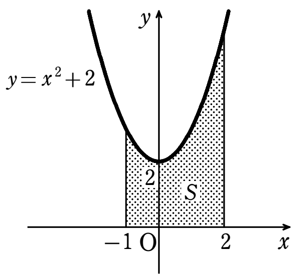
$\boxed{1}$ 放物線 $y=x^2+2$ と x 軸，および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　9

解説

与えられた放物線は，右の図のように x 軸の上側にあるから

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+2)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=9$$



$\boxed{2}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+1$，x 軸，$x=-2$，$x=1$

(2)　$y=4-x^2$，x 軸

(3)　$y=x^3+1$，x 軸，$x=2$

解答　(1)　6　　(2)　$\dfrac{32}{3}$　　(3)　$\dfrac{27}{4}$

解説

(1)　与えられた放物線は，図のように x 軸の上側にあるから

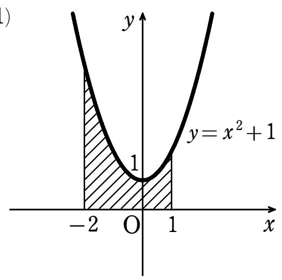
$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{1}=6$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $4-x^2=0$ を解いて　　$x=\pm2$

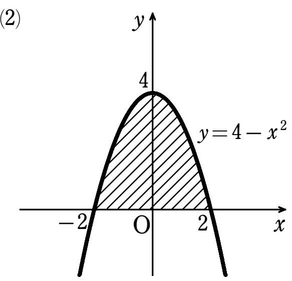
区間 $-2\leqq x\leqq2$ において $y\geqq0$ であるから

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$$

(1)



(2)



別解　$y=4-x^2$ のグラフは y 軸に関して対称であるから

$$S=2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{32}{3}$$

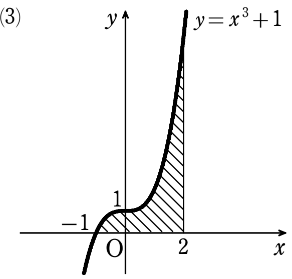
(3)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^3+1=0$ を解いて　　$x=-1$

区間 $-1\leqq x\leqq2$ において $y\geqq0$ であるから

$$S=\int_{-1}^{2}(x^3+1)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

(3)



$\boxed{3}$ 次の 2 つの放物線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y=x^2+2x-3$,　　$y=-x^2+2x+3$

解答　$8\sqrt{3}$

解説

2 つの放物線は右の図のようになり，それらの交点の x 座標は，

方程式

$x^2+2x-3=-x^2+2x+3$

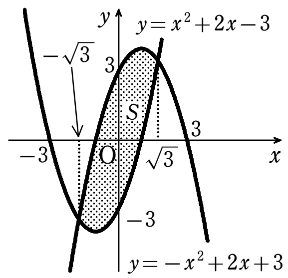
の解である。これを解くと

$2x^2-6=0$

から　　$x=\pm\sqrt{3}$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{(-x^2+2x+3)-(x^2+2x-3)\}dx$$
$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(6-2x^2)dx=\left[6x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$$



$\boxed{4}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x-3$，$y=2x-3$　　　(2)　$y=x^2-6x+7$，$y=-x^2+2x+1$

解答　(1)　$\dfrac{32}{3}$　　(2)　$\dfrac{8}{3}$

解説

(1)　放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-2x-3=2x-3$

の解である。これを解くと

$x^2-4x=0$

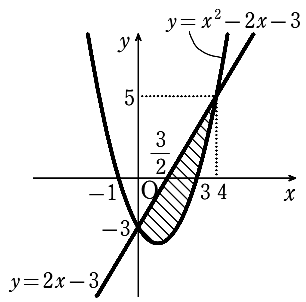
$x(x-4)=0$ から　　$x=0$，4

また，放物線と直線は右の図のようになり，

$0\leqq x\leqq4$ で $2x-3\geqq x^2-2x-3$ である。

よって

$$S=\int_{0}^{4}\{(2x-3)-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$



(2)　2 つの放物線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-6x+7=-x^2+2x+1$

の解である。これを解くと

$2x^2-8x+6=0$

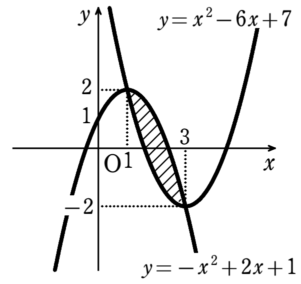
$2(x-1)(x-3)=0$ から　　$x=1$，3

また，2 つの放物線は右の図のようになり，

$1\leqq x\leqq3$ で $-x^2+2x+1\geqq x^2-6x+7$ である。

よって

$$S=\int_{1}^{3}\{(-x^2+2x+1)-(x^2-6x+7)\}dx$$
$$=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}$$



$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{4}{3}$

解説

放物線と x 軸の交点の x 座標は，

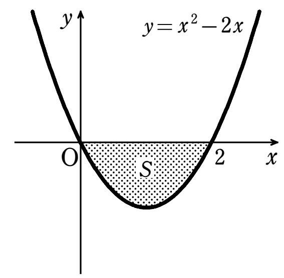
方程式　$x^2-2x=0$

を解いて　$x=0$，2

区間 $0\leqq x\leqq2$ において $y\leqq0$ であるから，

求める面積 S は

$$S=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$



$\boxed{6}$ 放物線 $y=x^2-3x-4$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{125}{6}$

解説

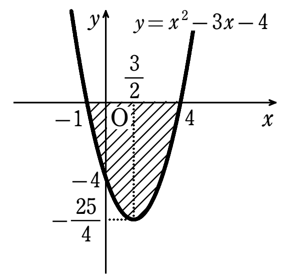
放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2-3x-4=0$ を解いて　　$x=-1$，4

区間 $-1\leqq x\leqq4$ において $y\leqq0$ であるから，求める

面積 S は

$$S=-\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$$



$\boxed{7}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x$，x 軸，$x=3$　　　(2)　$y=x^3-2x^2-x+2$，x 軸

解答　(1)　$\dfrac{8}{3}$　　(2)　$\dfrac{37}{12}$

解説

(1)　$x^2-2x=x(x-2)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は　$x=0,\ 2$

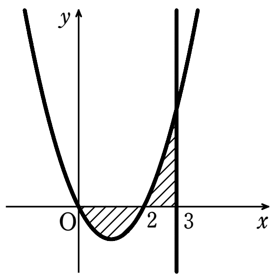
よって，図から，求める面積 S は

$$S=-\int_0^2(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+0+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)$$

$$=\frac{8}{3}$$



(2)　$x^3-2x^2-x+2=x(x^2-1)-2(x^2-1)$

$$=(x^2-1)(x-2)$$

$$=(x+1)(x-1)(x-2)$$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

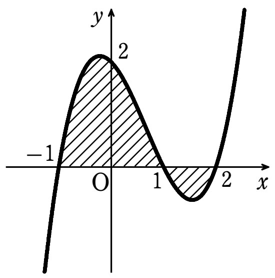
$x=-1,\ 1,\ 2$

よって，図から，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_1^2(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)-0-\left\{\frac{16-1}{4}-\frac{2}{3}(8-1)-\frac{4-1}{2}+2(2-1)\right\}=\frac{37}{12}$$



8 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=2x^2+3x-2$　　(2)　$y=x^2-4x-5\ (x\leqq 4)$，$x=-2$，$x=4$

(3)　$y=x^3-5x^2+6x$

解答　(1)　$\dfrac{125}{24}$　　(2)　$\dfrac{110}{3}$　　(3)　$\dfrac{37}{12}$

解説

(1)　$2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

$x=-2,\ \dfrac{1}{2}$

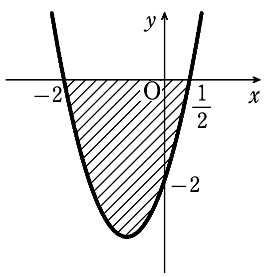
よって，図から，求める面積 S は

$$S=-\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(2x^2+3x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\left\{\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{8}-1\right)-\left(-\frac{16}{3}+6+4\right)\right\}$$

$$=\frac{125}{24}$$



別解　$S=-\displaystyle\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(2x^2+3x-2)dx=-2\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$

$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}^3=\frac{125}{24}$$

(2)　$x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

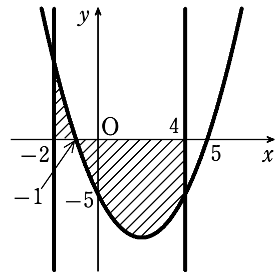
$x=-1,\ 5$

よって，図から，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{-1}(x^2-4x-5)dx-\int_{-1}^{4}(x^2-4x-5)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-1}^{4}$$

$$=2\cdot\frac{8}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{92}{3}\right)=\frac{110}{3}$$



(3)　$x^3-5x^2+6x=x(x^2-5x+6)$

$$=x(x-2)(x-3)$$

曲線と x 軸の交点の x 座標は

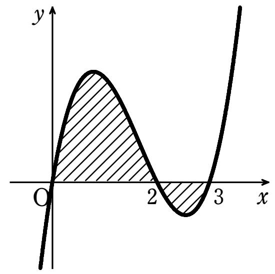
$x=0,\ 2,\ 3$

よって，図から，求める面積 S は

$$S=\int_0^2(x^3-5x^2+6x)dx-\int_2^3(x^3-5x^2+6x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3$$

$$=2\cdot\frac{8}{3}-0-\frac{9}{4}=\frac{37}{12}$$



9 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-x-4$，$y=x-1$　　(2)　$y=x^2-x$，$y=-x^2+3x+4$

解答　(1)　$\dfrac{32}{3}$　　(2)　$8\sqrt{3}$

解説

(1)　放物線と直線の交点の x 座標は，

$x^2-x-4=x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

を解くと，$(x+1)(x-3)=0$ から　$x=-1,\ 3$

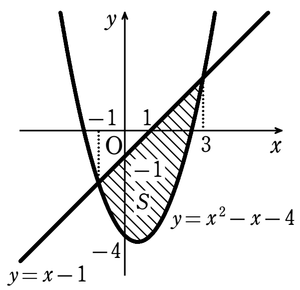
よって，右の図から，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^3\{(x-1)-(x^2-x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$

$$=-\int_{-1}^3(x+1)(x-3)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$



(2)　2 つの放物線の交点の x 座標は，

$x^2-x=-x^2+3x+4$　すなわち　$x^2-2x-2=0$　…… ①

を解いて　$x=1\pm\sqrt{3}$

$\alpha=1-\sqrt{3}$，$\beta=1+\sqrt{3}$ とすると，求める面積 S は

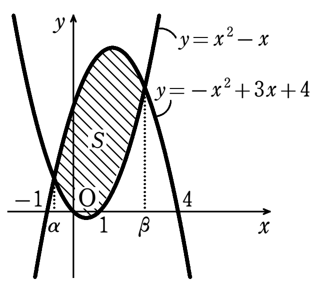
$$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+3x+4)-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(-2x^2+4x+4)dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^3=8\sqrt{3}$$



別解　2 次方程式 ① の解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-2$

よって　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot(-2)=12$

したがって　$S=\dfrac{1}{3}\cdot(\sqrt{12})^3=8\sqrt{3}$

10 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=2x^2-3x+1$，$y=2x-1$　　(2)　$y=2x^2-7x+8$，$y=-x^2+5x-1$

(3)　$y=x^2-3x$，$y=-x^2+x+5$

解答　(1)　$\dfrac{9}{8}$　　(2)　4　　(3)　$\dfrac{14\sqrt{14}}{3}$

解説

(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，

$2x^2-3x+1=2x-1$　すなわち　$2x^2-5x+2=0$

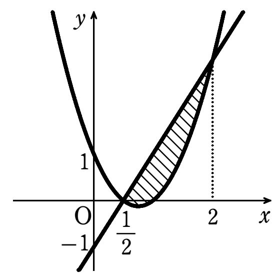
を解くと，$(2x-1)(x-2)=0$ から　$x=\dfrac{1}{2},\ 2$

したがって

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^2\{(2x-1)-(2x^2-3x+1)\}dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{2}}^2(2x-1)(x-2)dx=-2\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)dx$$

$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{8}$$



(2)　2 曲線の交点の x 座標は，

$2x^2-7x+8=-x^2+5x-1$

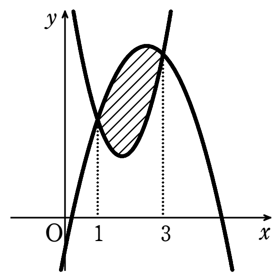
すなわち　$3x^2-12x+9=0$

を解くと，$3(x-1)(x-3)=0$ から　$x=1,\ 3$

したがって

$$S=\int_1^3\{(-x^2+5x-1)-(2x^2-7x+8)\}dx$$

$$=-3\int_1^3(x-1)(x-3)dx=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=4$$



(3)　2 曲線の交点の x 座標は，$x^2-3x=-x^2+x+5$

すなわち　$2x^2-4x-5=0$　…… ① を解いて

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{14}}{2}$

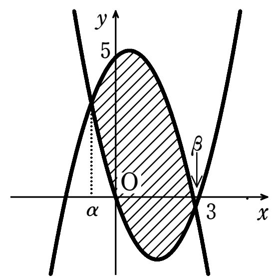
$\alpha=\dfrac{2-\sqrt{14}}{2}$，　$\beta=\dfrac{2+\sqrt{14}}{2}$ とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+x+5)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(-2x^2+4x+5)dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2+\sqrt{14}}{2}\right)-\left(\frac{2-\sqrt{14}}{2}\right)\right\}^3=\frac{14\sqrt{14}}{3}$$



別解　2 次方程式 ① の解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-\dfrac{5}{2}$

ゆえに　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)=14$

$\beta-\alpha>0$ であるから　$\beta-\alpha=\sqrt{14}$

よって　$S=\frac{1}{3}(\sqrt{14})^3=\frac{14\sqrt{14}}{3}$

$\boxed{11}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+3$, x 軸, $x=-1$, $x=3$　　(2)　$y=-2x^2+x+2$, x 軸, y 軸, $x=1$

(3)　$y=-x^2+2x$, x 軸　　(4)　$y=-x^2-2x+3$, x 軸

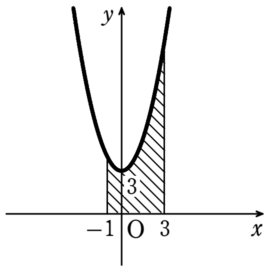
(5)　$y=x^3+3x^2+3x+1$, x 軸, y 軸

解答　(1)　$\frac{64}{3}$　(2)　$\frac{11}{6}$　(3)　$\frac{4}{3}$　(4)　$\frac{32}{3}$　(5)　$\frac{1}{4}$

解説

(1)　$y=x^2+3$ について，常に $y>0$ であるから

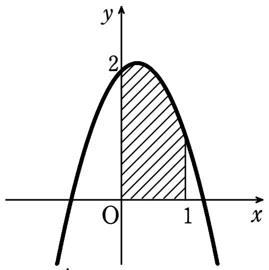
$$S=\int_{-1}^{3}(x^2+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$



(2)　$y=-2x^2+x+2$ について，区間 $0\leqq x\leqq 1$ で $y>0$ であるから

$$S=\int_{0}^{1}(-2x^2+x+2)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{11}{6}$$



(3)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

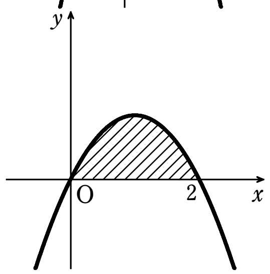
$-x^2+2x=0$

を解いて　$x=0$, 2

区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx=-\int_{0}^{2}x(x-2)dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

(4)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

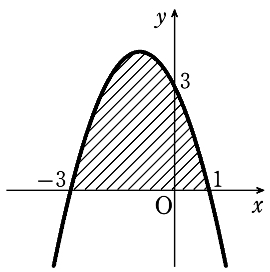
$-x^2-2x+3=0$

を解いて　$x=-3$, 1

区間 $-3\leqq x\leqq 1$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)dx=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$$

(5)　$y=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

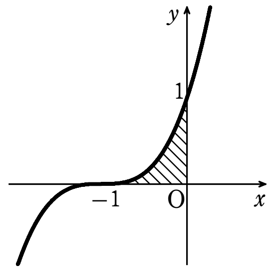
よって，曲線と x 軸の交点の x 座標は

$x=-1$

区間 $-1\leqq x\leqq 0$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+3x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-1}^{0}(x+1)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{12}$ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x$, $y=4x-x^2$　　(2)　$y=2x-1$, $y=x^2-3x+5$

(3)　$y=x^2-4$, $y=-x^2+2x$　　(4)　$y=x^2-4x+2$, $y=-x^2+2x-2$

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　(2)　$\frac{1}{6}$　(3)　9　(4)　$\frac{1}{3}$

解説

(1)　直線と曲線の交点の x 座標は，方程式

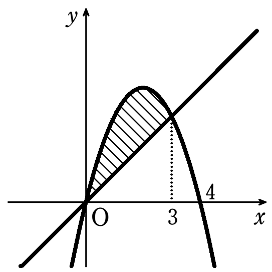
$x=4x-x^2$　すなわち　$x^2-3x=0$

を解いて　$x=0$, 3

区間 $0\leqq x\leqq 3$ で $4x-x^2\geqq x$ であるから

$$S=\int_{0}^{3}\{(4x-x^2)-x\}dx=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{0}^{3}\{(4x-x^2)-x\}dx=-\int_{0}^{3}x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

(2)　直線と曲線の交点の x 座標は，方程式

$2x-1=x^2-3x+5$　すなわち　$x^2-5x+6=0$

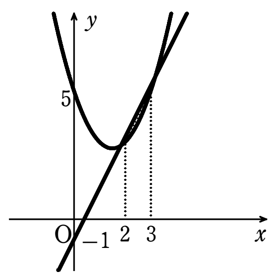
を解いて　$x=2$, 3

区間 $2\leqq x\leqq 3$ で $2x-1\geqq x^2-3x+5$ であるから

$$S=\int_{2}^{3}\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx$$

$$=\int_{2}^{3}(-x^2+5x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_{2}^{3}=\frac{1}{6}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{2}^{3}\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx=-\int_{2}^{3}(x-2)(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-2)^3=\frac{1}{6}$$

(3)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4=-x^2+2x$　すなわち　$x^2-x-2=0$

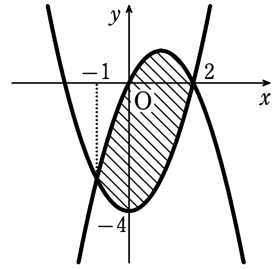
を解いて　$x=-1$, 2

区間 $-1\leqq x\leqq 2$ で $-x^2+2x\geqq x^2-4$ であるから

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx$$

$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}=9$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}dx=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=\frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3=9$$

(4)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$

すなわち

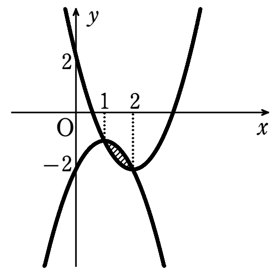
$x^2-3x+2=0$

を解いて　$x=1$, 2

区間 $1\leqq x\leqq 2$ で $-x^2+2x-2\geqq x^2-4x+2$ であるから

$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=-2\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=-2\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

$\boxed{13}$ 次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+4x$　　(2)　$y=x^2+3x+2$

(3)　$y=x^3-5x^2$　　(4)　$y=-(x-1)^2(x+1)$

解答　(1)　$\frac{32}{3}$　(2)　$\frac{1}{6}$　(3)　$\frac{625}{12}$　(4)　$\frac{4}{3}$

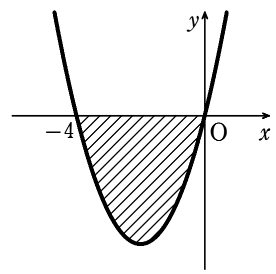
解説

(1)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+4x=0$ を解いて　$x=-4$, 0

区間 $-4\leqq x\leqq 0$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-4}^{0}(x^2+4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{-4}^{0}=\frac{32}{3}$$



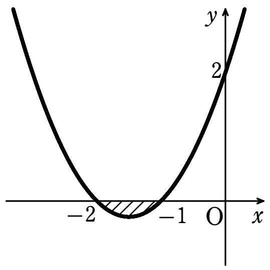
別解　[積分の計算]

$$S=-\int_{-4}^{0}(x^2+4x)dx=-\int_{-4}^{0}(x+4)xdx$$

$$=\frac{1}{6}\{0-(-4)\}^3=\frac{32}{3}$$

(2) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式
$x^2+3x+2=0$ を解いて　$x=-2,\ -1$
区間 $-2\leqq x\leqq -1$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{-1}(x^2+3x+2)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}=\frac{1}{6}$$

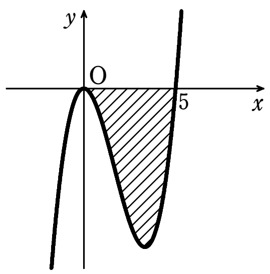


別解 ［積分の計算］

$$S=-\int_{-2}^{-1}(x^2+3x+2)dx=-\int_{-2}^{-1}(x+2)(x+1)dx$$
$$=\frac{1}{6}\{(-1)-(-2)\}^3=\frac{1}{6}$$

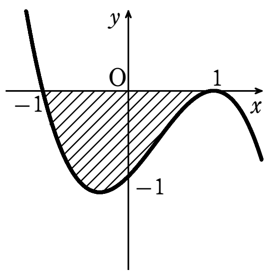
(3) 曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式
$x^3-5x^2=0$　すなわち　$x^2(x-5)=0$
を解いて　$x=0,\ 5$
区間 $0\leqq x\leqq 5$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{0}^{5}(x^3-5x^2)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3\right]_{0}^{5}$$
$$=\frac{625}{12}$$



(4) 曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式
$(x-1)^2(x+1)=0$ を解いて　$x=\pm1$
区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-1}^{1}\{-(x-1)^2(x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$

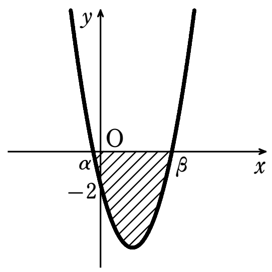


14 次の曲線と直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
(1) $y=x^2-4x-2,\ y=0$　(2) $y=x^2+x,\ y=1-x$
(3) $y=|x^2-x-2|,\ y=x+1$

解答 (1) $8\sqrt{6}$　(2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　(3) $\frac{13}{3}$

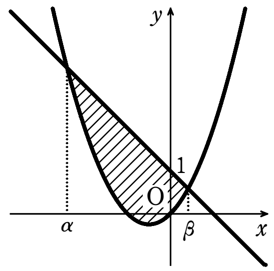
解説
(1) 曲線と直線の交点の x 座標は，方程式
$x^2-4x-2=0$ を解いて　$x=2\pm\sqrt{6}$
$\alpha=2-\sqrt{6},\ \beta=2+\sqrt{6}$ とおくと，区間
$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $x^2-4x-2\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x-2)dx$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}$$



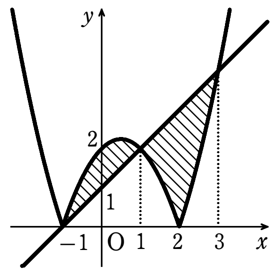
(2) 曲線と直線の交点の x 座標は，方程式
$x^2+x=1-x$　すなわち　$x^2+2x-1=0$
を解いて　$x=-1\pm\sqrt{2}$
$\alpha=-1-\sqrt{2},\ \beta=-1+\sqrt{2}$ とおくと，区間
$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $1-x\geqq x^2+x$ であるから

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(1-x)-(x^2+x)\}dx$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+2x-1)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

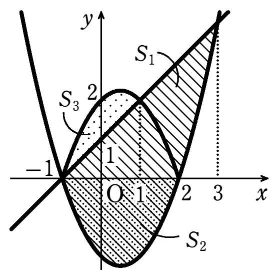


(3) $|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$
$-1\leqq x\leqq 2$ のとき
$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$
$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき
$|x^2-x-2|=x^2-x-2$
$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，曲線と直線の交点の x 座標は，方程式
$-x^2+x+2=x+1$　すなわち　$x^2-1=0$
を解いて　$x=\pm1$
$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき，曲線と直線の交点の x 座標は，方程式
$x^2-x-2=x+1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$
を解いて　$x=-1,\ 3$
したがって，グラフから

$$S=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x+1)-(-x^2+x+2)\}dx$$
$$+\int_{2}^{3}\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$
$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{13}{3}$$



別解 (面積の求め方)
右図のように，曲線 $y=x^2-x-2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=x^2-x-2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2，曲線 $y=-x^2+x+2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を S_3 とすると



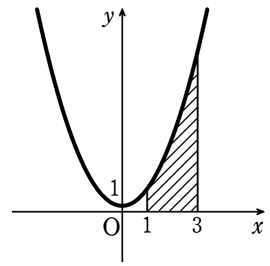
$$S=S_1-(2S_2-S_3)+S_3=S_1-2S_2+2S_3$$
$$=\int_{-1}^{3}\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx-2\left\{\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx\right\}$$
$$+2\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx+2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx-2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$
$$=\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}-2\cdot\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}+2\cdot\frac{\{1-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\frac{13}{3}$$

15 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。
(1) $y=3x^2+1,\ x=1,\ x=3$　(2) $y=x^2-4x+5,\ x=0,\ x=2$
(3) $y=-x^2-2,\ x=-1,\ x=2$

解答 (1) 28　(2) $\frac{14}{3}$　(3) 9

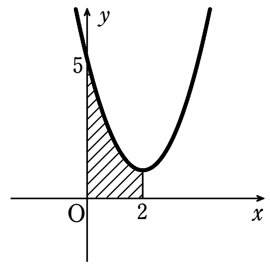
解説
求める面積を S とする。
(1) 常に $y>0$ であるから

$$S=\int_{1}^{3}(3x^2+1)dx=\left[x^3+x\right]_{1}^{3}$$
$$=(27+3)-(1+1)=28$$



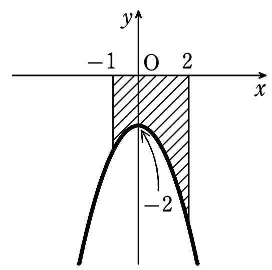
(2) $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$
常に $y>0$ であるから

$$S=\int_{0}^{2}(x^2-4x+5)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}-8+10=\frac{14}{3}$$



(3) 常に $y<0$ であるから

$$S=\int_{-1}^{2}\{-(-x^2-2)\}dx=\int_{-1}^{2}(x^2+2)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=9$$



16 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。
(1) $y=-x^2+3x$　(2) $y=x^2+2x-3$　(3) $y=x^2-6x+8$

解答 (1) $\frac{9}{2}$　(2) $\frac{32}{3}$　(3) $\frac{4}{3}$

解説

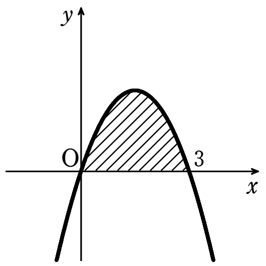
求める面積を S とする。

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+3x=0$

を解いて　$x=0,\ 3$

$0\leqq x\leqq 3$ では $y\geqq 0$ であるから



$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$$

別解　［積分の計算］

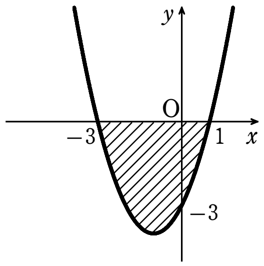
$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3 x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+2x-3=0$

を解いて　$x=-3,\ 1$

$-3\leqq x\leqq 1$ では $y\leqq 0$ であるから



$$S=\int_{-3}^1\{-(x^2+2x-3)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^1$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-(9-9-9)=\frac{32}{3}$$

別解　［積分の計算］

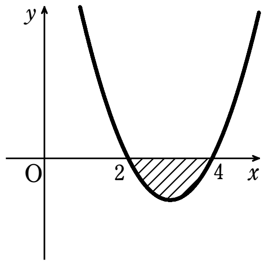
$$S=-\int_{-3}^1(x^2+2x-3)dx=-\int_{-3}^1(x+3)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$$

(3)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2-6x+8=0$

を解いて　$x=2,\ 4$

$2\leqq x\leqq 4$ では $y\leqq 0$ であるから



$$S=\int_2^4\{-(x^2-6x+8)\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^4$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+48-32\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{4}{3}$$

別解　［積分の計算］

$$S=-\int_2^4(x^2-6x+8)dx=-\int_2^4(x-2)(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-2)^3=\frac{4}{3}$$

17　次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2,\ y=-x+6$　　(2)　$y=x^2+x-4,\ y=3x-1$

解答　(1)　$\frac{125}{6}$　　(2)　$\frac{32}{3}$

解説

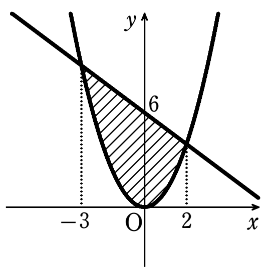
求める面積を S とする。

(1)　放物線と直線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式

$x^2=-x+6$　すなわち　$x^2+x-6=0$

を解いて　$x=-3,\ 2$

よって，図から



$$S=\int_{-3}^2\{(-x+6)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-3}^2(-x^2-x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^2=\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)-\left(9-\frac{9}{2}-18\right)=\frac{125}{6}$$

別解　［積分の計算］

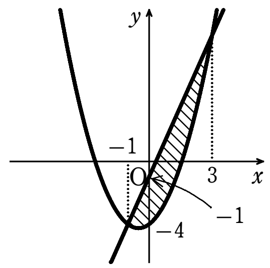
$$S=-\int_{-3}^2(x^2+x-6)dx=-\int_{-3}^2(x+3)(x-2)dx=\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=\frac{125}{6}$$

(2)　放物線と直線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式

$x^2+x-4=3x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

を解いて　$x=-1,\ 3$

よって，図から



$$S=\int_{-1}^3\{(3x-1)-(x^2+x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3$$

$$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

別解　［積分の計算］

$$S=-\int_{-1}^3(x^2-2x-3)dx=-\int_{-1}^3(x+1)(x-3)dx=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

18　次の 2 つの放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+2,\ y=-x^2+2x-2$

(2)　$y=x^2+x+1,\ y=2x^2-3x+1$

解答　(1)　$\frac{1}{3}$　　(2)　$\frac{32}{3}$

解説

求める面積を S とする。

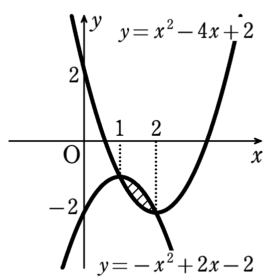
(1)　2 つの放物線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$

すなわち　$2x^2-6x+4=0$

を解いて　$x=1,\ 2$

よって，図から



$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$$

$$=-2\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{3}$$

別解　［積分の計算］

$$S=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\int_1^2(x-1)(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

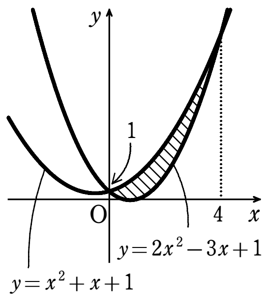
(2)　2 つの放物線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式

$x^2+x+1=2x^2-3x+1$

すなわち　$x^2-4x=0$

を解いて　$x=0,\ 4$

よって，図から



$$S=\int_0^4\{(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)\}dx$$

$$=\int_0^4(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4$$

$$=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$$

別解　［積分の計算］

$$S=-\int_0^4(x^2-4x)dx=-\int_0^4 x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

19　次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x-2,\ x$ 軸　　(2)　$y=2x^2+3x,\ y=x+1$

解答　(1)　$8\sqrt{6}$　　(2)　$\sqrt{3}$

解説

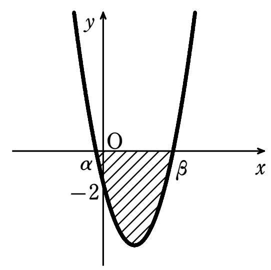
求める面積を S とする。

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4x-2=0$

を解いて　$x=2\pm\sqrt{6}$

$\alpha=2-\sqrt{6},\ \beta=2+\sqrt{6}$ とおくと，図から



$$S=-\int_\alpha^\beta(x^2-4x-2)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{6})-(2-\sqrt{6})\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}$$

(2)　放物線と直線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式

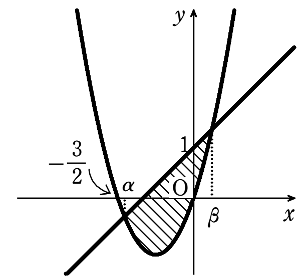
$2x^2+3x=x+1$

すなわち　$2x^2+2x-1=0$

を解いて　$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\alpha=\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \beta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと，

図から



$$S=\int_\alpha^\beta\{(x+1)-(2x^2+3x)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(2x^2+2x-1)dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{2}{6}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^3=\sqrt{3}$$

20　2 つの放物線 $y=x^2+x-2,\ y=-2x^2+4x+4$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $\dfrac{27}{2}$

解説

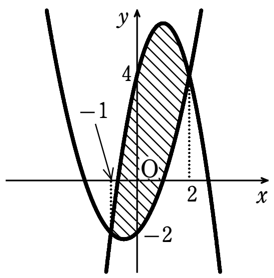
2つの放物線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式

$x^2+x-2=-2x^2+4x+4$

の解である。

この方程式を解くと　　$x=-1,\ 2$

よって，求める面積 S は，図から



$$S=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2+4x+4)-(x^2+x-2)\}dx$$

$$=-3\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-3\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{2}$$

参考　等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用すると，積分の計算は

$$S=-3\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=3\cdot\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\frac{27}{2}$$

21 次の放物線と2直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2+1$，2直線 $x=-2,\ x=1$

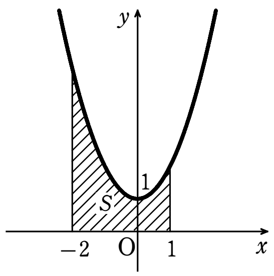
(2)　放物線 $y=x^2-2x+3$，2直線 $x=0,\ x=2$

解答　(1)　6　　(2)　$\dfrac{14}{3}$

解説

(1)　$-2\leqq x\leqq 1$ では $y>0$ であるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$$

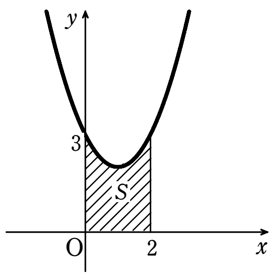
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}-2\right)$$

$$=6$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ では $y>0$ であるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{0}^{2}(x^2-2x+3)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{0}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-0$$

$$=\frac{14}{3}$$

22 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2+4x$　　　　(2)　$y=-x^2-x+2$

解答　(1)　$\dfrac{32}{3}$　　(2)　$\dfrac{9}{2}$

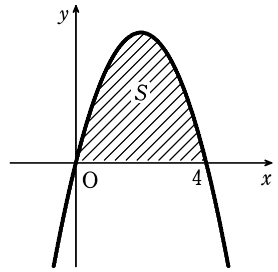
解説

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+4x=0$ を解いて　　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから，求める

面積 S は



$$S=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{4}$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+32\right)-0=\frac{32}{3}$$

別解　[積分の計算]

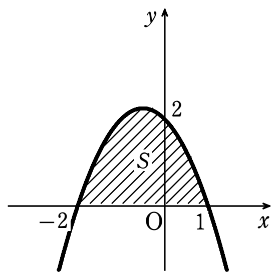
$$S=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)dx=-\int_{0}^{4}(x^2-4x)dx=-\int_{0}^{4}x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$-x^2-x+2=0$ を解いて　　$x=-2,\ 1$

$-2\leqq x\leqq 1$ では，$y\geqq 0$ であるから，求める

面積 S は



$$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\frac{9}{2}$$

別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$$

$$=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx=\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=\frac{9}{2}$$

23 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+3x+2$　　　(2)　$y=x^2+x-6$　　　(3)　$y=x^3-5x^2$

解答　(1)　$\dfrac{1}{6}$　　(2)　$\dfrac{125}{6}$　　(3)　$\dfrac{625}{12}$

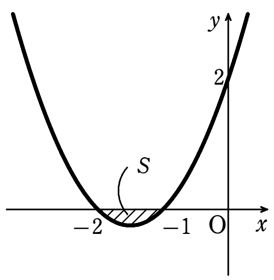
解説

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+3x+2=0$ を解いて　　$x=-2,\ -1$

$-2\leqq x\leqq -1$ では $y\leqq 0$ であるから，求める

面積 S は



$$S=\int_{-2}^{-1}\{-(x^2+3x+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^2-3x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{1}{6}$$

別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-2}^{-1}\{-(x^2+3x+2)\}dx=-\int_{-2}^{-1}(x^2+3x+2)dx$$

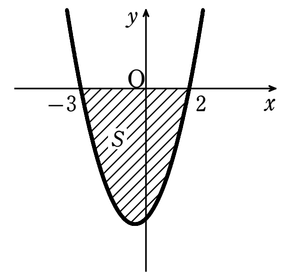
$$=-\int_{-2}^{-1}(x+2)(x+1)dx=\frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3=\frac{1}{6}$$

(2)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x-6=0$ を解いて　　$x=-3,\ 2$

$-3\leqq x\leqq 2$ では $y\leqq 0$ であるから，求める

面積 S は



$$S=\int_{-3}^{2}\{-(x^2+x-6)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)-\left(9-\frac{9}{2}-18\right)=\frac{125}{6}$$

別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-3}^{2}\{-(x^2+x-6)\}dx=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx$$

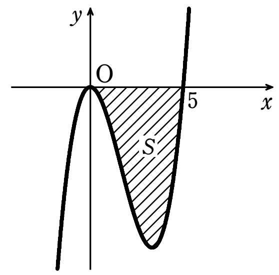
$$=-\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=\frac{125}{6}$$

(3)　曲線と x 軸の共有点の x 座標は，方程式

$x^3-5x^2=0$ を解いて　　$x=0,\ 5$

$0\leqq x\leqq 5$ では $y\leqq 0$ であるから，求める

面積 S は



$$S=\int_{0}^{5}\{-(x^3-5x^2)\}dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{5}{3}x^3\right]_{0}^{5}$$

$$=\left(-\frac{625}{4}+\frac{625}{3}\right)-0=\frac{625}{12}$$

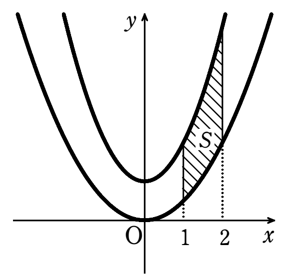
24 2つの放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，$y=x^2+1$ と2直線 $x=1,\ x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{13}{6}$

解説

右の図のように，$1\leqq x\leqq 2$ では $x^2+1>\dfrac{1}{2}x^2$ である

から，求める面積 S は



$$S=\int_{1}^{2}\left\{(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+x\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(\frac{4}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{6}+1\right)=\frac{13}{6}$$

25 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2,\ y=4x$　　　　(2)　$y=x^2-3x+5,\ y=2x-1$

解答　(1)　$\dfrac{32}{3}$　　(2)　$\dfrac{1}{6}$

解説

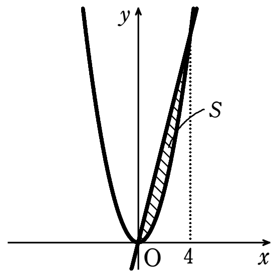
(1)　放物線と直線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式 $x^2=4x$ の解である。

$x^2-4x=0$ より　　$x=0,\ 4$

よって，求める面積 S は，図から

$$S=\int_0^4(4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$=\left(32-\frac{64}{3}\right)-0=\frac{32}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_0^4(4x-x^2)dx=-\int_0^4 x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

(2)　放物線と直線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式 $x^2-3x+5=2x-1$ の解である。

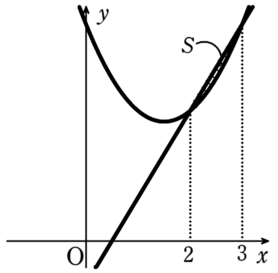
$x^2-5x+6=0$ より　　$x=2,\ 3$

よって，求める面積 S は，図から

$$S=\int_2^3\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx$$

$$=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3$$

$$=\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-\frac{8}{3}+10-12\right)=\frac{1}{6}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_2^3\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx$$

$$=-\int_2^3(x-2)(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-2)^3=\frac{1}{6}$$

26 次の2つの放物線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+2,\ y=-x^2+2x-2$　　(2)　$y=2x^2-6x+4,\ y=-3x^2+9x-6$

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}$　　(2)　$\dfrac{5}{6}$

解説

(1)　2つの放物線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式 $x^2-4x+2=-x^2+2x-2$ の解である。

$2x^2-6x+4=0$ より　　$x=1,\ 2$

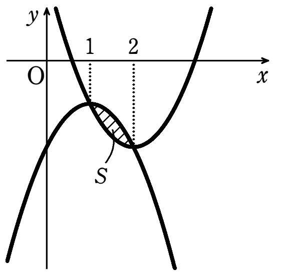
よって，求める面積 S は，図から

$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\frac{1}{3}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_1^2\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=-2\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-2\int_1^2(x-1)(x-2)dx$$

$$=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(2-1)^3\right\}=\frac{1}{3}$$

(2)　2つの放物線は右の図のようになり，その交点の x 座標は，方程式 $2x^2-6x+4=-3x^2+9x-6$ の解である。

$5x^2-15x+10=0$ より　　$x=1,\ 2$

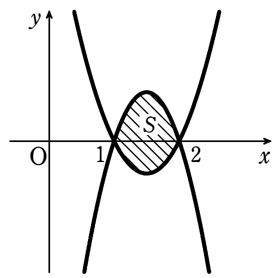
よって，求める面積 S は，図から

$$S=\int_1^2\{(-3x^2+9x-6)-(2x^2-6x+4)\}dx$$

$$=\int_1^2(-5x^2+15x-10)dx$$

$$=\left[-\frac{5}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2-10x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{40}{3}+30-20\right)-\left(-\frac{5}{3}+\frac{15}{2}-10\right)=\frac{5}{6}$$



別解　[積分の計算]

$$S=\int_1^2\{(-3x^2+9x-6)-(2x^2-6x+4)\}dx=\int_1^2(-5x^2+15x-10)dx$$

$$=-5\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-5\int_1^2(x-1)(x-2)dx=-5\cdot\left\{-\frac{1}{6}(2-1)^3\right\}=\frac{5}{6}$$

27 次の曲線と2直線および x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

(1)　曲線 $y=x^2-4$ $(-3\leqq x\leqq 1)$，2直線 $x=-3,\ x=1$

(2)　曲線 $y=x^2-6x+8$ $(1\leqq x\leqq 3)$，2直線 $x=1,\ x=3$

解答　(1)　$\dfrac{34}{3}$　　(2)　2

解説

(1)　曲線 $y=x^2-4$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x^2-4=0$ の解である。

$-3\leqq x\leqq 1$ から　　$x=-2$

$-3\leqq x\leqq -2$ のとき　$x^2-4\geqq 0$,

$-2\leqq x\leqq 1$ のとき　　$x^2-4\leqq 0$

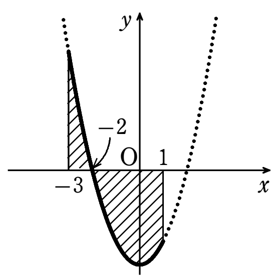
であるから，求める面積の和 S は

$$S=\int_{-3}^{-2}(x^2-4)dx+\int_{-2}^{1}\{-(x^2-4)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left\{\left(-\frac{8}{3}+8\right)-(-9+12)\right\}+\left\{\left(-\frac{1}{3}+4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$

$$=\frac{34}{3}$$



(2)　曲線 $y=x^2-6x+8$ $(1\leqq x\leqq 3)$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x^2-6x+8=0$ の解である。

$1\leqq x\leqq 3$ から　　$x=2$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$x^2-6x+8\geqq 0$,

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$x^2-6x+8\leqq 0$

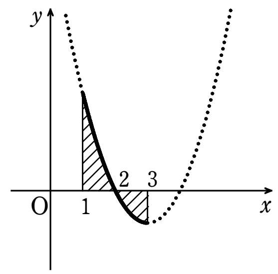
であるから，求める面積の和 S は

$$S=\int_1^2(x^2-6x+8)dx+\int_2^3\{-(x^2-6x+8)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^3$$

$$=\left\{\left(\frac{8}{3}-12+16\right)-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)\right\}+\left\{(-9+27-24)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)\right\}$$

$$=2$$



28 放物線 $y=x^2+2x-1$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

放物線と x 軸の交点の x 座標は，$x^2+2x-1=0$ を解いて

$x=-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

よって，$\alpha=-1-\sqrt{2}$，$\beta=-1+\sqrt{2}$ とすると $\alpha\leqq x\leqq\beta$ では $y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x^2+2x-1)\}dx=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{(2\sqrt{2})^3}{6}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

29 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2,\ y=x-2$　　(2)　$y=x^2-4$，x 軸，$x=-3,\ x=4$

(3)　$y=x(x+2)^2$，x 軸

解答　(1)　$\dfrac{9}{2}$　　(2)　$\dfrac{71}{3}$　　(3)　$\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　放物線 $y=-x^2$ と直線 $y=x-2$ の交点の x 座標は，方程式

$-x^2=x-2$

の解である。これを解くと

$(x-1)(x+2)=0$

から　　$x=1,\ -2$

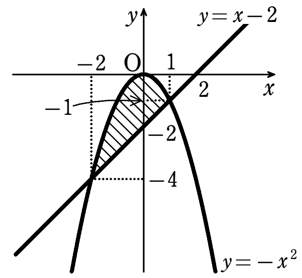
また，放物線と直線は図のようになり，

$-2\leqq x\leqq 1$ では，$-x^2\geqq x-2$ である。

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{1}\{-x^2-(x-2)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$



(2)　放物線 $y=x^2-4$ と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$x^2-4=0$

の解である。これを解くと　　$x=\pm 2$

また，放物線と直線は図のようになり，

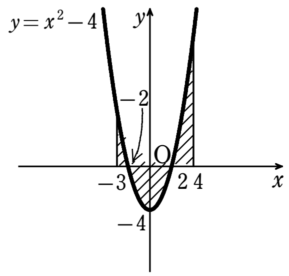
$-3\leqq x\leqq -2$，$2\leqq x\leqq 4$ では　$x^2-4\geqq 0$

$-2\leqq x\leqq 2$ では　$x^2-4\leqq 0$

である。

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^{-2}(x^2-4)dx-\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx+\int_2^4(x^2-4)dx$$



$$=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=\frac{71}{3}$$

(3)　曲線 $y=x(x+2)^2$ と x 軸の共有点の x 座標は，

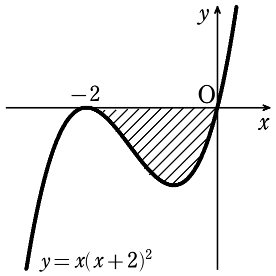
方程式　$x(x+2)^2=0$

の解である。これを解くと

$x=0,\ -2$

また，この曲線は図のようになり，$-2\leqq x\leqq 0$ では $y\leqq 0$ である。

よって，求める面積 S は



$$S=-\int_{-2}^{0}x(x+2)^2dx$$

$$=-\int_{-2}^{0}(x^3+4x^2+4x)dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

30 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。[(1)，(2) 各 15 点　(3) 20 点]

(1)　$y=x^2-4x+5$，$x=0$，$x=3$，x 軸

(2)　$y=x^2+4x-5$，x 軸

(3)　$y=x^2-7x+6$，$y=-x^2+5x-10$

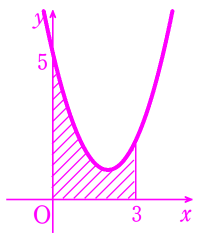
解答　求める面積を S とする。

(1)　$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

常に $y>0$ であるから

$$S=\int_0^3(x^2-4x+5)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^3=6$$



(2)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

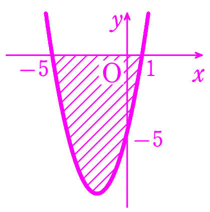
$x^2+4x-5=0$ を解いて

$x=-5,\ 1$

区間 $-5\leqq x\leqq 1$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-5}^{1}(x^2+4x-5)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_{-5}^{1}=36$$



(3)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-7x+6=-x^2+5x-10$

すなわち　　$2x^2-12x+16=0$

これを解いて　　$x=2,\ 4$

区間 $2\leqq x\leqq 4$ で

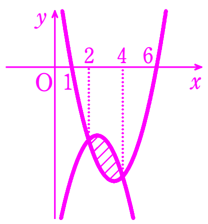
$-x^2+5x-10\geqq x^2-7x+6$

であるから

$$S=\int_2^4\{(-x^2+5x-10)-(x^2-7x+6)\}dx$$

$$=\int_2^4(-2x^2+12x-16)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+6x^2-16x\right]_2^4=\frac{8}{3}$$



解説

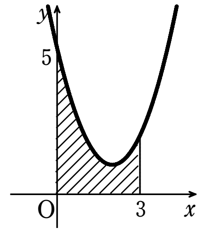
求める面積を S とする。

(1)　$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

常に $y>0$ であるから

$$S=\int_0^3(x^2-4x+5)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^3=6$$



(2)　曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

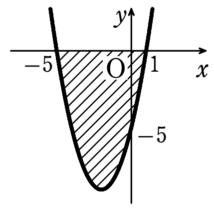
$x^2+4x-5=0$ を解いて

$x=-5,\ 1$

区間 $-5\leqq x\leqq 1$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-5}^{1}(x^2+4x-5)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_{-5}^{1}=36$$



(3)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-7x+6=-x^2+5x-10$

すなわち　　$2x^2-12x+16=0$

これを解いて　　$x=2,\ 4$

区間 $2\leqq x\leqq 4$ で

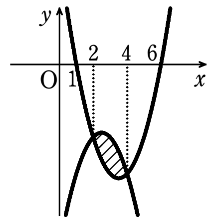
$-x^2+5x-10\geqq x^2-7x+6$

であるから

$$S=\int_2^4\{(-x^2+5x-10)-(x^2-7x+6)\}dx$$

$$=\int_2^4(-2x^2+12x-16)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+6x^2-16x\right]_2^4=\frac{8}{3}$$



31 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。[各 20 点]

(1)　$y=x^2+2x-3$ $(-2\leqq x\leqq 2)$，$x=-2$，$x=2$，x 軸

(2)　$y=|x^2-x-2|$，$x=1$，$x=3$，x 軸

解答　求める面積を S とする。

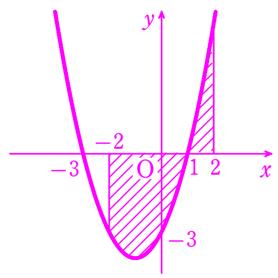
(1)　$y=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

区間 $-2\leqq x\leqq 1$ で $y\leqq 0$，区間 $1\leqq x\leqq 2$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{1}(x^2+2x-3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_1^2$$

$$=\frac{34}{3}$$



(2)　$|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$

$x\leqq -1$，$2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

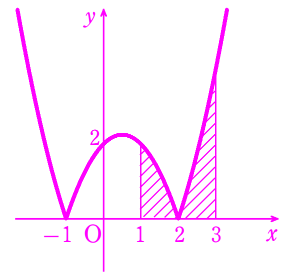
$-1\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$

よって，$y=|x^2-x-2|$ のグラフは右図のようになる。グラフから

$$S=\int_1^2(-x^2+x+2)dx+\int_2^3(x^2-x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=3$$



解説

求める面積を S とする。

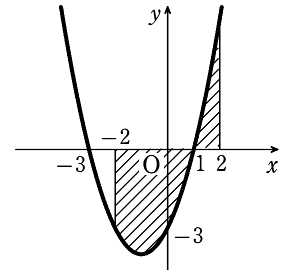
(1)　$y=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

区間 $-2\leqq x\leqq 1$ で $y\leqq 0$，区間 $1\leqq x\leqq 2$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-2}^{1}(x^2+2x-3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_1^2$$

$$=\frac{34}{3}$$



(2)　$|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$

$x\leqq -1$，$2\leqq x$ のとき

$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

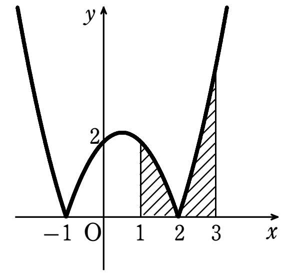
$-1\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$

よって，$y=|x^2-x-2|$ のグラフは右図のようになる。グラフから

$$S=\int_1^2(-x^2+x+2)dx+\int_2^3(x^2-x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=3$$



32 次の曲線や直線で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

(1)　$y=2x^2$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$y=-x^2+6x$ $(0\leqq x\leqq 3)$，$x=3$

(2)　$y=x^2-3$ $(-1\leqq x\leqq 2)$，$y=-2x$，$x=-1$，$x=2$

解答　(1)　8　　(2)　$\frac{23}{3}$

解説

(1)　2 つの曲線 $y=2x^2$ $(0\leqq x\leqq 3)$，

$y=-x^2+6x$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の交点の x 座標は，

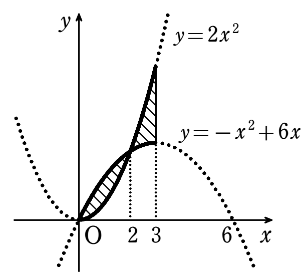
方程式 $2x^2=-x^2+6x$ すなわち

$3x^2-6x=0$ を解いて　　$x=0,\ 2$

区間 $0\leqq x\leqq 2$ で　　$-x^2+6x\geqq 2x^2$

区間 $2\leqq x\leqq 3$ で　　$2x^2\geqq -x^2+6x$

よって



$$S=\int_0^2\{(-x^2+6x)-2x^2\}dx+\int_2^3\{2x^2-(-x^2+6x)\}dx$$

$$=\int_0^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^3(3x^2-6x)dx$$

$$=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2+\Big[x^3-3x^2\Big]_2^3$$

$$=(-8+12)+\{(27-27)-(8-12)\}=8$$

(2)　曲線 $y=x^2-3$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ と 直線 $y=-2x$ の交点の x 座標は，方程式

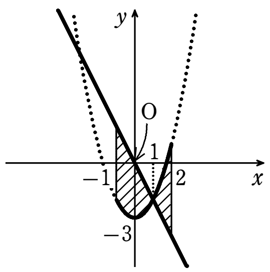
$x^2-3=-2x$　すなわち　$x^2+2x-3=0$

を解いて　　$x=1,\ -3$

$-1\leqq x\leqq 2$ であるから　　$x=1$

区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で　　$-2x\geqq x^2-3$

区間 $1\leqq x\leqq 2$ で　　$x^2-3\geqq -2x$



よって　　$S=\int_{-1}^1\{-2x-(x^2-3)\}dx+\int_1^2\{(x^2-3)-(-2x)\}dx$

$$=\int_{-1}^1(-x^2-2x+3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$=2\int_0^1(-x^2+3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$=2\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_1^2$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}+3\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right\}=\frac{23}{3}$$

33 曲線 $y=-x^2-4x+5$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ と x 軸および 2 直線 $x=-2,\ x=3$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

解答　$\dfrac{98}{3}$

解説

曲線 $y=-x^2-4x+5$ と x 軸の交点の x 座標は，

方程式　　$-x^2-4x+5=0$

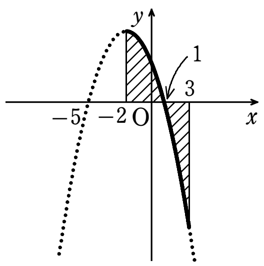
すなわち　　$x^2+4x-5=0$

を解いて　　$x=-5,\ 1$

グラフは右の図のようになり

$-2\leqq x\leqq 1$ では　$y\geqq 0$

$1\leqq x\leqq 3$ では　　$y\leqq 0$



したがって，求める面積の和は

$$\int_{-2}^1(-x^2-4x+5)dx+\int_1^3\{-(-x^2-4x+5)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-2}^1+\left[\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_1^3=\frac{98}{3}$$

34 2 つの曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 2)$，$y=-2x^2+3x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ と直線 $x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

解答　3

解説

2 つの曲線の交点の x 座標は，方程式

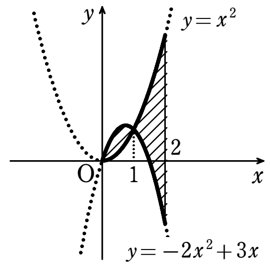
$x^2=-2x^2+3x$

すなわち　　$3x^2-3x=0$

を解いて　　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ では　　$-2x^2+3x\geqq x^2$

$1\leqq x\leqq 2$ では　　$x^2\geqq -2x^2+3x$



したがって，求める面積の和は

$$\int_0^1\{(-2x^2+3x)-x^2\}dx+\int_1^2\{x^2-(-2x^2+3x)\}dx$$

$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^2=3$$