1

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x^2+1)dx=\Big[x^3+x\Big]_{-1}^{1}=(1^3+1)-\{(-1)^3+(-1)\}=4$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-2)(x+4)dx=\int_{-1}^{2}(x^2+2x-8)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle=\left(\frac{2^3}{3}+2^2-8\cdot2\right)-\left\{\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-8\cdot(-1)\right\}=-18$

(3) $\displaystyle\int_{2}^{-1}(t^2-2t+3)dt=\left[\frac{t^3}{3}-t^2+3t\right]_{2}^{-1}$

$\displaystyle=\left\{\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+3\cdot(-1)\right\}-\left(\frac{2^3}{3}-2^2+3\cdot2\right)=-9$

解説

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{3}(6x^2-8x+3)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x-1)(2x-1)dx$　(3) $\displaystyle\int_{1}^{-2}\left(2-\frac{4}{3}t^3\right)dt$

解答　(1) 27　(2) $\frac{32}{3}$　(3) -11

解説

(1) $\displaystyle\int_{0}^{3}(6x^2-8x+3)dx=\Big[2x^3-4x^2+3x\Big]_{0}^{3}$

$=(2\cdot3^3-4\cdot3^2+3\cdot3)-(2\cdot0^3-4\cdot0^2+3\cdot0)=27$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x-1)(2x-1)dx=\int_{-1}^{3}(2x^2-3x+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{3}$

$\displaystyle=\left(\frac{2}{3}\cdot3^3-\frac{3}{2}\cdot3^2+3\right)-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2+(-1)\right\}=\frac{32}{3}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{-2}\left(2-\frac{4}{3}t^3\right)dt=\left[2t-\frac{t^4}{3}\right]_{1}^{-2}=\left\{2\cdot(-2)-\frac{(-2)^4}{3}\right\}-\left(2\cdot1-\frac{1^4}{3}\right)=-11$

3

$\displaystyle\int_{-2}^{4}(x^2-3x+1)dx=\int_{-2}^{4}x^2dx-3\int_{-2}^{4}xdx+\int_{-2}^{4}dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4}-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{4}+\Big[x\Big]_{-2}^{4}$

$\displaystyle=\frac{4^3-(-2)^3}{3}-\frac{3\{4^2-(-2)^2\}}{2}+\{4-(-2)\}$

$=12$

解説

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{1}^{3}(6x^2+2x-5)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+3)dx$

解答　(1) 50　(2) $\frac{3}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\int_{1}^{3}(6x^2+2x-5)dx=6\int_{1}^{3}x^2dx+2\int_{1}^{3}xdx-5\int_{1}^{3}dx$

$\displaystyle=6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3}+2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}-5\Big[x\Big]_{1}^{3}$

$=2(3^3-1^3)+(3^2-1^2)-5(3-1)=50$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+3)dx=\int_{-1}^{2}x^3dx-4\int_{-1}^{2}x^2dx+3\int_{-1}^{2}dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}-4\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}+3\Big[x\Big]_{-1}^{2}$

$\displaystyle=\frac{2^4-(-1)^4}{4}-\frac{4\{2^3-(-1)^3\}}{3}+3\{2-(-1)\}=\frac{3}{4}$

5

(1) $\displaystyle\int_{1}^{-1}xdx+\int_{-1}^{3}xdx=\int_{1}^{3}xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}=4$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2-x)dx-\int_{3}^{1}(x^2-x)dx=\int_{0}^{1}(x^2-x)dx+\int_{1}^{3}(x^2-x)dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{3}(x^2-x)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$

解説

6 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{1}^{-3}x^2dx+\int_{-3}^{2}x^2dx$　(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}(3x^2-2x+1)dx-\int_{0}^{4}(3x^2-2x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(2x^3-4x)dx+\int_{1}^{3}(4x-2x^3)dx$

解答　(1) $\frac{7}{3}$　(2) -1　(3) $-\frac{3}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_{1}^{-3}x^2dx+\int_{-3}^{2}x^2dx=\int_{1}^{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}=\frac{7}{3}$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}(3x^2-2x+1)dx-\int_{0}^{4}(3x^2-2x+1)dx=\int_{1}^{4}(3x^2-2x+1)dx+\int_{4}^{0}(3x^2-2x+1)dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{0}(3x^2-2x+1)dx=\Big[x^3-x^2+x\Big]_{1}^{0}=-1$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(2x^3-4x)dx+\int_{1}^{3}(4x-2x^3)dx=\int_{-2}^{3}(2x^3-4x)dx-\int_{1}^{3}(2x^3-4x)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{3}(2x^3-4x)dx+\int_{3}^{1}(2x^3-4x)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{1}(2x^3-4x)dx=\left[\frac{x^4}{2}-2x^2\right]_{-2}^{1}=-\frac{3}{2}$

7

$\displaystyle\int_{-2}^{1}(x+2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{1}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\cdot3^3=9$

解説

8 定積分 $\displaystyle\int_{1}^{2}(x+1)^3dx$ を求めよ。

解答　$\frac{65}{4}$

解説

$\displaystyle\int_{1}^{2}(x+1)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{1}^{2}=\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}=\frac{65}{4}$

9 定積分 $\displaystyle\int_{-3}^{2}(x+3)^2(x-2)dx$ を求めよ。

解答　$-\frac{625}{12}$

解説

$\displaystyle\int_{-3}^{2}(x+3)^2(x-2)dx=\int_{-3}^{2}(x+3)^2\{(x+3)-5\}dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{2}(x+3)^3dx-5\int_{-3}^{2}(x+3)^2dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{4}(x+3)^4\right]_{-3}^{2}-5\left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^{2}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\cdot5^4-\frac{5}{3}\cdot5^3$

$\displaystyle=-\frac{625}{12}$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2+x+3)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(3x+1)(x-2)dx$

(3) $\displaystyle\int_{3}^{-2}(t^3+2t-1)dt$　(4) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x+1)^2(x-3)dx$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{3}|4-2x|dx$　(6) $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2+x-2|dx$

解答　(1) $\frac{23}{6}$　(2) $-\frac{9}{2}$　(3) $-\frac{65}{4}$　(4) $-\frac{64}{3}$　(5) 5　(6) 3

解説

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2+x+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3=\frac{23}{6}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(3x+1)(x-2)dx=\int_{-1}^{2}(3x^2-5x-2)dx=\left[x^3-\frac{5}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle=\{8-(-1)\}-\frac{5}{2}(4-1)-2\{2-(-1)\}=-\frac{9}{2}$

(3) $\displaystyle\int_3^{-2}(t^3+2t-1)dt=\left[\frac{t^4}{4}+t^2-t\right]_3^{-2}=\frac{1}{4}(16-81)+(4-9)-(-2-3)$

$\displaystyle=-\frac{65}{4}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x+1)^2(x-3)dx=\int_{-1}^{3}(x^2+2x+1)(x-3)dx=\int_{-1}^{3}(x^3-x^2-5x-3)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2-3x\right]_{-1}^{3}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}(81-1)-\frac{1}{3}\{27-(-1)\}-\frac{5}{2}(9-1)-3\{3-(-1)\}$

$\displaystyle=-\frac{64}{3}$

参考　等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ を用いると，次のように計算できる。

$\displaystyle\int_{-1}^{3}(x+1)^2(x-3)dx=-\frac{1}{12}\{3-(-1)\}^4=-\frac{64}{3}$

(5) $\displaystyle\int_0^3|4-2x|dx=\int_0^2(4-2x)dx+\int_2^3(2x-4)dx=\Big[4x-x^2\Big]_0^2+\Big[x^2-4x\Big]_2^3$

$=(8-4)+\{(9-12)-(4-8)\}=5$

(6) $|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|=\begin{cases}-x^2-x+2 & (0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき})\\ x^2+x-2 & (1\leqq x\leqq 2 \text{ のとき})\end{cases}$

よって　$\displaystyle\int_0^2|x^2+x-2|dx=\int_0^1(-x^2-x+2)dx+\int_1^2(x^2+x-2)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)+\left\{\frac{8-1}{3}+\frac{4-1}{2}-2(2-1)\right\}=3$

11 次の定積分を求めよ。[各 8 点]

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2x+4)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2(6t^2-2)dt$

(3) $\displaystyle\int_2^4(x-1)(x-3)dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^3(4x^3+1)dx-\int_1^3(4x^3+1)dx$

解答　(1) 与式 $\displaystyle=\Big[x^2+4x\Big]_{-1}^{0}=0-(1-4)=3$

(2) 与式 $\displaystyle=\Big[2t^3-2t\Big]_0^2=(16-4)-0=12$

(3) 与式 $\displaystyle=\int_2^4(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_2^4$

$\displaystyle=\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=\frac{2}{3}$

(4) 与式 $\displaystyle=\int_0^3(4x^3+1)dx+\int_3^1(4x^3+1)dx=\int_0^1(4x^3+1)dx$

$\displaystyle=\Big[x^4+x\Big]_0^1=(1+1)-0=2$

解説

(1) 与式 $\displaystyle=\Big[x^2+4x\Big]_{-1}^{0}=0-(1-4)=3$

(2) 与式 $\displaystyle=\Big[2t^3-2t\Big]_0^2=(16-4)-0=12$

(3) 与式 $\displaystyle=\int_2^4(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_2^4$

$\displaystyle=\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=\frac{2}{3}$

(4) 与式 $\displaystyle=\int_0^3(4x^3+1)dx+\int_3^1(4x^3+1)dx=\int_0^1(4x^3+1)dx$

$\displaystyle=\Big[x^4+x\Big]_0^1=(1+1)-0=2$

12 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^5(2x-3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2(2x^2-3x+4)dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(t^2-2t+3)dt$

(4) $\displaystyle\int_0^2(x^3-3x^2-1)dx$　　(5) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3-x^2-3x+4)dx$

解答　(1) 10　(2) $\dfrac{25}{6}$　(3) $\dfrac{13}{3}$　(4) -6　(5) $\dfrac{32}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^5(2x-3)dx=\Big[x^2-3x\Big]_0^5=(5^5-3\cdot5)-0=10$

(2) $\displaystyle\int_1^2(2x^2-3x+4)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(\frac{2}{3}\cdot2^3-\frac{3}{2}\cdot2^2+4\cdot2\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot1^3-\frac{3}{2}\cdot1^2+4\cdot1\right)$

$\displaystyle=\frac{2}{3}(8-1)-\frac{3}{2}(4-1)+4(2-1)=\frac{25}{6}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(t^2-2t+3)dt=\left[\frac{t^3}{3}-t^2+3t\right]_{-1}^{0}$

$\displaystyle=0-\left\{\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+3\cdot(-1)\right\}=\frac{13}{3}$

(4) $\displaystyle\int_0^2(x^3-3x^2-1)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-x\right]_0^2=\left(\frac{2^4}{4}-2^3-2\right)-0=-6$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x^3-x^2-3x+4)dx=\int_{-2}^{2}(2x^3-3x)dx+\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$

$\displaystyle=0+2\int_0^2(-x^2+4)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$

$\displaystyle=2\left\{\left(-\frac{2^3}{3}+4\cdot2\right)-0\right\}=\frac{32}{3}$

13 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3(t+1)(t-2)dt$　　(2) $\displaystyle\int_1^4(x+1)^2dx-\int_1^4(x-1)^2dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(3x^3+x^2)dx-\int_2^0(3x^3+x^2)dx$

解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) 30　(3) $\dfrac{16}{3}$

解説

(1) (与式) $\displaystyle=\int_1^3(t^2-t-2)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^3$

$\displaystyle=\frac{3^3-1^3}{3}-\frac{3^2-1^2}{2}-2(3-1)=\frac{26}{3}-4-4=\frac{2}{3}$

(2) (与式) $\displaystyle=\int_1^4\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx=\int_1^4 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_1^4=2(4^2-1^2)=30$

(3) (与式) $\displaystyle=\int_{-2}^{0}(3x^3+x^2)dx+\int_0^2(3x^3+x^2)dx=\int_{-2}^{2}(3x^3+x^2)dx$

$\displaystyle=2\int_0^2x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2\cdot\frac{2^3-0}{3}=\frac{16}{3}$

14 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(2x+1)(x-1)(3x-2)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(x^3+1)dx-\int_{-3}^{1}(x^3-x^2)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2t-1)(t-1)dt+\int_0^1(2t-1)(1-t)dt$

解答　(1) -114　(2) $\dfrac{40}{3}$　(3) $\dfrac{69}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(2x+1)(x-1)(3x-2)dx=\int_{-3}^{3}(6x^3-7x^2-x+2)dx=2\int_0^3(-7x^2+2)dx$

$\displaystyle=2\left[-\frac{7}{3}x^3+2x\right]_0^3=2\left\{\left(-\frac{7}{3}\cdot3^3+2\cdot3\right)-0\right\}=-114$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(x^3+1)dx-\int_{-3}^{1}(x^3-x^2)dx=\int_{-3}^{1}\{(x^3+1)-(x^3-x^2)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{1}(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-3}^{1}$

$\displaystyle=\left(\frac{1^3}{3}+1\right)-\left\{\frac{(-3)^3}{3}+(-3)\right\}=\frac{40}{3}$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2t-1)(t-1)dt+\int_0^1(2t-1)(1-t)dt=\int_{-3}^{1}(2t-1)(t-1)dt+\int_1^0(2t-1)(t-1)dt$

$\displaystyle=\int_{-3}^{0}(2t-1)(t-1)dt=\int_{-3}^{0}(2t^2-3t+1)dt$

$\displaystyle=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_{-3}^{0}$

$\displaystyle=0-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-3)^3-\frac{3}{2}\cdot(-3)^2+(-3)\right\}$

$\displaystyle=\frac{69}{2}$

15 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2|x^2-4x+3|dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt5-1}{2}}(x^2+x-1)dx$

解答　(1) 2　(2) $\dfrac{7-5\sqrt5}{12}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^2|x^2-4x+3|dx=\int_0^1(x^2-4x+3)dx+\int_1^2\{-(x^2-4x+3)\}dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2$

$\displaystyle=2\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-0-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt5-1}{2}}(x^2+x-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^{\frac{\sqrt5-1}{2}}$

$\alpha=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ とおくと　$2\alpha+1=\sqrt5$

両辺を 2 乗して整理すると　$\alpha^2+\alpha-1=0$

また　$\displaystyle\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x=\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-6x)$

$$\begin{array}{r}
2x+1\\
x^2+x-1\,\overline{)\,2x^3+3x^2-6x}\\
\underline{2x^3+2x^2-2x}\\
x^2-4x\\
\underline{x^2+x-1}\\
-5x+1
\end{array}$$

$$=\frac{1}{6}\{(x^2+x-1)(2x+1)-5x+1\}$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(x^2+x-1)dx=\frac{1}{6}\left(0-5\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)-0=\frac{7-5\sqrt{5}}{12}$

$\boxed{16}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4|x^2-2x-3|dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2|x^2+2x-4|dx$

解答　(1) $\frac{23}{3}$　(2) $\frac{-32+20\sqrt{5}}{3}$

解説

(1) $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ であるから，$1\leqq x\leqq 4$ では

$$|x^2-2x-3|=\begin{cases}-(x^2-2x-3) & (1\leqq x\leqq 3)\\ x^2-2x-3 & (3\leqq x\leqq 4)\end{cases}$$

したがって

$$\int_1^4|x^2-2x-3|dx=-\int_1^3(x^2-2x-3)dx+\int_3^4(x^2-2x-3)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_1^3+\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_3^4$$

$$=-2(9-9-9)+\left(\frac{1}{3}-1-3\right)+\left(\frac{64}{3}-16-12\right)=\frac{23}{3}$$

(2) $x^2+2x-4=0$ とすると　$x=-1\pm\sqrt{5}$

$\alpha=-1+\sqrt{5}$ とおくと　$\alpha+1=\sqrt{5}$

両辺を 2 乗して整理すると　$\alpha^2+2\alpha-4=0$　また　$0<\alpha<2$

$0\leqq x\leqq 2$ では　$|x^2+2x-4|=\begin{cases}-(x^2+2x-4) & (0\leqq x\leqq \alpha)\\ x^2+2x-4 & (\alpha\leqq x\leqq 2)\end{cases}$

したがって

$$\int_0^2|x^2+2x-4|dx=-\int_0^\alpha(x^2+2x-4)dx+\int_\alpha^2(x^2+2x-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_0^\alpha+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_\alpha^2$$

$$=-2\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2-4\alpha\right)+\left(\frac{8}{3}+4-8\right)$$

$$=-\frac{2}{3}(\alpha^3+3\alpha^2-12\alpha+2)$$

ここで　$x^3+3x^2-12x+2=(x^2+2x-4)(x+1)-10x+6$

であるから　$\alpha^3+3\alpha^2-12\alpha+2=(\alpha^2+2\alpha-4)(\alpha+1)-10\alpha+6$

$$=0-10(-1+\sqrt{5})+6$$

$$=16-10\sqrt{5}$$

よって　$\displaystyle\int_0^2|x^2+2x-4|dx=-\frac{2}{3}(16-10\sqrt{5})=\frac{-32+20\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{17}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-3}^4(|x^2-4|-x^2+2)dx$ を求めよ。

解答　$\frac{22}{3}$

解説

$x^2-4=(x+2)(x-2)$ であるから，$-3\leqq x\leqq 4$ では

$$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & (-3\leqq x\leqq -2,\ 2\leqq x\leqq 4)\\ -(x^2-4) & (-2\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$

よって　$\displaystyle\int_{-3}^4(|x^2-4|-x^2+2)dx$

$$=\int_{-3}^{-2}(x^2-4-x^2+2)dx+\int_{-2}^2\{-(x^2-4)-x^2+2\}dx+\int_2^4(x^2-4-x^2+2)dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(-2)dx+\int_{-2}^2(-2x^2+6)dx+\int_2^4(-2)dx$$

$$=\Big[-2x\Big]_{-3}^{-2}+2\left[-\frac{2}{3}x^3+6x\right]_0^2+\Big[-2x\Big]_2^4$$

$$=(4-6)+2\left\{\left(-\frac{16}{3}+12\right)-0\right\}+(-8+4)=\frac{22}{3}$$

$\boxed{18}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3(2x-5)^6dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2x(x-2)^4dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^3(x-1)^2(x-2)dx$

解答　(1) $\frac{1}{7}$　(2) $\frac{7}{30}$　(3) $\frac{4}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_2^3(2x-5)^6dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-5)^7}{7}\right]_2^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)}{7}=\frac{1}{7}$

(2) $\displaystyle\int_1^2x(x-2)^4dx=\int_1^2\{(x-2)^5+2(x-2)^4\}dx=\left[\frac{(x-2)^6}{6}+\frac{2}{5}(x-2)^5\right]_1^2$

$$=0-\left\{\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot(-1)\right\}=\frac{7}{30}$$

(3) $\displaystyle\int_1^3(x-1)^2(x-2)dx=\int_1^3\{(x-1)^3-(x-1)^2\}dx=\left[\frac{(x-1)^4}{4}-\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^3$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}\right)-0=\frac{4}{3}$$

$\boxed{19}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1(3x-1)^4dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-3}^1(x+3)^2(x-1)dx$

解答　(1) $\frac{11}{5}$　(2) $-\frac{64}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^1(3x-1)^4dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\frac{32-(-1)}{5}=\frac{11}{5}$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^1(x+3)^2(x-1)dx=\int_{-3}^1(x+3)^2\{(x+3)-4\}dx$

$$=\int_{-3}^1\{(x+3)^3-4(x+3)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x+3)^4}{4}-\frac{4}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^1$$

$$=\frac{4^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 4^3-0=-\frac{64}{3}$$

$\boxed{20}$ (1) 等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)dx$ を求めよ。

解答　(1) 略　(2) $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}=(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)$ であるから

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) $x^2-2x-1=0$ を解くと　$x=1\pm\sqrt{2}$

$\alpha=1-\sqrt{2}$，$\beta=1+\sqrt{2}$ とすると，(1) の等式から

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=-\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3=-\frac{(2\sqrt{2})^3}{6}=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$\boxed{21}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2(x+1)(x-2)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^3(2x+1)(x-3)dx$　　(3) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}}(x^2-4x-3)dx$

解答　(1) $-\frac{9}{2}$　(2) $-\frac{343}{24}$　(3) $-\frac{28\sqrt{7}}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2(x+1)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=-\frac{9}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^3(2x+1)(x-3)dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^3\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)dx$

$$=2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3=-\frac{343}{24}$$

(3) $x^2-4x-3=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{7}$

したがって

$$\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}}(x^2-4x-3)dx=\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}}\{x-(2-\sqrt{7})\}\{x-(2+\sqrt{7})\}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{7})-(2-\sqrt{7})\}^3$$

$$=-\frac{1}{6}(2\sqrt{7})^3=-\frac{28\sqrt{7}}{3}$$

$\boxed{22}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1(-2)dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{-3}xdx$　　(3) $\displaystyle\int_{-2}^3 3x^2dx$　　(4) $\displaystyle\int_2^1\frac{2}{3}x^3dx$

解答　(1)　-2　(2)　4　(3)　35　(4)　$-\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　与式$=\Big[-2x\Big]_0^1=-2-0=-2$

(2)　与式$=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^{-3}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}=4$

(3)　与式$=\Big[x^3\Big]_{-2}^3=27-(-8)=35$

(4)　与式$=\left[\dfrac{1}{6}x^4\right]_2^1=\dfrac{1}{6}-\dfrac{16}{6}=-\dfrac{5}{2}$

23　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_1^2(2x-1)dx$　(2)　$\displaystyle\int_0^1(x^2+3x)dx$　(3)　$\displaystyle\int_{-2}^1(6x^2+2x-3)dx$

(4)　$\displaystyle\int_{-1}^2(t^2-4t+2)dt$　(5)　$\displaystyle\int_3^2(y^2-6y-4)dy$　(6)　$\displaystyle\int_0^2(x^3-3x^2-2x+5)dx$

解答　(1)　2　(2)　$\dfrac{11}{6}$　(3)　6　(4)　3　(5)　$\dfrac{38}{3}$　(6)　2

解説

(1)　与式$=\Big[x^2-x\Big]_1^2=(4-2)-(1-1)=2$

(2)　与式$=\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^1=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}\right)-0=\dfrac{11}{6}$

(3)　与式$=\Big[2x^3+x^2-3x\Big]_{-2}^1=(2+1-3)-(-16+4+6)=6$

(4)　与式$=\left[\dfrac{t^3}{3}-2t^2+2t\right]_{-1}^2=\left(\dfrac{8}{3}-8+4\right)-\left(-\dfrac{1}{3}-2-2\right)=3$

(5)　与式$=\left[\dfrac{y^3}{3}-3y^2-4y\right]_3^2=\left(\dfrac{8}{3}-12-8\right)-(9-27-12)=\dfrac{38}{3}$

(6)　与式$=\left[\dfrac{x^4}{4}-x^3-x^2+5x\right]_0^2=(4-8-4+10)-0=2$

24　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_1^2(x-1)(x-2)dx$　(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}(x+1)^2dx$　(3)　$\displaystyle\int_1^3 t(9t-2)dt$

(4)　$\displaystyle\int_0^1(y+1)(3y-1)dy$　(5)　$\displaystyle\int_1^3(x-1)^2(x-3)dx$　(6)　$\displaystyle\int_{-1}^{-2}(2t+1)^3dt$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{6}$　(2)　$\dfrac{1}{3}$　(3)　70　(4)　1　(5)　$-\dfrac{4}{3}$　(6)　10

解説

(1)　与式$=\displaystyle\int_1^2(x^2-3x+2)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=\left(\dfrac{8}{3}-6+4\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}+2\right)=-\dfrac{1}{6}$

(2)　与式$=\displaystyle\int_{-2}^{-1}(x^2+2x+1)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-2}^{-1}$

$=\left(-\dfrac{1}{3}+1-1\right)-\left(-\dfrac{8}{3}+4-2\right)=\dfrac{1}{3}$

別解　与式$=\left[\dfrac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-2}^{-1}=\dfrac{1}{3}\{0^3-(-1)^3\}=\dfrac{1}{3}$

(3)　与式$=\displaystyle\int_1^3(9t^2-2t)dt=\Big[3t^3-t^2\Big]_1^3=(81-9)-(3-1)=70$

(4)　与式$=\displaystyle\int_0^1(3y^2+2y-1)dy=\Big[y^3+y^2-y\Big]_0^1=(1+1-1)-0=1$

(5)　与式$=\displaystyle\int_1^3(x^3-5x^2+7x-3)dx=\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{5}{3}x^3+\dfrac{7}{2}x^2-3x\right]_1^3$

$=\left(\dfrac{81}{4}-45+\dfrac{63}{2}-9\right)-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{2}-3\right)=-\dfrac{4}{3}$

別解　与式$=\displaystyle\int_1^3(x-1)^2\{(x-1)-2\}dx=\int_1^3\{(x-1)^3-2(x-1)^2\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}(x-1)^4-\dfrac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^3=\dfrac{1}{4}\cdot2^4-\dfrac{2}{3}\cdot2^3=-\dfrac{4}{3}$

(6)　与式$=\displaystyle\int_{-1}^{-2}(8t^3+12t^2+6t+1)dt=\Big[2t^4+4t^3+3t^2+t\Big]_{-1}^{-2}$

$=(32-32+12-2)-(2-4+3-1)=10$

別解　与式$=\left[\dfrac{1}{8}(2t+1)^4\right]_{-1}^{-2}=\dfrac{1}{8}\{(-3)^4-(-1)^4\}=10$

25　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^2(2x^2+3)dx-\int_{-1}^2(3x-1)dx$　(2)　$\displaystyle\int_0^2(x+1)^2dx+\int_0^2(x-1)^2dx$

解答　(1)　$\dfrac{27}{2}$　(2)　$\dfrac{28}{3}$

解説

(1)　与式$=\displaystyle\int_{-1}^2(2x^2-3x+4)dx=\left[\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^2$

$=\left(\dfrac{16}{3}-6+8\right)-\left(-\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}-4\right)=\dfrac{27}{2}$

(2)　与式$=\displaystyle\int_0^2\{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)\}dx=\int_0^2(2x^2+2)dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}x^3+2x\right]_0^2=\left(\dfrac{16}{3}+4\right)-0=\dfrac{28}{3}$

別解　与式$=\left[\dfrac{1}{3}(x+1)^3\right]_0^2+\left[\dfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2$

$=\dfrac{1}{3}(3^3-1^3)+\dfrac{1}{3}\{1^3-(-1)^3\}=\dfrac{28}{3}$

26　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_1^1(4x^2+x-3)dx$　(2)　$\displaystyle\int_0^1(3x^2-1)dx+\int_1^2(3x^2-1)dx$

(3)　$\displaystyle\int_2^4(x^2+x)dx-\int_0^4(x^2+x)dx$　(4)　$\displaystyle\int_1^3(9x^2-2x^3)dx-\int_2^3(9x^2-2x^3)dx$

解答　(1)　0　(2)　6　(3)　$-\dfrac{14}{3}$　(4)　$\dfrac{27}{2}$

解説

(1)　与式$=0$

(2)　与式$=\displaystyle\int_0^2(3x^2-1)dx=\Big[x^3-x\Big]_0^2=(8-2)-0=6$

(3)　与式$=\displaystyle\int_2^4(x^2+x)dx+\int_4^0(x^2+x)dx=\int_2^0(x^2+x)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right]_2^0$

$=0-\left(\dfrac{8}{3}+2\right)=-\dfrac{14}{3}$

(4)　与式$=\displaystyle\int_1^3(9x^2-2x^3)dx+\int_3^2(9x^2-2x^3)dx=\int_1^2(9x^2-2x^3)dx=\left[3x^3-\dfrac{x^4}{2}\right]_1^2$

$=(24-8)-\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{2}$

27　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^1(4x^3+3x^2+3x+1)dx$　(2)　$\displaystyle\int_{-2}^2(x^3-x^2-x+4)dx$

(3)　$\displaystyle\int_{-2}^2(x^4-5x^3+x^2+9x)dx$

解答　(1)　4　(2)　$\dfrac{32}{3}$　(3)　$\dfrac{272}{15}$

解説

(1)　与式$=2\displaystyle\int_0^1(3x^2+1)dx=2\Big[x^3+x\Big]_0^1=2\{(1+1)-0\}=4$

(2)　与式$=2\displaystyle\int_0^2(-x^2+4)dx=2\left[-\dfrac{x^3}{3}+4x\right]_0^2=2\left\{\left(-\dfrac{8}{3}+8\right)-0\right\}=\dfrac{32}{3}$

(3)　与式$=2\displaystyle\int_0^2(x^4+x^2)dx=2\left[\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2=2\left\{\left(\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{3}\right)-0\right\}=\dfrac{272}{15}$

参考　解答では次のことを利用している。

n が 0 以上の整数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n+1}dx=0$，$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$

28　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて，次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^2(x^2-x-2)dx$　(2)　$\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)dx$

(3)　$\displaystyle\int_3^4(14x-24-2x^2)dx$

解答　(1)　$-\dfrac{9}{2}$　(2)　$-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　(3)　$\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　与式$=\displaystyle\int_{-1}^2(x+1)(x-2)dx=-\dfrac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=-\dfrac{1}{6}\cdot3^3=-\dfrac{9}{2}$

(2)　$x^2-2x-1=0$ の解は　$x=1\pm\sqrt{2}$

したがって　与式$=\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\}dx$

$=-\dfrac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3=-\dfrac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2})^3=-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

(3)　与式$=-2\displaystyle\int_3^4(x^2-7x+12)dx=-2\int_3^4(x-3)(x-4)dx$

$=(-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)\cdot(4-3)^3=\dfrac{1}{3}\cdot1^3=\dfrac{1}{3}$

29 定積分 $\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$ を求めよ。

解答　$-\frac{9}{2}$

解説

$\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=-\frac{9}{2}$

30 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+1)dx$　(2) $\int_{-2}^{2}(x+1)(x^2-3)dx$　(3) $\int_{0}^{1}(3x+1)^2dx$

(4) $\int_{1}^{1}x^2(x+1)dx$　(5) $\int_{-1}^{2}(t^2+2t)dt-\int_{3}^{2}(t^2+2t)dt$

解答　(1) -3　(2) $-\frac{20}{3}$　(3) 7　(4) 0　(5) $\frac{52}{3}$

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}-12+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-3-1\right)=-3$

別解　[項別に計算する]

$$\int_{-1}^{2}(x^2-6x+1)dx=\int_{-1}^{2}x^2dx-6\int_{-1}^{2}xdx+\int_{-1}^{2}dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}-6\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+\Big[x\Big]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{8+1}{3}-6\cdot\frac{4-1}{2}+(2+1)=-3$$

(2) $\int_{-2}^{2}(x+1)(x^2-3)dx=\int_{-2}^{2}(x^3+x^2-3x-3)dx$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-3x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left(4+\frac{8}{3}-6-6\right)-\left(4-\frac{8}{3}-6+6\right)=-\frac{20}{3}$$

別解　n が 0 以上の整数のとき，次のことが成り立つ。

$$\int_{-a}^{a}x^{2n+1}dx=0,\qquad \int_{-a}^{a}x^{2n}dx=2\int_{0}^{a}x^{2n}dx$$

これを利用すると，(2) の定積分は次のように計算できる。

$$\int_{-2}^{2}(x+1)(x^2-3)dx=\int_{-2}^{2}(x^3+x^2-3x-3)dx=2\int_{0}^{2}(x^2-3)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_{0}^{2}=2\left\{\left(\frac{8}{3}-6\right)-0\right\}=-\frac{20}{3}$$

(3) $\int_{0}^{1}(3x+1)^2dx=\int_{0}^{1}(9x^2+6x+1)dx=\Big[3x^3+3x^2+x\Big]_{0}^{1}$

$$=(3+3+1)-0=7$$

別解　$\int_{0}^{1}(3x+1)^2dx=\left[\frac{1}{3\cdot3}(3x+1)^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{9}(4^3-1^3)=7$

(4) $\int_{1}^{1}x^2(x+1)dx=0$

(5) $\int_{-1}^{2}(t^2+2t)dt-\int_{3}^{2}(t^2+2t)dt=\int_{-1}^{2}(t^2+2t)dt+\int_{2}^{3}(t^2+2t)dt$

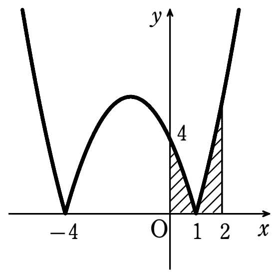
$$=\int_{-1}^{3}(t^2+2t)dt=\left[\frac{t^3}{3}+t^2\right]_{-1}^{3}$$

$$=(9+9)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{52}{3}$$

31 定積分 $\int_{0}^{2}|x^2+3x-4|dx$ を求めよ。

解答　5

解説



$|x^2+3x-4|=|(x+4)(x-1)|$

$0\leqq x\leqq1$ のとき

$|x^2+3x-4|=-(x^2+3x-4)$

$1\leqq x\leqq2$ のとき

$|x^2+3x-4|=x^2+3x-4$

よって

$$(\text{与式})=\int_{0}^{1}\{-(x^2+3x-4)\}dx+\int_{1}^{2}(x^2+3x-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{1}^{2}$$

$$=5$$

32 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{0}^{1}(2x-3)dx$　(2) $\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$　(3) $\int_{2}^{0}(3x^3+1)dx$

(4) $\int_{-2}^{1}(x^2-3x-4)dx$　(5) $\int_{-1}^{2}(x^3+9x^2-6x-4)dx$　(6) $\int_{-1}^{3}(x-2)^2dx$

(7) $\int_{1}^{2}(t+2)(2t-3)dt$　(8) $\int_{-2}^{1}(x+2)^2(x-1)dx$

解答　(1) -2　(2) $\frac{5}{6}$　(3) -14　(4) $-\frac{9}{2}$　(5) $\frac{39}{4}$　(6) $\frac{28}{3}$

(7) $\frac{1}{6}$　(8) $-\frac{27}{4}$

解説

(1) $(\text{与式})=\Big[x^2-3x\Big]_{0}^{1}=(1-3)-0=-2$

(2) $(\text{与式})=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}=\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$

(3) $(\text{与式})=\left[\frac{3}{4}x^4+x\right]_{2}^{0}=0-(12+2)=-14$

(4) $(\text{与式})=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-4\right)-\left(-\frac{8}{3}-6+8\right)=-\frac{9}{2}$

(5) $(\text{与式})=\left[\frac{x^4}{4}+3x^3-3x^2-4x\right]_{-1}^{2}=(4+24-12-8)-\left(\frac{1}{4}-3-3+4\right)=\frac{39}{4}$

(6) $(\text{与式})=\int_{-1}^{3}(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{-1}^{3}$

$$=(9-18+12)-\left(-\frac{1}{3}-2-4\right)=\frac{28}{3}$$

別解　$(\text{与式})=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-1}^{3}=\frac{1}{3}\{1^3-(-3)^3\}=\frac{28}{3}$

(7) $(\text{与式})=\int_{1}^{2}(2t^2+t-6)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}-6t\right]_{1}^{2}$

$$=\left(\frac{16}{3}+2-12\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-6\right)=\frac{1}{6}$$

(8) $(\text{与式})=\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2-4)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-4x\right]_{-2}^{1}$

$$=\left(\frac{1}{4}+1-4\right)-(4-8+8)=-\frac{27}{4}$$

別解　$(\text{与式})=\int_{-2}^{1}(x+2)^2\{(x+2)-3\}dx=\int_{-2}^{1}\{(x+2)^3-3(x+2)^2\}dx$

$$=\left[\frac{(x+2)^4}{4}-(x+2)^3\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{3^4}{4}-3^3\right)-0=-\frac{27}{4}$$

参考　一般に，次のことが成り立つ。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{\beta-\alpha}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{\beta-\alpha}{3}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

33 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^{-3}(2x^2+9x-7)dx$　(2) $\int_{0}^{1}x(x+1)(x-1)dx+\int_{1}^{4}x(x+1)(x-1)dx$

(3) $\int_{1}^{3}(1+2x)(1-3x)dx+\int_{2}^{3}(1+2x)(3x-1)dx$

解答　(1) 0　(2) 56　(3) $-\frac{29}{2}$

解説

(1) $(\text{与式})=0$

(2) $(\text{与式})=\int_{0}^{4}x(x+1)(x-1)dx=\int_{0}^{4}(x^3-x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$

$$=(64-8)-0=56$$

(3) $(\text{与式})=\int_{1}^{3}(1+2x)(1-3x)dx-\int_{2}^{3}(1+2x)(1-3x)dx$

$$=\int_{1}^{3}(1+2x)(1-3x)dx+\int_{3}^{2}(1+2x)(1-3x)dx$$

$$=\int_{1}^{2}(1+2x)(1-3x)dx=\int_{1}^{2}(1-x-6x^2)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}-2x^3\right]_{1}^{2}$$

$$=(2-2-16)-\left(1-\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{29}{2}$$

34 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{0}^{1}x(x-1)dx$　(2) $\int_{3}^{5}(x-3)(x-5)dx$　(3) $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}(x^2-4x+2)dx$

解答　(1) $-\frac{1}{6}$　(2) $-\frac{4}{3}$　(3) $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

(1) $(\text{与式})=-\frac{1}{6}(1-0)^3=-\frac{1}{6}$

(2) $(\text{与式})=-\frac{1}{6}(5-3)^3=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

(3) $x^2-4x+2=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{2}$

よって　$(\text{与式})=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

35 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^4-5x^3+x^2+9x)dx$ (2) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x+1)(x+2)(x+3)dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{2}(2x^3+x^2-1)dx+\int_{1}^{2}(1-2x^2-x^3)dx+\int_{1}^{2}(x^3-3x^2+1)dx$

解答 (1) $\frac{272}{15}$ (2) 144 (3) $-\frac{5}{6}$

解説

(1) $\displaystyle(\text{与式})=2\int_0^2(x^4+x^2)dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2\left\{\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right)-0\right\}=\frac{272}{15}$

参考 n が 0 以上の整数のとき

$$\int_{-a}^{a}x^{2n+1}dx=0,\quad \int_{-a}^{a}x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$$

(2) $\displaystyle(\text{与式})=\int_{-3}^{3}(x^3+6x^2+11x+6)dx=2\int_0^3(6x^2+6)dx=12\int_0^3(x^2+1)dx$

$$=12\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3=12\{(9+3)-0\}=144$$

(3) $\displaystyle(\text{与式})=\int_1^2\{(2x^3+x^2-1)+(1-2x^2-x^3)+(x^3-3x^2+1)\}dx$

$$=\int_1^2(2x^3-4x^2+1)dx=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{4}{3}x^3+x\right]_1^2$$

$$=\left(8-\frac{32}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\right)=-\frac{5}{6}$$

36 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3}|x-2|dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2|x^2-4x+3|dx$ (3) $\displaystyle\int_{-2}^{3}|x^2-1|dx$

解答 (1) 5 (2) 2 (3) $\frac{28}{3}$

解説

(1) $-1\leqq x\leqq 2$ のとき $|x-2|=-(x-2)$

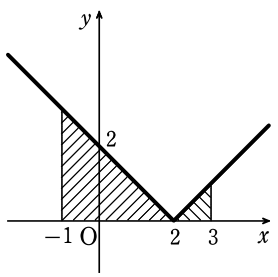
$2\leqq x\leqq 3$ のとき $|x-2|=x-2$

したがって

$$\int_{-1}^{3}|x-2|dx=\int_{-1}^{2}\{-(x-2)\}dx+\int_2^3(x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3$$

$$=5$$



(2) $|x^2-4x+3|=|(x-1)(x-3)|$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき $|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき $|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3)$

よって $\displaystyle\int_0^2|x^2-4x+3|dx=\int_0^1(x^2-4x+3)dx+\int_1^2\{-(x^2-4x+3)\}dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2=2$$

(3) $|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|$

$-2\leqq x\leqq -1$ のとき $|x^2-1|=x^2-1$

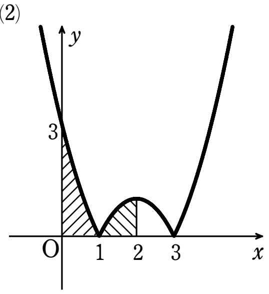
$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $|x^2-1|=-(x^2-1)$

$1\leqq x\leqq 3$ のとき $|x^2-1|=x^2-1$

よって $\displaystyle\int_{-2}^{3}|x^2-1|dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}dx+\int_1^3(x^2-1)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1}-2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3=\frac{28}{3}$$

(2)



(3)