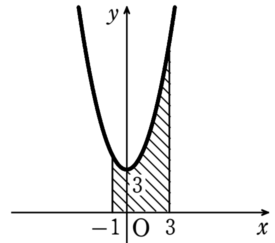
(5)　$y=x^3+3x^2+3x+1$，x 軸，y 軸

解答　(1)　$\frac{64}{3}$　　(2)　$\frac{11}{6}$　　(3)　$\frac{4}{3}$　　(4)　$\frac{32}{3}$　　(5)　$\frac{1}{4}$

解説

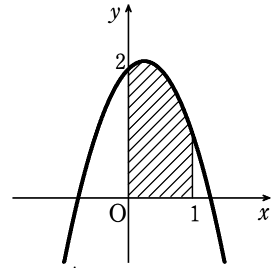
(1)　$y=x^2+3$ について，常に $y>0$ であるから

$$S=\int_{-1}^{3}(x^2+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$



(2)　$y=-2x^2+x+2$ について，区間 $0\leqq x\leqq 1$ で $y>0$ であるから

$$S=\int_{0}^{1}(-2x^2+x+2)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{11}{6}$$



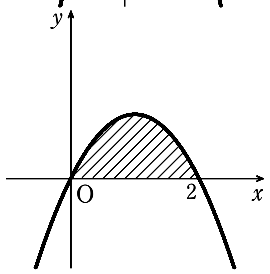
(3)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+2x=0$

を解いて　　$x=0,\ 2$

区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx=-\int_{0}^{2}x(x-2)dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

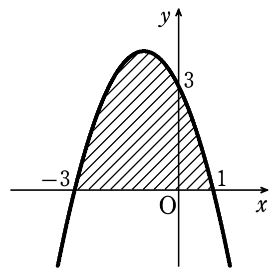
(4)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2-2x+3=0$

を解いて　　$x=-3,\ 1$

区間 $-3\leqq x\leqq 1$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$$

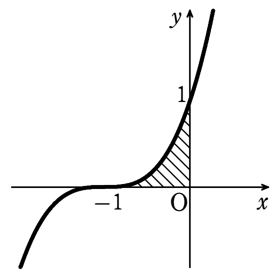
(5)　$y=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

よって，曲線と x 軸の交点の x 座標は

$x=-1$

区間 $-1\leqq x\leqq 0$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+3x+1)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-1}^{0}(x+1)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$$

29 次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2+4x$　　(2) $y=x^2+3x+2$

(3) $y=x^3-5x^2$　　(4) $y=-(x-1)^2(x+1)$

解答 (1) $\dfrac{32}{3}$　(2) $\dfrac{1}{6}$　(3) $\dfrac{625}{12}$　(4) $\dfrac{4}{3}$

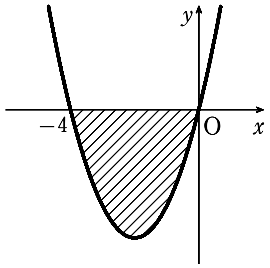
解説

(1) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+4x=0$ を解いて　$x=-4,\ 0$

区間 $-4\leqq x\leqq 0$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-4}^{0}(x^2+4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{-4}^{0}=\frac{32}{3}$$



別解 [積分の計算]

$$S=-\int_{-4}^{0}(x^2+4x)dx=-\int_{-4}^{0}(x+4)x\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{0-(-4)\}^3=\frac{32}{3}$$

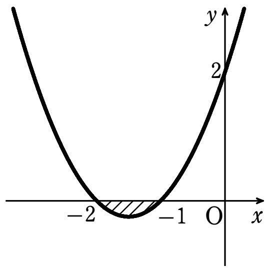
(2) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+3x+2=0$ を解いて　$x=-2,\ -1$

区間 $-2\leqq x\leqq -1$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{-1}(x^2+3x+2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}=\frac{1}{6}$$



別解 [積分の計算]

$$S=-\int_{-2}^{-1}(x^2+3x+2)dx=-\int_{-2}^{-1}(x+2)(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(-1)-(-2)\}^3=\frac{1}{6}$$

(3) 曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

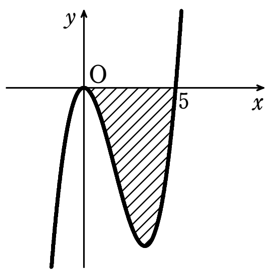
$x^3-5x^2=0$　すなわち　$x^2(x-5)=0$

を解いて　$x=0,\ 5$

区間 $0\leqq x\leqq 5$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{0}^{5}(x^3-5x^2)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3\right]_{0}^{5}$$

$$=\frac{625}{12}$$



(4) 曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

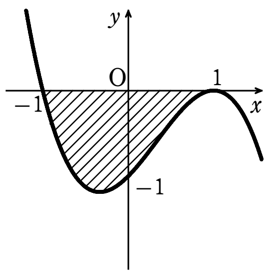
$(x-1)^2(x+1)=0$ を解いて　$x=\pm 1$

区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-1}^{1}\{-(x-1)^2(x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$



30 曲線 $y=-x^3+x^2+2x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答 $\dfrac{37}{12}$

解説

曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^3+x^2+2x=0$　すなわち　$x(x+1)(x-2)=0$

を解いて　$x=-1,\ 0,\ 2$

区間 $-1\leqq x\leqq 0$ で　$y\leqq 0$

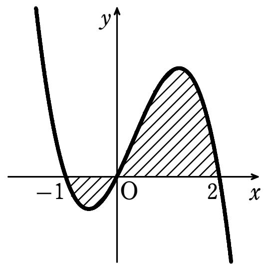
区間 $0\leqq x\leqq 2$ で　$y\geqq 0$

よって

$$S=-\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=-\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{37}{12}$$



31 次の曲線と直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-4x-2,\ y=0$　　(2) $y=x^2+x,\ y=1-x$

(3) $y=|x^2-x-2|,\ y=x+1$

解答 (1) $8\sqrt{6}$　(2) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　(3) $\dfrac{13}{3}$

解説

(1) 曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x-2=0$ を解いて　$x=2\pm\sqrt{6}$

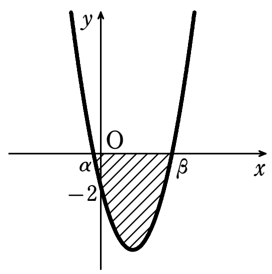
$\alpha=2-\sqrt{6}$，$\beta=2+\sqrt{6}$ とおくと，区間

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $x^2-4x-2\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x-2)dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}$$



(2) 曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x=1-x$　すなわち　$x^2+2x-1=0$

を解いて　$x=-1\pm\sqrt{2}$

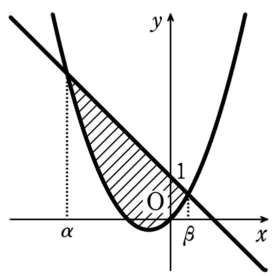
$\alpha=-1-\sqrt{2}$，$\beta=-1+\sqrt{2}$ とおくと，区間

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $1-x\geqq x^2+x$ であるから

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(1-x)-(x^2+x)\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+2x-1)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$



(3) $|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$

$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+x+2=x+1$　すなわち　$x^2-1=0$

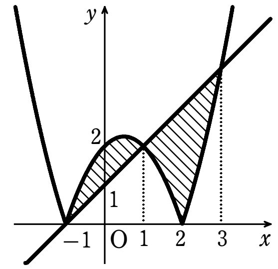
を解いて　$x=\pm 1$

$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき，曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-x-2=x+1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

を解いて　$x=-1,\ 3$

したがって，グラフから



$$S=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x+1)-(-x^2+x+2)\}dx$$

$$+\int_{2}^{3}\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx$$

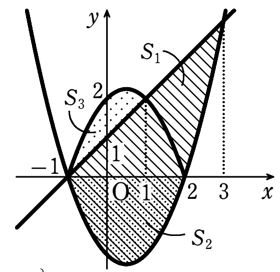
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{13}{3}$$

別解 (面積の求め方)

右図のように，曲線 $y=x^2-x-2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=x^2-x-2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2，曲線 $y=-x^2+x+2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を S_3 とすると



$$S=S_1-(2S_2-S_3)+S_3=S_1-2S_2+2S_3$$

$$=\int_{-1}^{3}\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx-2\left\{\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx\right\}$$

$$+2\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx+2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx-2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}-2\cdot\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}+2\cdot\frac{\{1-(-1)\}^3}{6}$$

$$=\frac{13}{3}$$

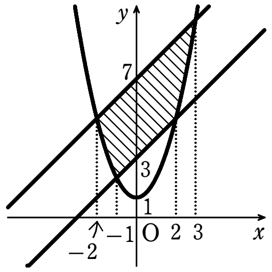
32 次の不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の存在する部分の面積を求めよ。

$y\geqq x^2+1,\ y\geqq x+3,\ y\leqq x+7$

解答 $\dfrac{49}{3}$

解説

放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=x+3$ の交点の x 座標は，
方程式 $x^2+1=x+3$ すなわち $x^2-x-2=0$ を解いて
$x=-1,\ 2$
放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=x+7$ の交点の x 座標は，
方程式 $x^2+1=x+7$ すなわち $x^2-x-6=0$ を解いて
$x=-2,\ 3$
よって，与えられた不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の存在する部分は右図の斜線部分である。



したがって，求める面積は

$$\int_{-2}^{3}\{(x+7)-(x^2+1)\}dx-\int_{-1}^{2}\{(x+3)-(x^2+1)\}dx$$

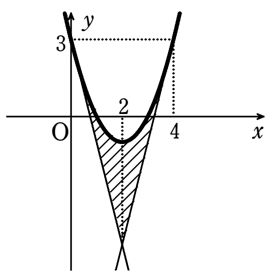
$$=-\int_{-2}^{3}(x+2)(x-3)dx+\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{3-(-2)\}^3-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\frac{49}{3}$$

$\boxed{33}$ 放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{16}{3}$

解説



$y=x^2-4x+3$ から　　$y'=2x-4$
点 $(4,\ 3)$ における接線の方程式は
$y-3=4(x-4)$　　すなわち　　$y=4x-13$
点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は
$y-3=-4(x-0)$　　すなわち　　$y=-4x+3$
この 2 つの接線の交点の x 座標は，方程式
$4x-13=-4x+3$ を解いて　　$x=2$
グラフから，求める面積は

$$\int_0^2\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx+\int_2^4\{(x^2-4x+3)-(4x-13)\}dx$$

$$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x^2-8x+16)dx \quad \cdots\cdots ①$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_2^4=\frac{16}{3}$$

別解　放物線と 2 つの接線で囲まれた部分は，直線 $x=2$ に関して対称であるから，その面積は　$2\displaystyle\int_0^2\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{16}{3}$

参考　放物線とその接線で囲まれた図形の面積を求めるとき，定積分の被積分関数は $(ax+b)^2$ の形になるので，公式

$$\int(ax+b)^2dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^3+C$$

が利用できる。例えば，この公式を用いると ① の定積分は次のように計算できる。

$$\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x^2-8x+16)dx=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x-4)^2dx$$

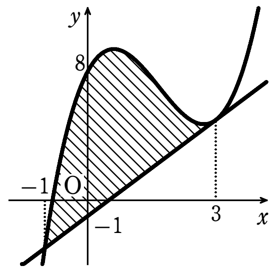
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4=\frac{16}{3}$$

$\boxed{34}$ 曲線 $y=x^3-5x^2+5x+8$ と，その曲線上の点 $(3,\ 5)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{64}{3}$

解説

$y=x^3-5x^2+5x+8$ について　　$y'=3x^2-10x+5$
$x=3$ のとき　　$y'=2$
よって，点 $(3,\ 5)$ における接線の方程式は
$y-5=2(x-3)$　　すなわち　　$y=2x-1$
この接線と曲線の共有点の x 座標は，方程式
$x^3-5x^2+5x+8=2x-1$
すなわち $x^3-5x^2+3x+9=0$ の解である。
左辺を因数分解して　　$(x-3)^2(x+1)=0$
よって　　$x=-1,\ 3$



グラフから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{3}\{(x^3-5x^2+5x+8)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

別解　[S の計算]

$$S=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)dx=\int_{-1}^{3}(x-3)^2(x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x-3)^2\{(x-3)+4\}dx=\int_{-1}^{3}(x-3)^3dx+4\int_{-1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-3)^4\right]_{-1}^{3}+4\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{-1}^{3}$$

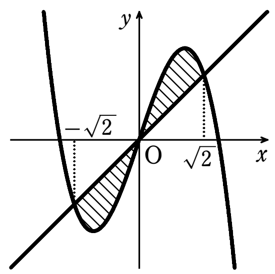
$$=-\frac{1}{4}(-4)^4-4\cdot\frac{1}{3}(-4)^3=\frac{64}{3}$$

$\boxed{35}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
(1)　$y=-x^3+3x,\ y=x$　　　　(2)　$y=x^3-6x^2,\ y=x^2$

解答　(1)　2　　(2)　$\dfrac{2401}{12}$

解説

(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式
$-x^3+3x=x$　すなわち　$x(x^2-2)=0$
を解いて　　$x=0,\ \pm\sqrt{2}$
グラフから



$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{x-(-x^3+3x)\}dx$$

$$+\int_0^{\sqrt{2}}\{(-x^3+3x)-x\}dx$$

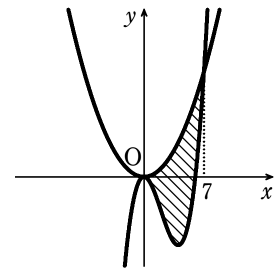
$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)dx+\int_0^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=2$$

別解　[S の計算]　曲線と直線は原点に関して対称であるから

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}\{(-x^3+3x)-x\}dx=2\int_0^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx=2\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=2$$

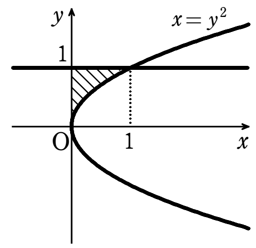
(2)　2 曲線の共有点の x 座標は，方程式
$x^3-6x^2=x^2$　　すなわち　　$x^2(x-7)=0$
を解いて　　$x=0,\ 7$
グラフから



$$S=\int_0^7\{x^2-(x^3-6x^2)\}dx=\int_0^7(-x^3+7x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{7}{3}x^3\right]_0^7=\frac{2401}{12}$$

$\boxed{36}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
(1)　$x=y^2,\ y=1,\ x=0$
(2)　$x=y^2-1,\ x=0$
(3)　$x=-y^2,\ y=x$

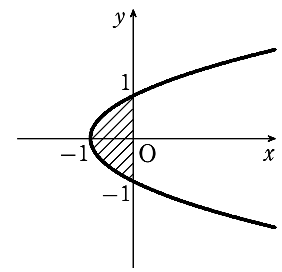
(1)


解答　(1)　$\dfrac{1}{3}$　　(2)　$\dfrac{4}{3}$　　(3)　$\dfrac{1}{6}$

解説

(1)　$S=\displaystyle\int_0^1 y^2dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

(2)　曲線と直線の交点の y 座標は，方程式 $y^2-1=0$
を解いて　　$y=\pm1$
区間 $-1\leqq y\leqq 1$ で $y^2-1\leqq 0$ であるから



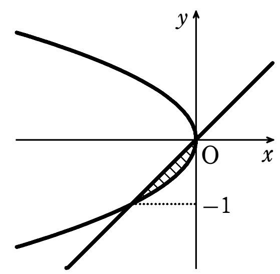
$$S=-\int_{-1}^{1}(y^2-1)dy=-2\int_0^1(y^2-1)dy$$

$$=-2\left[\frac{y^3}{3}-y\right]_0^1=-2\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-0\right\}=\frac{4}{3}$$

別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-1}^{1}(y+1)(y-1)dy=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{4}{3}$$

(3)　曲線と直線の交点の y 座標は，方程式 $-y^2=y$
を解いて　　$y=0,\ -1$
区間 $-1\leqq y\leqq 0$ で $-y^2\geqq y$ であるから



$$S=\int_{-1}^{0}(-y^2-y)dy$$

$$=\left[-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$$

別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-1}^{0}(y+1)y\,dy=\frac{1}{6}\{0-(-1)\}^3=\frac{1}{6}$$

37 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

(1) $y=x(x-1)(x+2)$　　(2) $y=x^3-5x^2+6x$　　(3) $y=-x^3+3x^2+x-3$

解答　(1) $\dfrac{37}{12}$　(2) $\dfrac{37}{12}$　(3) 8

解説

求める面積の和を S とする。

(1) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x(x-1)(x+2)=0$

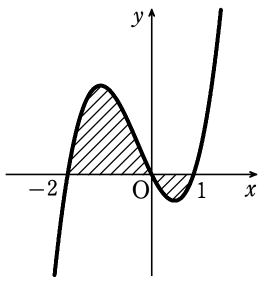
を解いて　$x=-2,\ 0,\ 1$

グラフは右の図のようになり

$-2\leqq x\leqq 0$ では　$y\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 1$ では　$y\leqq 0$

したがって



$$S=\int_{-2}^{0}x(x-1)(x+2)dx+\int_{0}^{1}\{-x(x-1)(x+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}=-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{37}{12}$$

(2) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^3-5x^2+6x=0$

すなわち　$x(x-2)(x-3)=0$

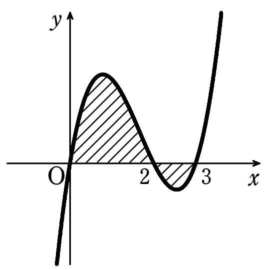
を解いて　$x=0,\ 2,\ 3$

グラフは右の図のようになり

$0\leqq x\leqq 2$ では　$y\geqq 0$

$2\leqq x\leqq 3$ では　$y\leqq 0$

したがって



$$S=\int_{0}^{2}(x^3-5x^2+6x)dx+\int_{2}^{3}\{-(x^3-5x^2+6x)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{5}{3}x^3-3x^2\right]_{2}^{3}$$

$$=\left(4-\frac{40}{3}+12\right)+\left\{\left(-\frac{81}{4}+45-27\right)-\left(-4+\frac{40}{3}-12\right)\right\}=\frac{37}{12}$$

参考　(2) の関数のグラフは，(1) の関数のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものであるから，(1) と (2) の答は等しくなる。

(3) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^3+3x^2+x-3=0$

すなわち　$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

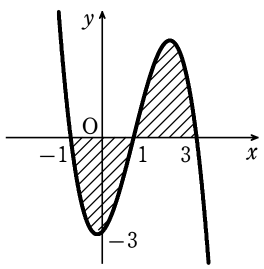
を解いて　$x=\pm 1,\ 3$

グラフは右の図のようになり

$-1\leqq x\leqq 1$ では　$y\leqq 0$

$1\leqq x\leqq 3$ では　$y\geqq 0$

したがって



$$S=\int_{-1}^{1}\{-(-x^3+3x^2+x-3)\}dx+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx$$

$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_{0}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}-3x\right]_{1}^{3}$$

$$=2(-1+3)+\left\{\left(-\frac{81}{4}+27+\frac{9}{2}-9\right)-\left(-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right)\right\}=8$$

38 曲線 $y=x^3-x^2-12x$ と，その曲線上の点 $(-1,\ 10)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{64}{3}$

解説

$y=x^3-x^2-12x$ から　　$y'=3x^2-2x-12$

$x=-1$ のとき　　$y'=-7$

よって，曲線上の点 $(-1,\ 10)$ における接線の方程式は　　$y-10=-7(x+1)$

すなわち　　$y=-7x+3$

曲線と接線の共有点の x 座標は，方程式

$x^3-x^2-12x=-7x+3$

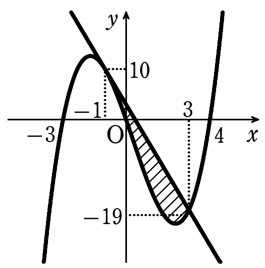
すなわち，$x^3-x^2-5x-3=0$ の解である。

左辺を因数分解すると　　$(x+1)^2(x-3)=0$

よって　　$x=-1,\ 3$

ゆえに，曲線と接線が交わる点の x 座標は 3 であり，グラフは右の図のようになる。

したがって，求める面積は



$$\int_{-1}^{3}\{(-7x+3)-(x^3-x^2-12x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^3+x^2+5x+3)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

別解　[積分の計算]

$$-\int_{-1}^{3}(x^3-x^2-5x-3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)^2(x-3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)^2\{(x+1)-4\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{3}\{(x+1)^3-4(x+1)^2\}dx$$

$$=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-\frac{4}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

39 放物線 $y=x^2-x+4$ に点 $(1,\ 0)$ から 2 本の接線を引くとき，放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{16}{3}$

解説

$y=x^2-x+4$ から　　$y'=2x-1$

接点の座標を $(t,\ t^2-t+4)$ とすると，接線の傾きは $2t-1$ となるから，その方程式は

$y-(t^2-t+4)=(2t-1)(x-t)$

すなわち　　$y=(2t-1)x-t^2+4$　……①

この直線が点 $(1,\ 0)$ を通るから

$0=(2t-1)\cdot 1-t^2+4$

整理すると　　$t^2-2t-3=0$

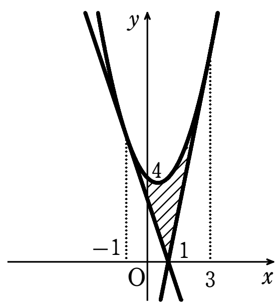
これを解くと　　$t=-1,\ 3$

よって，接線の方程式は，① より

$t=-1$ のとき　　$y=-3x+3$

$t=3$ のとき　　$y=5x-5$

したがって，求める面積は，図から



$$\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+4)-(-3x+3)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+4)-(5x-5)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx=2\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{1}^{3}=\frac{16}{3}$$

参考　[積分の計算]

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{16}{3}$$

40 曲線 $y=|x^2-4x|$ と直線 $y=x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

解答　$\dfrac{17}{2}$

解説

$|x^2-4x|=|x(x-4)|$

$x\leqq 0,\ 4\leqq x$ のとき　　$|x^2-4x|=x^2-4x$

$0\leqq x\leqq 4$ のとき　　$|x^2-4x|=-x^2+4x$

$x\leqq 0,\ 4\leqq x$ のとき，曲線と直線の共有点の x 座標は，方程式 $x^2-4x=x$ すなわち

$x^2-5x=0$

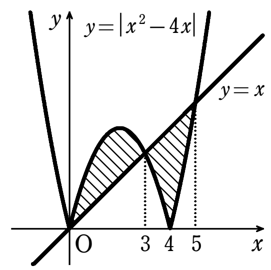
を解いて　　$x=0,\ 5$

$0\leqq x\leqq 4$ のとき，曲線と直線の共有点の x 座標は，方程式 $-x^2+4x=x$ すなわち

$x^2-3x=0$

を解いて　　$x=0,\ 3$

したがって，求める面積の和は



$$\int_{0}^{3}\{(-x^2+4x)-x\}dx+\int_{3}^{4}\{x-(-x^2+4x)\}dx$$

$$+\int_{4}^{5}\{x-(x^2-4x)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{3}x(x-3)dx+\int_{3}^{4}(x^2-3x)dx+\int_{4}^{5}(-x^2+5x)dx$$

$$=\frac{1}{6}(3-0)^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right]_{4}^{5}=\frac{17}{2}$$

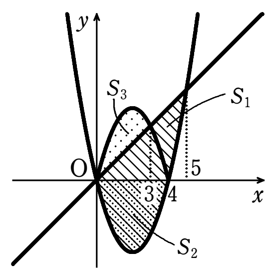
別解　[面積の求め方]

曲線 $y=x^2-4x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=x^2-4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2，曲線 $y=-x^2+4x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を S_3 とする。

求める面積の和を S とすると

$S=S_3+\{S_1-S_2-(S_2-S_3)\}=S_1-2S_2+2S_3$

ここで



$$S_1=\int_{0}^{5}\{x-(x^2-4x)\}dx=-\int_{0}^{5}x(x-5)dx=\frac{1}{6}(5-0)^3=\frac{125}{6}$$

$$S_2=\int_{0}^{4}\{-(x^2-4x)\}dx=-\int_{0}^{4}x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{64}{6}\ \left(=\frac{32}{3}\right)$$

$$S_3=\int_{0}^{3}\{(-x^2+4x)-x\}dx=-\int_{0}^{3}x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{27}{6}\ \left(=\frac{9}{2}\right)$$

よって　　$S=\dfrac{125}{6}-2\cdot\dfrac{64}{6}+2\cdot\dfrac{27}{6}=\dfrac{17}{2}$

$\boxed{41}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+1$，x 軸，$x=-2$，$x=1$

(2)　$y=4-x^2$，x 軸

(3)　$y=x^3+1$，x 軸，$x=2$

解答　(1)　6　　(2)　$\dfrac{32}{3}$　　(3)　$\dfrac{27}{4}$

解説

(1)　与えられた放物線は，図のように x 軸の上側にあるから

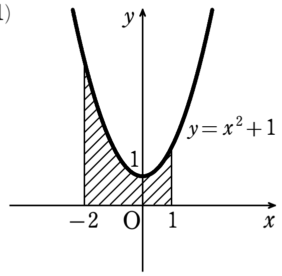
$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{1}=6$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $4-x^2=0$ を解いて　　$x=\pm2$

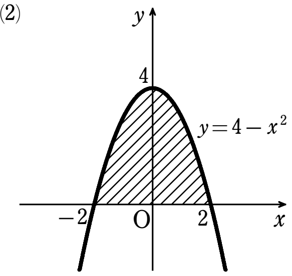
区間 $-2\leqq x\leqq2$ において $y\geqq0$ であるから

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$$

(1)



(2)



別解　$y=4-x^2$ のグラフは y 軸に関して対称であるから

$$S=2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{32}{3}$$

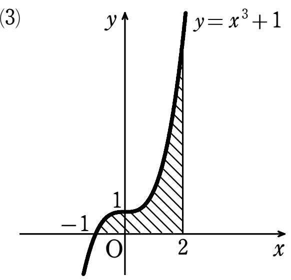
(3)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^3+1=0$ を解いて　　$x=-1$

区間 $-1\leqq x\leqq2$ において $y\geqq0$ であるから

$$S=\int_{-1}^{2}(x^3+1)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

(3)



$\boxed{42}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。[各 20 点]

(1)　$y=x^2+2x-3$ $(-2\leqq x\leqq2)$，$x=-2$，$x=2$，x 軸

(2)　$y=|x^2-x-2|$，$x=1$，$x=3$，x 軸

解答　求める面積を S とする。

(1)　$y=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

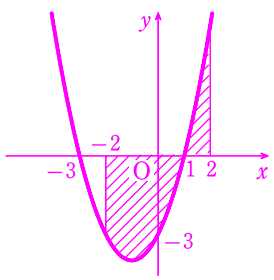
区間 $-2\leqq x\leqq1$ で $y\leqq0$，区間 $1\leqq x\leqq2$ で

$y\geqq0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{1}(x^2+2x-3)dx+\int_{1}^{2}(x^2+2x-3)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{34}{3}$$



(2)　$|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$

$x\leqq-1$，$2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

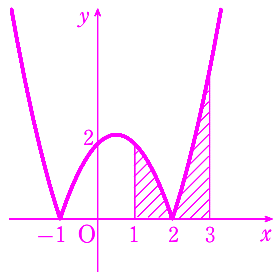
$-1\leqq x\leqq2$ のとき

$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$

よって，$y=|x^2-x-2|$ のグラフは右図のようになる。グラフから

$$S=\int_{1}^{2}(-x^2+x+2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}=3$$



解説

求める面積を S とする。

(1)　$y=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

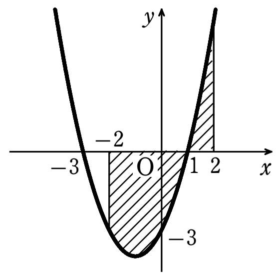
区間 $-2\leqq x\leqq1$ で $y\leqq0$，区間 $1\leqq x\leqq2$ で

$y\geqq0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{1}(x^2+2x-3)dx+\int_{1}^{2}(x^2+2x-3)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{34}{3}$$



(2)　$|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$

$x\leqq-1$，$2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

$-1\leqq x\leqq2$ のとき

$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$

よって，$y=|x^2-x-2|$ のグラフは右図のようになる。グラフから

$$S=\int_{1}^{2}(-x^2+x+2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}=3$$