線形計画法クイズ

1 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ 2x+3y \leqq 12,\ \ 2x+y \leqq 8$$

を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=2$ のとき最大値 5；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

解説

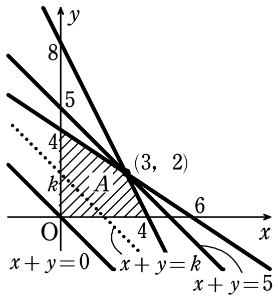
与えられた連立不等式の表す領域を A とすると，領域 A は 4 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$x+y=k$ ……①

とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。

この直線 ① が領域 A と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

領域 A においては，直線 ① が点 $(3,\ 2)$ を通るとき k の値は最大になり，原点 O を通るとき k の値は最小になる。



よって，$x+y$ は

$x=3$，$y=2$ のとき，最大値 5 をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき，最小値 0 をとる。

2 x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+y \leqq 9$，$x+2y \leqq 8$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=3$ のとき最大値 7；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

解説

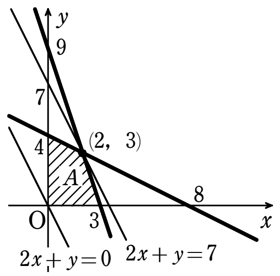
与えられた連立不等式の表す領域を A とすると，領域 A は 4 点 $(0,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$2x+y=k$ ……①

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k の直線を表す。

この直線 ① が領域 A と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図からわかるように，k の値は，直線 ① が点 $(2,\ 3)$ を通るとき最大になり，原点 O を通るとき最小になる。



よって，$2x+y$ は

$x=2$，$y=3$ のとき最大値 7 をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。

3 x，y が 3 つの不等式 $2x+y \geqq 0$，$x+2y \leqq 6$，$4x-y \leqq 6$ を満たすとき，$x-y$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　$x=1$，$y=-2$ のとき最大値 3；$x=-2$，$y=4$ のとき最小値 -6

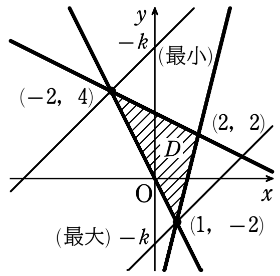
解説

与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，領域 D は 3 点 $(-2,\ 4)$，$(1,\ -2)$，$(2,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x-y=k$ ……①

とおくと，これは 傾きが 1，y 切片が $-k$ の直線を表す。

この直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。



k が最大となるのは $-k$ が最小となるとき，

k が最小となるのは $-k$ が最大となるときであるから，

図からわかるように，k の値は，直線 ① が点 $(1,\ -2)$ を通るとき最大となり，最大値は

$k=1-(-2)=3$

直線 ① が 点 $(-2,\ 4)$ を通るとき最小となり，最小値は

$k=-2-4=-6$

よって，$x-y$ は

$x=1$，$y=-2$ のとき最大値 3 をとり，

$x=-2$，$y=4$ のとき最小値 -6 をとる。

4 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値および最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=1$ のとき最大値 5；$x=-2$，$y=-1$ のとき最小値 -5

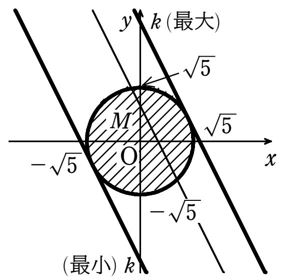
解説

不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$ の表す領域を M とすると，M は円 $x^2+y^2=5$ およびその内部である。

$2x+y=k$ ……①

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k の直線を表す。

この直線 ① が領域 M と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。



直線 ① と円 $x^2+y^2=5$ が共有点をもつのは，

$x^2+(-2x+k)^2=5$

すなわち　$5x^2-4kx+k^2-5=0$

の判別式を D とすると，$D \geqq 0$ のときである。

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=-k^2+25$$

から　$-k^2+25 \geqq 0$

この不等式を解いて　$-5 \leqq k \leqq 5$

$k=5$　のとき　$x=2$，$y=1$

$k=-5$ のとき　$x=-2$，$y=-1$

したがって　$x=2$，$y=1$ のとき　最大値 5

$x=-2$，$y=-1$ のとき　最小値 -5

5 ある工場では製品 X，Y を製造している。それらを製造するには原料 a，b が必要で，X，Y を 1 kg 製造するために必要な原料の量と，原料の在庫量は右の表の通りである。また，X，Y 1 kg あたりの利益は，それぞれ 1 万円，2 万円である。原料の在庫量の範囲で，最大の利益を得るには，X，Y をそれぞれ何 kg 製造すればよいか。

	原料 a	原料 b
X	10 kg	20 kg
Y	30 kg	20 kg
在庫	300 kg	400 kg

解答　X を 15 kg，Y を 5 kg 製造すればよい

解説

X，Y の製造量をそれぞれ x kg，y kg とすると　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$

原料 a の在庫量について　$10x+30y \leqq 300$

原料 b の在庫量について　$20x+20y \leqq 400$

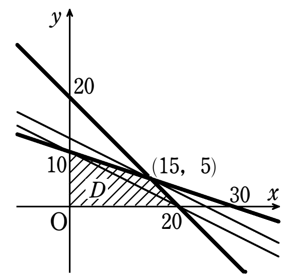
以上の条件をまとめて

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 30$，$x+y \leqq 20$

4 つの不等式の表す領域を D とすると，領域 D は 4 点 $(0,\ 0)$，$(20,\ 0)$，$(15,\ 5)$，$(0,\ 10)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

ここで，利益は $(x+2y)$ 万円であるから

$x+2y=k$ ……①



とおくと，これは傾きが $-\frac{1}{2}$，y 切片 が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

図からわかるように，k の値は，直線 ① が点 $(15,\ 5)$ を通るとき最大になる。

したがって，X を 15 kg，Y を 5 kg 製造すればよい。

6 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+3y \leqq 25$，$3x+y \leqq 13$ のとき，$x+y$ の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。[20 点]

解答　4 つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示すると，右の図の斜線部分(境界線を含む)になる。

また，2 直線 $2x+3y=25$，$3x+y=13$ の交点は $(2,\ 7)$ である。

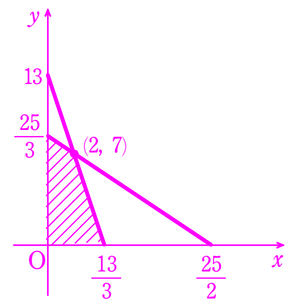
ここで $x+y=k$ とおくと

$y=-x+k$ ……①

直線 ① は点 $(0,\ k)$ を通り，傾き -1 の直線を表す。よって

$x=2$，$y=7$ のとき，最大値 9

$x=0$，$y=0$ のとき，最小値 0



解説

4 つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示すると，右の図の斜線部分(境界線を含む)になる。

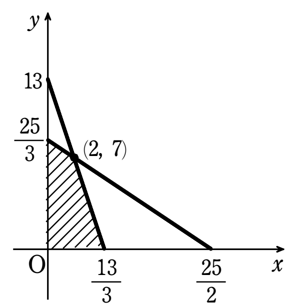
また，2 直線 $2x+3y=25$，$3x+y=13$ の交点は $(2,\ 7)$ である。

ここで $x+y=k$ とおくと

$y=-x+k$ ……①

直線 ① は点 $(0,\ k)$ を通り，傾き -1 の直線を表す。よって

$x=2$，$y=7$ のとき，最大値 9



$x=0$，$y=0$ のとき，最小値 0

7 $x^2+y^2\leqq 1$ のとき，$2x-y$ の最大値と最小値を求めよ。[20 点]

解答　$2x-y=k$ とおくと　　$2x-y-k=0$

$x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域を D とすると，D は原点を中心とする半径 1 の円の周および内部である。

原点と直線 $2x-y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

直線 $2x-y-k=0$ が，領域 D と共有点をもつのは $d\leqq 1$ のときであるから，

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}\leqq 1$ すなわち $|k|\leqq\sqrt{5}$ より　　$-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$

よって，最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$

解説

$2x-y=k$ とおくと　　$2x-y-k=0$

$x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域を D とすると，D は原点を中心とする半径 1 の円の周および内部である。

原点と直線 $2x-y-k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

直線 $2x-y-k=0$ が，領域 D と共有点をもつのは $d\leqq 1$ のときであるから，

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}\leqq 1$ すなわち $|k|\leqq\sqrt{5}$ より　　$-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$

よって，最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$

8 x，y が 3 つの不等式 $x+y\geqq 1$，$3x-y\leqq 11$，$3x-5y\geqq -5$ を同時に満たすとき，$x+2y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=5$，$y=4$ のとき最大値 13；$x=3$，$y=-2$ のとき最小値 -1

解説

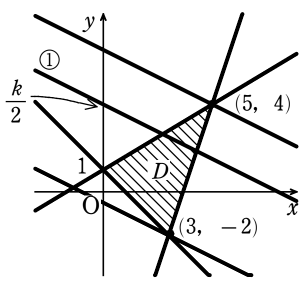
与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

領域 D は 3 点 $(0,\ 1)$，$(3,\ -2)$，$(5,\ 4)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x+2y=k$　……①

とおくと，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ から，① は傾きが $-\frac{1}{2}$，

y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。



図から，k の値は，直線 ① が点 $(5,\ 4)$ を通るとき最大となり，点 $(3,\ -2)$ を通るとき最小となる。

よって，$x+2y$ は

$x=5$，$y=4$ のとき最大値 $5+2\cdot 4=13$；

$x=3$，$y=-2$ のとき最小値 $3+2\cdot(-2)=-1$　をとる。

9 次の式の最大値および最小値を求めよ。

(1) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y\leqq 6$，$2x+y\leqq 6$ のとき　$x-y$

(2) $x+y\geqq 1$，$2x+y\leqq 6$，$x+2y\leqq 4$ のとき　$2x+y$

(3) $0\leqq 2x+y\leqq 1$，$0\leqq x-y\leqq 1$ のとき　$x+y$

解答　(1) $x=3$，$y=0$ のとき最大値 3；$x=0$，$y=3$ のとき最小値 -3

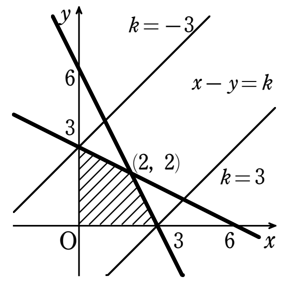
(2) $2x+y=6\ \left(\frac{8}{3}\leqq x\leqq 5\right)$ のとき最大値 6；$x=-2$，$y=3$ のとき最小値 -1

(3) $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{2}{3}$；$x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$ のとき最小値 $-\frac{1}{3}$

解説

(1) 不等式の表す領域は，4 点 $(0,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 2)$，$(0,\ 3)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$x-y=k$　……① とおくと，これは傾きが 1，y 切片が $-k$ の直線を表す。



図から，k の値は，直線 ① が点 $(3,\ 0)$ を通るとき最大になり，点 $(0,\ 3)$ を通るとき最小となる。

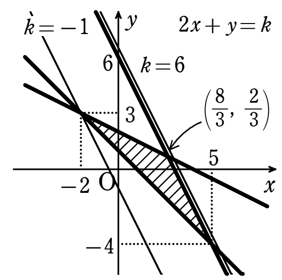
よって，$x-y$ は

$x=3$，$y=0$ のとき最大値 $3-0=3$；

$x=0$，$y=3$ のとき最小値 $0-3=-3$　をとる。

(2) 不等式の表す領域は，3 点 $(5,\ -4)$，$\left(\frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，$(-2,\ 3)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$2x+y=k$　……① とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k の直線を表す。



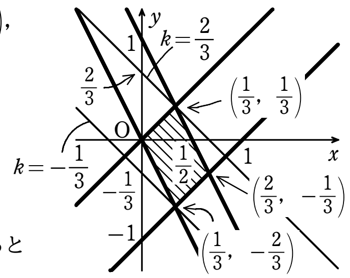
図から，k の値は，直線 ① が直線 $2x+y=6$ に一致するとき最大となり，点 $(-2,\ 3)$ を通るとき最小となる。よって，$2x+y$ は

$2x+y=6\ \left(\frac{8}{3}\leqq x\leqq 5\right)$ のとき最大値 6；

$x=-2$，$y=3$ のとき最小値 $2\cdot(-2)+3=-1$　をとる。

(3) 不等式の表す領域は，4 点 $(0,\ 0)$，$\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$x+y=k$　……① とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。



図から，k の値は，直線 ① が点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ を通るとき最大となり，点 $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ を通るとき最小となる。

よって，$x+y$ は

$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$　のとき最大値 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$；

$x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$　をとる。

10 ある工場の製品に A と B の 2 種類がある。1 kg 生産するのに，A は電力 60 kwh とガス 2 m^3，B は電力 40 kwh とガス 6 m^3 を要する。1 kg あたりの価格は，A は 2 万円，B は 3 万円である。この工場への 1 日の供給量が電力 2200 kwh，ガス 120 m^3 までとすると，1 日に生産される製品の総価格を最大にするには，A，B をそれぞれ何 kg ずつ生産すればよいか。

解答　A を 30 kg，B を 10 kg 生産すればよい

解説

1 日に A を x kg，B を y kg 生産するものとすると

$x\geqq 0$，　$y\geqq 0$

電力，ガスの制限から

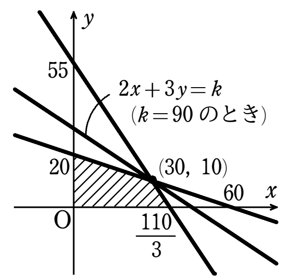
$60x+40y\leqq 2200$，　$2x+6y\leqq 120$

すなわち　$3x+2y\leqq 110$，$x+3y\leqq 60$

この条件のもとで，総価格 $2x+3y$ (万円) を最大にする x，y の値を求める。

4 つの不等式の表す領域は，図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。



$2x+3y=k$　……① とおくと，直線 ① の傾きは $-\frac{2}{3}$ である。

この傾きと直線 $3x+2y=110$，$x+3y=60$ の傾きについて $-\frac{3}{2}<-\frac{2}{3}<-\frac{1}{3}$ であるから，k が最大になるのは直線 ① が点 $(30,\ 10)$ を通るときである。

したがって，A を 30 kg，B を 10 kg 生産すればよい。

11 ある会社で 2 種類の製品 A，B を作っている。A を 1 kg 作るには 3 種類の原料 α，β，γ をそれぞれ 9 kg，4 kg，3 kg 必要とし，B を 1 kg 作るにはそれぞれ 4 kg，5 kg，10 kg 必要である。α，β，γ の総使用量はそれぞれ 360 kg，200 kg，300 kg を超えてはならないとする。A は 1 kg あたり 7 万円の利益があり，B は 1 kg あたり 12 万円の利益がある。A を x kg，B を y kg 作るとする。

(1) 原料 α，β，γ の総使用量について，上の条件を x と y の 3 つの不等式で表せ。

(2) 利益を w 万円とすると，w を x，y を用いて表せ。

(3) 利益を最大にする x，y の値と，そのときの利益を求めよ。

解答　(1) $9x+4y\leqq 360$，$4x+5y\leqq 200$，$3x+10y\leqq 300$　　(2) $w=7x+12y$

(3) $x=20$，$y=24$ のとき最大利益 428 万円

解説

(1) $9x+4y\leqq 360$，$4x+5y\leqq 200$，$3x+10y\leqq 300$

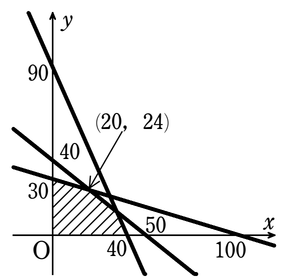
(2) $w=7x+12y$

(3) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の条件のもとで，(1) の 3 つの不等式の表す領域を図示すると，右の図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。

直線 $7x+12y=w$　……①，$9x+4y=360$，$4x+5y=200$，$3x+10y=300$ の傾きについて

$$-\frac{9}{4}<-\frac{4}{5}<-\frac{7}{12}<-\frac{3}{10}$$



であるから，w が最大になるのは直線 ① が点 $(20,\ 24)$ を通るときである。

よって，利益を最大にする x，y の値は　　$x=20$，$y=24$

そのときの利益は　　$w=7\cdot 20+12\cdot 24=428$ (万円)

12 x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2

解説

$x^2+y^2=10$ ……①，$y=-2x+5$ ……② とする。

② を ① に代入して　　$x^2+(-2x+5)^2=10$

整理して　　$x^2-4x+3=0$

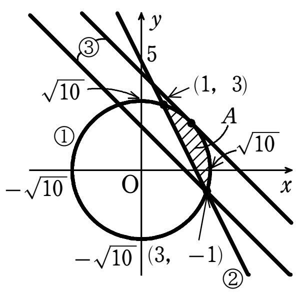
よって　　$x=1,\ 3$

これを ② に代入して，連立方程式 ①，② の解は

$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ -1)$

よって，円 ① と直線 ② の交点の座標は

$(1,\ 3),\ (3,\ -1)$



連立不等式 $x^2+y^2\leqq 10$，$y\geqq -2x+5$ の表す領域 A は図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x+y=k$　……③

とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。

点 $(1,\ 3)$ における円 ① の接線 $x+3y=10$ の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，直線 ③ の傾きは -1 で，

$-1<-\dfrac{1}{3}$ であるから，図より，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大となる。

このとき，$k>0$ であり，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ③ の距離を考えて

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{10}$　　　$k>0$ であるから　　$k=2\sqrt{5}$

直線 $x+y=2\sqrt{5}$ を ③′ とする。

直線 ③′ に垂直で，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ を通る直線の方程式は $y=x$ である。

よって，円 ① と直線 ③′ の接点の座標は，③′ と $y=x$ を連立して解いて

$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$

次に，直線 ② の傾きは -2，直線 ③ の傾きは -1 で，$-2<-1$ であるから，図より，k の値が最小となるのは，直線 ③ が点 $(3,\ -1)$ を通るときである。

このとき　　$k=3+(-1)=2$

よって，$x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$；$x=3$，$y=-1$ のとき最小値 2 をとる。

別解 1.［接点の座標の求め方：接点 $\Longleftrightarrow$ 重解の利用］

①，③ から y を消去すると　　$x^2+(k-x)^2=10$

整理して　　$2x^2-2kx+k^2-10=0$　……④

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=20-k^2$

直線 ③ が円 ① に接するための条件は，$D=0$ であるから，$20-k^2=0$ より　$k^2=20$

よって　　$k=\pm 2\sqrt{5}$

$k>0$ であるから　　$k=2\sqrt{5}$

このとき，④ の重解は　　$x=-\dfrac{-2\cdot 2\sqrt{5}}{2\cdot 2}=\sqrt{5}$

③ から　　$y=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

別解 2.［接点の座標の求め方：接線の公式の利用］

円 ① 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$x_1x+y_1y=10$　……⑤

$x+y=2\sqrt{5}$ の両辺に $\sqrt{5}$ を掛けて　　$\sqrt{5}\,x+\sqrt{5}\,y=10$　……⑥

⑤ と ⑥ を比較して　　$x_1=\sqrt{5}$，$y_1=\sqrt{5}$

13 連立不等式 $x^2+y^2\leqq 2$，$x+y\geqq 0$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A 内を動くとき，$4x+3y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，$y=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ のとき最大値 $5\sqrt{2}$；$x=-1$，$y=1$ のとき最小値 -1

解説

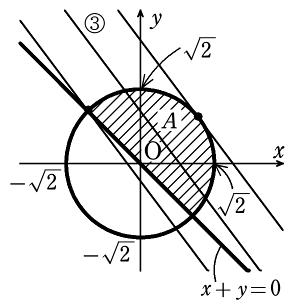
$x^2+y^2=2$ ……①，$x+y=0$ ……② とし，

①，② を連立して解くと

$(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (1,\ -1)$

連立不等式の表す領域 A は，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



$4x+3y=k$ ……③ とおくと　　$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{k}{3}$

これは傾き $-\dfrac{4}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す。

図から，直線 ③ が円 ① と第 1 象限で接するとき，k の値は最大になる。

このとき，$k>0$ であり，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ③ の距離を考えて

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\sqrt{2}$　　　よって　　$k=5\sqrt{2}$

直線 $4x+3y=5\sqrt{2}$　……③′ に垂直で，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ を通る直線の方程式は $3x-4y=0$ であるから，接点の座標は，③′ と $3x-4y=0$ を連立して解いて

$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，$y=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

次に，直線 ② の傾きは -1，直線 ③ の傾きは $-\dfrac{4}{3}$ で，$-\dfrac{4}{3}<-1$ であるから，図より，k の値が最小となるのは，直線 ③ が点 $(-1,\ 1)$ を通るときである。

このとき，k の値は　　$4\cdot(-1)+3\cdot 1=-1$

よって　　$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，$y=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ のとき最大値 $5\sqrt{2}$；$x=-1$，$y=1$ のとき最小値 -1

14 実数 x，y が 3 つの不等式 $y\geqq 2x-5$，$y\leqq x-1$，$y\geqq 0$ を満たすとき，$x^2+(y-3)^2$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　$x=4$，$y=3$ のとき最大値 16；$x=2$，$y=1$ のとき最小値 8

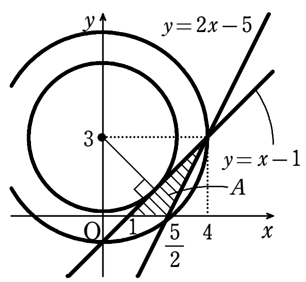
解説

3 つの不等式の表す領域 A は，3 点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$，$(4,\ 3)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x^2+(y-3)^2=k$　……①

とおくと，$k>0$ のとき，① は中心が点 $(0,\ 3)$，半径が $\sqrt{k}$ の円を表す。

この円 ① が領域 A と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を考えればよい。



k が最大，すなわち円 ① の半径が最大となるのは，図から，円 ① が点 $(4,\ 3)$ または点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ のいずれかを通るときである。

円 ① が点 $(4,\ 3)$ を通るとき　　$k=4^2+(3-3)^2=16$

円 ① が点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ を通るとき　　$k=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+(0-3)^2=\dfrac{61}{4}<16$

よって，点 $(4,\ 3)$ を通るとき，k は最大となる。

k が最小，すなわち円 ① の半径が最小となるのは，図から，円 ① が直線 $y=x-1$ ……② と接するときである。

接点の座標は，直線 ② に垂直で円 ① の中心 $(0,\ 3)$ を通る直線の方程式が $y=-x+3$ であるから，② と $y=-x+3$ を連立して解くと　　$x=2$，$y=1$

円 ① が点 $(2,\ 1)$ を通るとき　　$k=2^2+(1-3)^2=8$

よって，$x=4$，$y=3$ のとき最大値 16；$x=2$，$y=1$ のとき最小値 8 をとる。

15 連立不等式 $y\leqq\dfrac{1}{2}x+3$，$y\leqq -5x+25$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す領域を点 $(x,\ y)$ が動くとき，次の最大値と最小値を求めよ。

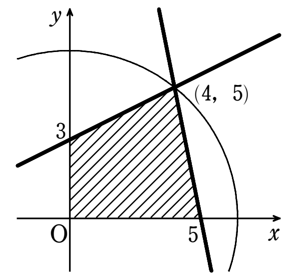
(1)　x^2+y^2　　　　(2)　$x^2+y^2-2(x+6y)$

解答　(1)　$x=4$，$y=5$ のとき最大値 41；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

(2)　$x=5$，$y=0$ のとき最大値 15；$x=2$，$y=4$ のとき最小値 -32

解説

連立不等式の表す領域は 4 点 $(0,\ 0)$，$(5,\ 0)$，$(4,\ 5)$，$(0,\ 3)$ を頂点とする四角形の周および内部である。



(1)　$x^2+y^2=k$ ……① とおくと，$k>0$ のとき，① は中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

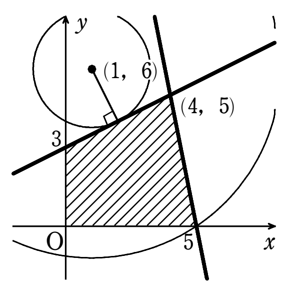
図から，円 ① が点 $(4,\ 5)$ を通るとき，k は最大になり，その値は　　$k=4^2+5^2=41$

また，方程式 ① が点 $(0,\ 0)$ を表すとき，k は最小となる。

よって　　$x=4$，$y=5$ のとき最大値 41；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

(2)　$x^2+y^2-2(x+6y)=k$ とおくと

$(x-1)^2+(y-6)^2=k+37$　……②



$k+37>0$ のとき，② は中心 $(1,\ 6)$，半径 $\sqrt{k+37}$ の円を表す。

図から，円 ② が点 $(5,\ 0)$ を通るとき，k は最大になり，その値は　　$k=5^2+0^2-2(5+6\cdot 0)=15$

また，円 ② が直線 $y=\dfrac{1}{2}x+3$　……③ に接するとき，k は最小になる。このときの接点の座標を求める。

点 $(1,\ 6)$ を通り直線 ③ に垂直な直線の方程式は

$y-6=-2(x-1)$　すなわち　$y=-2x+8$

この方程式と ③ を連立して解くと，接点の座標は　　$(2,\ 4)$

このときの k の値は　　$k=2^2+4^2-2(2+6\cdot 4)=-32$

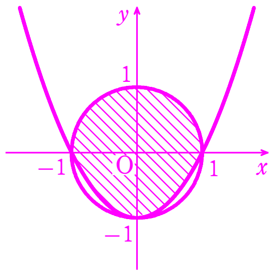
よって　　$x=5$，$y=0$ のとき最大値 15；$x=2$，$y=4$ のとき最小値 -32

16 (1)　連立不等式 $x^2+y^2\leqq 1$，$y\geqq x^2-1$ の表す領域 D を図示せよ。

(2)　(1) の領域 D 内の点 $(x,\ y)$ に対して　$\dfrac{4y-7}{x-3}$　が最大となる $(x,\ y)$ を求めよ。

解答 (1) [図] 境界線を含む

(2) $(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$

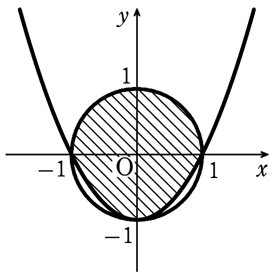


解説

(1) 連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 1,\quad y\geqq x^2-1$$

の表す領域 D は，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。



(2) $\frac{4y-7}{x-3}=k$ とおくと

$$y-\frac{7}{4}=\frac{k}{4}(x-3)$$

これは，点 $\left(3,\ \frac{7}{4}\right)$ を通り，傾き $\frac{k}{4}$ の直線を表す。

ゆえに，この直線が領域 D と共有点をもつとき，傾きが最大となる場合を求めればよい。

直線の方程式は $y=\frac{1}{4}(kx-3k+7)$ ……①

これと $y=x^2-1$ から y を消去して

$$x^2-1=\frac{1}{4}(kx-3k+7)$$

整理すると $4x^2-kx+3k-11=0$

この x の2次方程式の判別式を D_0 とすると，直線①と放物線 $y=x^2-1$ が接するとき

$$D_0=k^2-4\cdot4\cdot(3k-11)=k^2-48k+176$$
$$=(k-4)(k-44)=0$$

よって $k=4,\ 44$

$k=4$ のとき，接点は点 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$ であり，これは領域 D 内の点である。

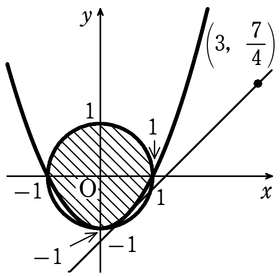
$k=44$ のとき，接点は点 $\left(\frac{11}{2},\ \frac{117}{4}\right)$ であり，これは領域 D 内の点ではない。

また，直線①が点 $(1,\ 0)$ を通るとき

$$k=\frac{4\cdot0-7}{1-3}=\frac{7}{2}<4$$

よって，$\frac{4y-7}{x-3}$ が最大となる $(x,\ y)$ は

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$$



17 (1) 4つの不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$2x+y\leqq5$，$x+3y\leqq6$ を満たす x，y の値に対して，$x+y$ のとる値の範囲を求めよ。

(2) x，y が3つの不等式 $x+y\leqq6$，$2x+y\geqq6$，$x+2y\geqq4$ を満たすとき，$2x+3y$ の最大値，最小値を求めよ。

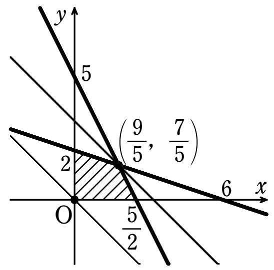
解答 (1) $0\leqq x+y\leqq\frac{16}{5}$

(2) $x=0$，$y=6$ のとき最大値 18，$x=\frac{8}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{22}{3}$

解説

(1) 2直線 $2x+y=5$，$x+3y=6$ の交点の座標は

$$\left(\frac{9}{5},\ \frac{7}{5}\right)$$



与えられた4つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x+y=k$ ……① とおくと，①は傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線①が点 $\left(\frac{9}{5},\ \frac{7}{5}\right)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき $k=\frac{9}{5}+\frac{7}{5}=\frac{16}{5}$

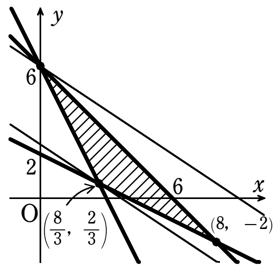
また，直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき $k=0$

以上から $0\leqq k\leqq\frac{16}{5}$ すなわち $0\leqq x+y\leqq\frac{16}{5}$

(2) 2直線 $2x+y=6$，$x+2y=4$ の交点の座標は

$$\left(\frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$



与えられた3つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は，右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

$2x+3y=k$ ……① とおくと，①は傾きが $-\frac{2}{3}$，y 切片が $\frac{k}{3}$ の直線を表す。

図から，直線①が点 $(0,\ 6)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき $k=0+3\cdot6=18$

また，直線①が点 $\left(\frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき $k=2\cdot\frac{8}{3}+3\cdot\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$

よって $x=0$，$y=6$ のとき最大値 18，

$x=\frac{8}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{22}{3}$

18 2種類の薬品 P，Q がある。その 1 g について，A 成分，B 成分の量と価格は，それぞれ右の表の通りである。

A を 12 mg 以上，B を 15 mg 以上とる必要があるとき，その費用を最小にするには，P，Q をそれぞれ何 g とればよいか。

	A 成分	B 成分	価格
P	2 mg	1 mg	4 円
Q	1 mg	2 mg	6 円

解答 P を 3 g，Q を 6 g とる

解説

P，Q をそれぞれ x g，y g とるとすると

$$x\geqq0,\quad y\geqq0$$

A 成分について $2x+y\geqq12$

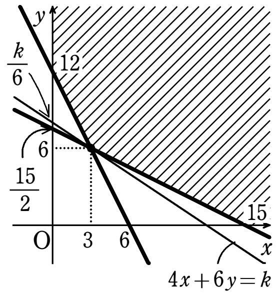
B 成分について $x+2y\geqq15$

以上の4つの不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は，右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

ここで，費用は $4x+6y$ 円であり，

$4x+6y=k$ ……①



とおくと，①は，傾きが $-\frac{2}{3}$，y 切片が $\frac{k}{6}$ の直線を表す。

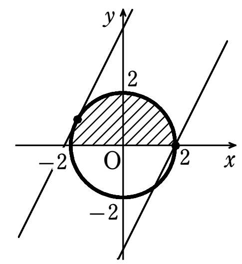
図から，直線①が点 $(3,\ 6)$ を通るとき，k の値は最小となる。

よって，P を 3 g，Q を 6 g とればよい。

19 x，y が2つの不等式 $x^2+y^2\leqq4$，$y\geqq0$ を満たすとき，$2x-y$ の最大値，最小値を求めよ。

解答 $x=2$，$y=0$ のとき最大値 4；$x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

解説



連立不等式 $x^2+y^2\leqq4$，$y\geqq0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

$2x-y=k$ ……① とおくと，①は傾きが 2，y 切片が $-k$ の直線を表す。

図から，直線①が点 $(2,\ 0)$ を通るとき $-k$ の値は最小となる。

すなわち，k の値は最大となる。

このとき $k=2\cdot2-0=4$

また，領域上で直線①が円 $x^2+y^2=4$ に接するとき $-k$ の値は最大となる。

すなわち，k の値は最小となる。

①から $y=2x-k$ ……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して $x^2+(2x-k)^2=4$

よって $5x^2-4kx+k^2-4=0$ ……③

この2次方程式の判別式を D とすると $\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20$

直線①が円に接するとき，$D=0$ であるから $-k^2+20=0$

よって $k=\pm2\sqrt{5}$

接点が領域上にあるとき，接線②の y 切片は正であるから $k=-2\sqrt{5}$

このとき，③から $x=\frac{2k}{5}=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$

②から $y=2\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)-k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

よって，$2x-y$ は

$x=2$，$y=0$ のとき最大値 4，

$x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

をとる。

20 点 $(x,\ y)$ が，不等式 $(x-3)^2+(y-2)^2\leqq 1$ の表す領域上を動くとする。

(1) $2x-1$ の最大値を求めよ。　(2) x^2+y^2 の最大値を求めよ。

(3) $\frac{y}{x}$ の最大値を求めよ。　(4) $10x+10y$ の最大の整数値を求めよ。

解答　(1) 7　(2) $14+2\sqrt{13}$　(3) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$　(4) 64

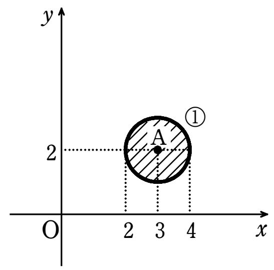
解説

$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ ……①

円①の中心 $(3,\ 2)$ を A とする。

不等式の表す領域は右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



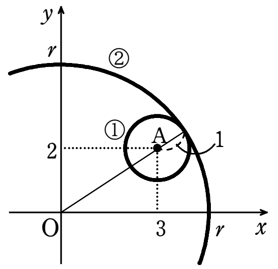
(1) 領域の点の x 座標について　$2\leqq x\leqq 4$

したがって，$2x-1$ の最大値は　$2\cdot 4-1=7$

(2) $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ ……② とおく。

②は中心 $(0,\ 0)$，半径 r の円を表す。

図から，円①が円②に内接するとき，r^2 は最大となる。



このとき　$r^2=(\mathrm{OA}+1)^2=(\sqrt{3^2+2^2}+1)^2$

$=(\sqrt{13}+1)^2=14+2\sqrt{13}$

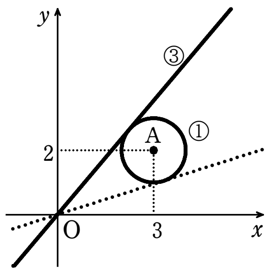
したがって，求める最大値は　$14+2\sqrt{13}$

(3) $\frac{y}{x}=k$ とおくと　$y=kx$ ……③

③は原点を通る傾き k の直線を表す。

図から，直線③が円①に接するときの k の値のうち，大きい方が求める最大値である。

接するとき，点 A $(3,\ 2)$ と直線③の距離が 1 であるから　$\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$



すなわち　$|3k-2|=\sqrt{k^2+1}$

両辺を 2 乗して　$(3k-2)^2=k^2+1$

ゆえに　$8k^2-12k+3=0$

よって　$k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

したがって，求める最大値は　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

別解　①，③から y を消去して整理すると　$(k^2+1)x^2-2(2k+3)x+12=0$

円①と直線③が接する条件は，$k^2+1\neq 0$ より　$\frac{D}{4}=(2k+3)^2-12(k^2+1)=0$

すなわち　$8k^2-12k+3=0$

よって　$k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

したがって，求める最大値は　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

(4) $10x+10y=l$ ……④ とおく。

直線④が領域と共有点をもつとき，点 A $(3,\ 2)$ と直線④の距離は 1 以下であるから

$$\frac{|30+20-l|}{\sqrt{10^2+10^2}}\leqq 1$$

よって　$|l-50|\leqq\sqrt{200}$

ゆえに　$50-\sqrt{200}\leqq l\leqq 50+\sqrt{200}$

$\sqrt{200}=10\sqrt{2}=14.14\cdots\cdots$ であるから，求める最大の整数値は　$50+14=64$

21 $x^2+y^2\leqq 4$，$y\geqq 0$ のとき，$-x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

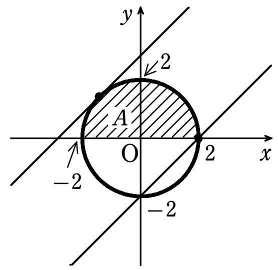
解答　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$，$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2

解説

連立不等式 $x^2+y^2\leqq 4$，$y\geqq 0$ の表す領域を A とすると，A は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$-x+y=k$ ……①とおくと，①は傾きが 1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線①が領域 A 上で円 $x^2+y^2=4$ に接するとき，k の値は最大となる。



①から　$y=x+k$ ……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して　$x^2+(x+k)^2=4$

整理すると　$2x^2+2kx+k^2-4=0$ ……③

この方程式の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

直線①と円が接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+8=0$　よって　$k=\pm 2\sqrt{2}$

接点が領域 A 上にあるとき　$k=2\sqrt{2}$

このとき，③から　$x=-\frac{k}{2}=-\sqrt{2}$

②から　$y=-\sqrt{2}+k=\sqrt{2}$

また，直線①が点 $(2,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=-2+0=-2$

したがって，$-x+y$ は　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2 をとる。

22 次の式の最大値と最小値を求めよ。

(1) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y\leqq 7$，$3x+5y\leqq 15$ のとき　$x+y$

(2) $3x+y\geqq 6$，$x+3y\geqq 6$，$x+y\leqq 6$ のとき　$x+2y$

解答　(1) $x=\frac{20}{7}$，$y=\frac{9}{7}$ のとき最大値 $\frac{29}{7}$，$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

(2) $x=0$，$y=6$ のとき最大値 12，$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$

解説

(1) 2 直線 $2x+y=7$，$3x+5y=15$ の交点の座標は

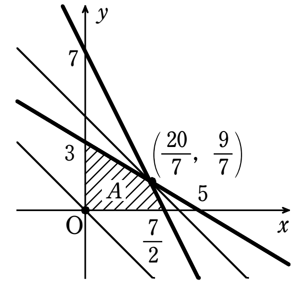
$$\left(\frac{20}{7},\ \frac{9}{7}\right)$$

与えられた連立不等式の表す領域 A は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

$x+y=k$ ……①

とおくと，①は傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。



図から，直線①が点 $\left(\frac{20}{7},\ \frac{9}{7}\right)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=\frac{20}{7}+\frac{9}{7}=\frac{29}{7}$

また，直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=0$

よって　$x=\frac{20}{7}$，$y=\frac{9}{7}$ のとき最大値 $\frac{29}{7}$

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

(2) 2 直線 $3x+y=6$，$x+3y=6$ の交点の座標は　$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

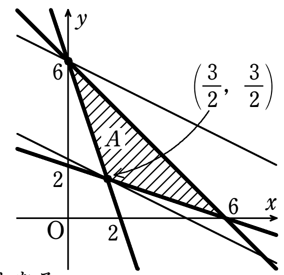
与えられた連立不等式の表す領域 A は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x+2y=k$ ……① とおくと，①は傾きが $-\frac{1}{2}$，

y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

図から，直線①が点 $(0,\ 6)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=0+2\cdot 6=12$



また，直線①が点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

よって　$x=0$，$y=6$ のとき最大値 12，　$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$

23 $x^2+y^2\leqq 1$，$x\geqq 0$ のとき，$-2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

解説

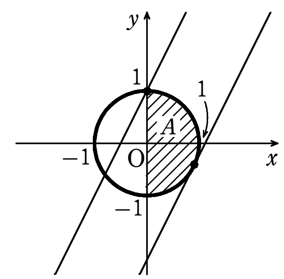
与えられた連立不等式の表す領域 A は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$-2x+y=k$ ……① とおくと，①は傾きが 2，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線①が点 $(0,\ 1)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=-2\cdot 0+1=1$

また，直線①が領域 A 上で円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，k の値は最小となる。



① から　$y=2x+k$ ……②

これを $x^2+y^2=1$ に代入して　$x^2+(2x+k)^2=1$

よって　$5x^2+4kx+k^2-1=0$ ……③

この２次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-1)=-k^2+5$

直線 ① と円が接するとき，$D=0$ であるから　$-k^2+5=0$

ゆえに　$k=\pm\sqrt{5}$　　接点が領域 A 上にあるとき　$k=-\sqrt{5}$

このとき，③ から　$x=-\dfrac{2k}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

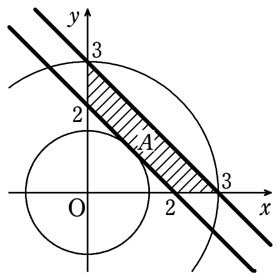
② から　$y=2\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+k=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

よって　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

$\boxed{24}$ $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2\leqq x+y\leqq 3$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=0$ または $x=0$，$y=3$ のとき最大値 9；$x=1$，$y=1$ のとき最小値 2

解説



与えられた連立不等式の表す領域 A は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x^2+y^2=k^2$ ……① $(k>0)$ とおくと，① は原点を中心とし，半径 k の円を表す。

図から，円 ① が点 (3，0)，(0，3) を通るとき，k^2 の値は最大となる。

このとき　$k^2=3^2+0^2=9$

また，円 ① が直線 $x+y=2$ ……② に接するとき，k^2 の値は最小となる。

このとき，円 ① の中心 (0，0) と直線 ② の距離が，円の半径 k に等しいから

$$k=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}\qquad よって\qquad k^2=2$$

また，接点は，原点から直線 ② に下ろした垂線 $y=x$ と直線 ② の交点である。

その座標は　(1，1)

したがって　$x=3$，$y=0$ または $x=0$，$y=3$ のとき最大値 9，
$x=1$，$y=1$ のとき最小値 2

$\boxed{25}$ 次の k の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

(1)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+3y-6\leqq 0$，$2x+y-7\leqq 0$ のとき　$k=x+y$

(2)　$x-3y+6\geqq 0$，$x+2y-4\geqq 0$，$3x+y-12\leqq 0$ のとき　$k=x+3y$

(3)　$x^2+y^2\leqq 4$，$y\geqq 0$ のとき　$k=x+y$

解答　(1)　$x=3$，$y=1$ のとき最大値 4；$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0

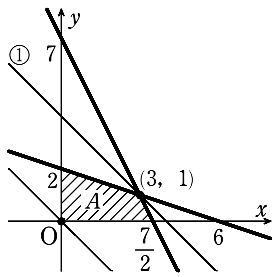
(2)　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 12；$x=4$，$y=0$ のとき最小値 4

(3)　$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$x=-2$，$y=0$ のとき最小値 -2

解説

(1)～(3) において，与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

(1)　領域 A は右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。



$k=x+y$ ……① とおくと，$y=-x+k$ であるから，① は y 切片が k で，傾き -1 の直線を表す。

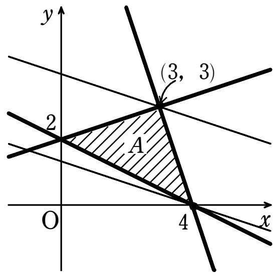
図から，直線 ① が点 (3，1) を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　$k=3+1=4$

また，直線 ① が点 (0，0) を通るとき，k の値は最小となる。このとき　$k=0$

したがって，k は　$x=3$，$y=1$ のとき最大値 4，
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。

(2)　領域 A は右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。



$k=x+3y$ ……① とおくと，$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$ であるから，① は y 切片が $\dfrac{k}{3}$ で，傾き $-\dfrac{1}{3}$ の直線を表す。

図から，直線 ① が点 (3，3) を通るとき，k の値は最大となる。

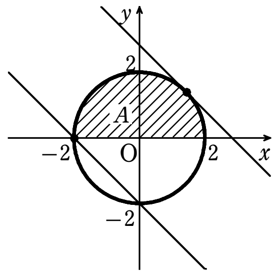
このとき　$k=3+3\cdot 3=12$

また，直線 ① が点 (4，0) を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=4+3\cdot 0=4$

したがって，k は　$x=3$，$y=3$ のとき最大値 12，
$x=4$，$y=0$ のとき最小値 4 をとる。

(3)　領域 A は右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。



$k=x+y$ ……① とおくと，$y=-x+k$ であるから，① は y 切片が k で，傾き -1 の直線を表す。

図から，直線 ① が領域 A 上で円 $x^2+y^2=4$ と接するとき，k の値は最大となる。

① から　$y=-x+k$ ……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して

$x^2+(-x+k)^2=4$

ゆえに　$2x^2-2kx+k^2-4=0$ ……③

この２次方程式について　$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

直線 ① が円と接するとき，$D=0$ であるから　$-k^2+8=0$

よって　$k=\pm 2\sqrt{2}$　　接点が領域上にあるとき　$k=2\sqrt{2}$

このとき，③ から　$x=\dfrac{2k}{2\cdot 2}=\sqrt{2}$　　② から　$y=-\sqrt{2}+k=\sqrt{2}$

また，直線 ① が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　$k=-2+0=-2$

したがって，k は　$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$，
$x=-2$，$y=0$ のとき最小値 -2 をとる。