接線の方程式クイズ

$\boxed{1}$ 曲線 $y=x^2-x+2$ 上の点 $(2,\ 4)$ における曲線の接線の方程式を求めよ。

解答　$y=3x-2$

解説

$f(x)=x^2-x+2$ とおくと

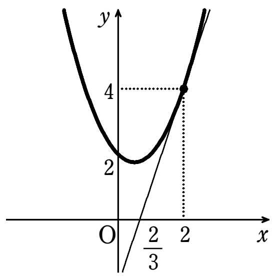
$f'(x)=2x-1$

ゆえに　$f'(2)=2\cdot2-1=3$

よって，点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式は

$y-4=3(x-2)$

すなわち　$y=3x-2$



$\boxed{2}$ 次の曲線上の点における，曲線の接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=-x^2+2x+4$，$(-1,\ 1)$　　(2)　$y=x^3$，$(-2,\ -8)$

解答　(1)　$y=4x+5$　　(2)　$y=12x+16$

解説

(1)　$f(x)=-x^2+2x+4$ とおくと　$f'(x)=-2x+2$

ゆえに　$f'(-1)=-2\cdot(-1)+2=4$

よって，点 $(-1,\ 1)$ における接線の方程式は

$y-1=4\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=4x+5$

(2)　$f(x)=x^3$ とおくと　$f'(x)=3x^2$

ゆえに　$f'(-2)=3\cdot(-2)^2=12$

よって，点 $(-2,\ -8)$ における接線の方程式は

$y-(-8)=12\{x-(-2)\}$　すなわち　$y=12x+16$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=x^2+4$ に点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　接線 $y=-2x+3$，接点 $(-1,\ 5)$ または接線 $y=6x-5$，接点 $(3,\ 13)$

解説

$y=x^2+4$ を微分すると

$y'=2x$

求める接線の接点の座標を

$(a,\ a^2+4)$

とすると，接線の方程式は

$y-(a^2+4)=2a(x-a)$

すなわち　$y=2ax-a^2+4$

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るから

$1=2a\cdot1-a^2+4$

整理すると　$a^2-2a-3=0$

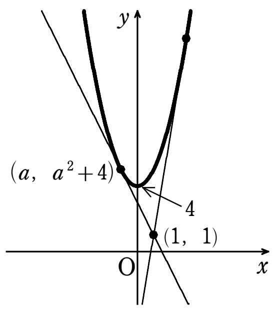
これを解いて　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき　接点の座標は $(-1,\ 5)$ で，接線の方程式は

$y=-2x+3$

$a=3$ のとき　接点の座標は $(3,\ 13)$ で，接線の方程式は

$y=6x-5$



答　接線 $y=-2x+3$，接点 $(-1,\ 5)$　または

接線 $y=6x-5$，接点 $(3,\ 13)$

$\boxed{4}$ 次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x$，$(3,\ -4)$　　(2)　$y=x^3$，$(-1,\ -5)$

解答　(1)　接線 $y=-x-1$，接点 $(1,\ -2)$ または 接線 $y=7x-25$，接点 $(5,\ 10)$

(2)　接線 $y=3x-2$，接点 $(1,\ 1)$

解説

(1)　$y=x^2-3x$ を微分すると $y'=2x-3$

求める接線の接点の座標を $(a,\ a^2-3a)$ とすると，

接線の方程式は

$y-(a^2-3a)=(2a-3)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-3)x-a^2$

この直線が点 $(3,\ -4)$ を通るから

$-4=(2a-3)\cdot3-a^2$

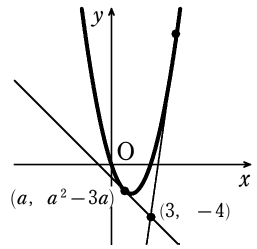
整理すると　$a^2-6a+5=0$

これを解いて　$a=1,\ 5$

$a=1$ のとき　接点の座標は $(1,\ -2)$ で，接線の方程式は $y=-x-1$

$a=5$ のとき　接点の座標は $(5,\ 10)$ で，接線の方程式は $y=7x-25$

答　接線 $y=-x-1$，接点 $(1,\ -2)$　または　接線 $y=7x-25$，接点 $(5,\ 10)$



(2)　$y=x^3$ を微分すると $y'=3x^2$

求める接線の接点の座標を $(a,\ a^3)$ とすると，接線の方程式は

$y-a^3=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3$

この直線が点 $(-1,\ -5)$ を通るから

$-5=3a^2\cdot(-1)-2a^3$

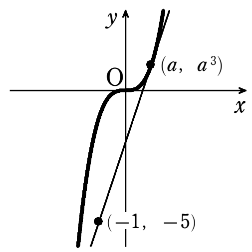
整理すると　$2a^3+3a^2-5=0$

左辺を因数分解して　$(a-1)(2a^2+5a+5)=0$

a は実数であるから　$a=1$

よって，接点の座標は $(1,\ 1)$ で，接線の方程式は　$y=3x-2$

答　接線 $y=3x-2$，接点 $(1,\ 1)$



$\boxed{5}$ 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。[各 15 点]

(1)　$y=x^2+4x$　$(-3,\ -3)$　　(2)　$y=x^3-2x^2+3$　$(1,\ 2)$

解答　(1)　$y'=2x+4$ であるから　$x=-3$ のとき　$y'=-2$

よって，接線の方程式は

$y-(-3)=-2\{x-(-3)\}$　すなわち　$y=-2x-9$

(2)　$y'=3x^2-4x$ であるから　$x=1$ のとき　$y'=-1$

よって，接線の方程式は

$y-2=-(x-1)$　すなわち　$y=-x+3$

解説

(1)　$y'=2x+4$ であるから　$x=-3$ のとき　$y'=-2$

よって，接線の方程式は

$y-(-3)=-2\{x-(-3)\}$　すなわち　$y=-2x-9$

(2)　$y'=3x^2-4x$ であるから　$x=1$ のとき　$y'=-1$

よって，接線の方程式は

$y-2=-(x-1)$　すなわち　$y=-x+3$

$\boxed{6}$ 曲線 $y=x^2-x+8$ の接線で，点 $(1,\ -1)$ を通るものの方程式を求めよ。また，その接点の座標を求めよ。[20 点]

解答　$y'=2x-1$

接点の座標を $(a,\ a^2-a+8)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^2-a+8)=(2a-1)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2+8$ ……①

これが点 $(1,\ -1)$ を通るから　$-1=(2a-1)\cdot1-a^2+8$

よって　$a^2-2a-8=0$

これを解いて　$a=-2,\ 4$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ 14)$

① から，接線の方程式は　$y=-5x+4$

$a=4$ のとき，接点の座標は　$(4,\ 20)$

① から，接線の方程式は　$y=7x-8$

解説

$y'=2x-1$

接点の座標を $(a,\ a^2-a+8)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^2-a+8)=(2a-1)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2+8$ ……①

これが点 $(1,\ -1)$ を通るから　$-1=(2a-1)\cdot1-a^2+8$

よって　$a^2-2a-8=0$

これを解いて　$a=-2,\ 4$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ 14)$

① から，接線の方程式は　$y=-5x+4$

$a=4$ のとき，接点の座標は　$(4,\ 20)$

① から，接線の方程式は　$y=7x-8$

$\boxed{7}$ 曲線 $y=x^3+3x^2+2x-1$ の接線で，傾きが 2 であるものの方程式を求めよ。[25点]

解答　$f(x)=x^3+3x^2+2x-1$ とおくと　$f'(x)=3x^2+6x+2$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きが 2 であるとすると，

$f'(a)=2$ から　$3a^2+6a+2=2$

よって　$3a(a+2)=0$

これを解いて　$a=0,\ -2$

求める接線の方程式は $y-f(a)=2(x-a)$ であるから

$a=0$ のとき

$y-(-1)=2x$ から　$y=2x-1$

$a=-2$ のとき

$y-(-1)=2\{x-(-2)\}$ から　$y=2x+3$

解説

$f(x)=x^3+3x^2+2x-1$ とおくと　$f'(x)=3x^2+6x+2$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きが 2 であるとすると，

$f'(a)=2$ から　$3a^2+6a+2=2$

よって　$3a(a+2)=0$

これを解いて　$a=0,\ -2$

求める接線の方程式は $y-f(a)=2(x-a)$ であるから

$a=0$ のとき

$y-(-1)=2x$ から　$y=2x-1$

$a=-2$ のとき

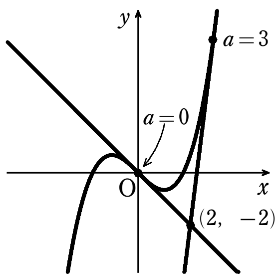
$y-(-1)=2\{x-(-2)\}$ から　$y=2x+3$

$\boxed{8}$ 点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\frac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x,\ y=8x-18$

解説

$y=\frac{1}{3}x^3-x$ から　$y'=x^2-1$



接点の x 座標を a とすると，接線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)=(a^2-1)(x-a)$$

よって　$y=(a^2-1)x-\frac{2}{3}a^3$　…… ①

この直線が点 $(2,\ -2)$ を通るから

$$-2=(a^2-1)\cdot 2-\frac{2}{3}a^3$$

整理すると　$a^2(a-3)=0$　　ゆえに　$a=0,\ 3$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=0$ のとき　$y=-x$，　$a=3$ のとき　$y=8x-18$

$\boxed{9}$ 次のような直線の方程式を求めよ。

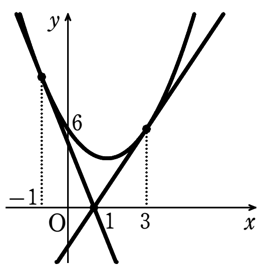
(1)　点 $(1,\ 0)$ から，曲線 $y=x^2-3x+6$ に引いた接線

(2)　点 $(0,\ 4)$ から，曲線 $y=x^3+2$ に引いた接線

解答　(1)　$y=-5x+5,\ y=3x-3$　　(2)　$y=3x+4$

解説

(1)　$y=x^2-3x+6$ から　$y'=2x-3$



接点の x 座標を a とすると，接線の方程式は

$y-(a^2-3a+6)=(2a-3)(x-a)$

よって　$y=(2a-3)x-a^2+6$　…… ①

この直線が点 $(1,\ 0)$ を通るから

$0=(2a-3)\cdot 1-a^2+6$

整理すると　$a^2-2a-3=0$

ゆえに　$(a+1)(a-3)=0$

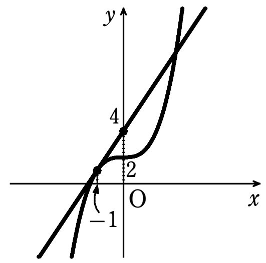
よって　$a=-1,\ 3$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=-1$ のとき　$y=-5x+5$，

$a=3$　のとき　$y=3x-3$

(2)　$y=x^3+2$ から　$y'=3x^2$



接点の x 座標を a とすると，接線の方程式は

$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

よって　$y=3a^2x-2a^3+2$　…… ②

この直線が点 $(0,\ 4)$ を通るから

$4=-2a^3+2$

整理すると　$a^3+1=0$

ゆえに　$(a+1)(a^2-a+1)=0$

a は実数であるから　$a=-1$

求める接線の方程式は $a=-1$ を ② に代入して

$y=3x+4$

$\boxed{10}$ 点 $(2,\ 4)$ を通り，曲線 $y=x^3-3x+2$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$y=4,\ y=9x-14$

解説

$y=x^3-3x+2$ から　$y'=3x^2-3$

接点の x 座標を a とすると，接線の方程式は

$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$

よって　$y=(3a^2-3)x-2a^3+2$　…… ①

この直線が点 $(2,\ 4)$ を通るから　$4=(3a^2-3)\cdot 2-2a^3+2$

ゆえに　$a^3-3a^2+4=0$　　左辺を因数分解して　$(a+1)(a-2)^2=0$

よって　$a=-1,\ 2$

求める直線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=-1$ のとき　$y=4$，　$a=2$ のとき　$y=9x-14$

$\boxed{11}$ 原点 $(0,\ 0)$ を通り，曲線 $y=x^3-x^2$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$y=0,\ y=-\frac{1}{4}x$

解説

$y=x^3-x^2$ から　$y'=3x^2-2x$

接点の x 座標を a とすると，接線の方程式は

$y-(a^3-a^2)=(3a^2-2a)(x-a)$

よって　$y=(3a^2-2a)x-2a^3+a^2$　…… ①

この直線が点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0=-2a^3+a^2$

整理すると　$a^2(2a-1)=0$　　ゆえに　$a=0,\ \frac{1}{2}$

求める直線の方程式は，a の値を ① に代入して

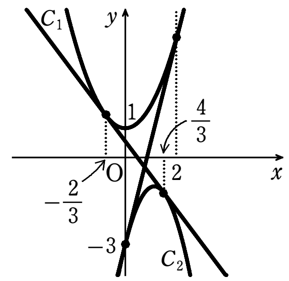
$a=0$ のとき　$y=0$，　$a=\frac{1}{2}$ のとき　$y=-\frac{1}{4}x$

$\boxed{12}$ 2 つの放物線 $C_1:y=x^2+1$，$C_2:y=-2x^2+4x-3$ の両方に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$y=4x-3,\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

解説

$y=x^2+1$ から　$y'=2x$



C_1 上の点 $(a,\ a^2+1)$ における接線の方程式は

$y-(a^2+1)=2a(x-a)$

すなわち　$y=2ax-a^2+1$　…… ①

(解答 1)　① が C_2 と接するための条件は，y を消去した x の方程式

$-2x^2+4x-3=2ax-a^2+1$

すなわち　$2x^2+2(a-2)x+4-a^2=0$

が重解をもつことである。

よって，この判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(4-a^2)=(a-2)\{a-2+2(a+2)\}=(a-2)(3a+2)$$

であるから，$D=0$ すなわち $(a-2)(3a+2)=0$ より　$a=2,\ -\frac{2}{3}$

① に代入して，求める方程式は　$y=4x-3,\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

(解答 2)　$y=-2x^2+4x-3$ から　$y'=-4x+4$

C_2 上の点 $(b,\ -2b^2+4b-3)$ における接線の方程式は

$y-(-2b^2+4b-3)=(-4b+4)(x-b)$

すなわち　$y=(-4b+4)x+2b^2-3$　…… ②

求める直線は ① と ② が一致する場合であり，その条件は

$2a=-4b+4$　…… ③　かつ　$-a^2+1=2b^2-3$　…… ④

③ から　$a=-2(b-1)$　　④ に代入して　$-4(b^2-2b+1)+1=2b^2-3$

よって　$-2b(3b-4)=0$　　ゆえに　$b=0,\ \frac{4}{3}$

② に代入して，求める方程式は　$y=4x-3,\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

$\boxed{13}$ 2 つの放物線 $C_1:y=x^2$，$C_2:y=x^2-6x+15$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x-1$

解説

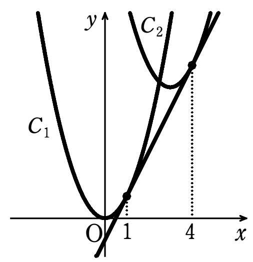
$y=x^2$ から　$y'=2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$

すなわち　$y=2ax-a^2$　…… ①

① が C_2 と接するための条件は，y を消去した x の方程式



$x^2-6x+15=2ax-a^2$

すなわち　$x^2-2(a+3)x+15+a^2=0$

が重解をもつことである。

よって，この判別式を D とすると

$D=0$

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-1\cdot(15+a^2)=6(a-1)$ であるから，

$D=0$ すなわち $a-1=0$ より　$a=1$

① に代入して，求める方程式は　$y=2x-1$

別解　$y=x^2-6x+15$ から　$y'=2x-6$

C_2 上の点 $(b,\ b^2-6b+15)$ における接線の方程式は

$y-(b^2-6b+15)=(2b-6)(x-b)$

すなわち　$y=(2b-6)x-b^2+15$　…… ②

求める直線は ① と ② が一致する場合であり，その条件は

$2a=2b-6$ ……③ かつ $-a^2=-b^2+15$ ……④

③ から　$b=a+3$　④ に代入して　$-a^2=-(a+3)^2+15$

よって　$6a-6=0$　ゆえに　$a=1$

① に代入して，求める方程式は　$y=2x-1$

$\boxed{14}$ (1)　曲線 $y=x^3$ 上の点 $(2,\ 8)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+x$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=12x-16$　(2)　$y=-2x+2$，$y=-2x-2$

解説

(1)　$f(x)=x^3$ とすると

$f'(x)=3x^2$

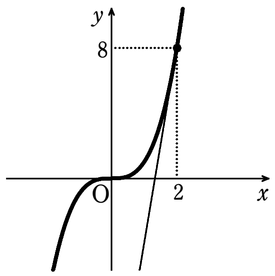
点 $(2,\ 8)$ における接線の傾きは

$f'(2)=12$

よって，求める接線の方程式は

$y-8=12(x-2)$

すなわち　$y=12x-16$



(2)　$f(x)=-x^3+x$ とすると

$f'(x)=-3x^2+1$

点 $(a,\ -a^3+a)$ における接線の方程式は

$y-(-a^3+a)=(-3a^2+1)(x-a)$ ……①

この直線の傾きが -2 であるとすると

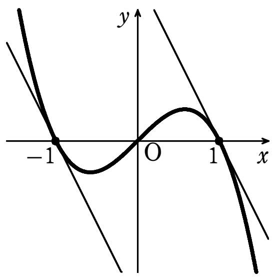
$-3a^2+1=-2$

ゆえに　$a^2=1$　よって　$a=\pm 1$

① から　$a=1$ のとき　$y=-2(x-1)$

$a=-1$ のとき　$y=-2(x+1)$

したがって　$y=-2x+2$，$y=-2x-2$



$\boxed{15}$ (1)　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3+3x^2$ に接し，傾きが 9 である直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=19x-45$　(2)　$y=9x-5$，$y=9x+27$

解説

(1)　$f(x)=x^3-x^2-2x$ とすると　$f'(x)=3x^2-2x-2$

ゆえに　$f'(3)=3\cdot 3^2-2\cdot 3-2=19$

よって，点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式は

$y-12=19(x-3)$　すなわち　$y=19x-45$

(2)　$f(x)=x^3+3x^2$ とすると　$f'(x)=3x^2+6x$

点 $(a,\ a^3+3a^2)$ における接線の方程式は

$y-(a^3+3a^2)=(3a^2+6a)(x-a)$

すなわち　$y=(3a^2+6a)x-2a^3-3a^2$ ……①

この直線の傾きが 9 であるとすると　$3a^2+6a=9$

整理して　$a^2+2a-3=0$　ゆえに　$(a-1)(a+3)=0$

したがって　$a=1,\ -3$

① から　$a=1$ のとき　$y=9x-5$，$a=-3$ のとき　$y=9x+27$

よって，求める直線の方程式は　$y=9x-5$，$y=9x+27$

$\boxed{16}$ (1)　点 $(3,\ 4)$ から，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(2,\ 4)$ を通り，曲線 $y=x^3-3x+2$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=2x-2$，$y=-6x+22$　(2)　$y=4$，$y=9x-14$

解説

(1)　$f(x)=-x^2+4x-3$ とすると　$f'(x)=-2x+4$

放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(x-a)$

すなわち　$y=-2(a-2)x+a^2-3$ ……①

この直線が点 $(3,\ 4)$ を通るから　$4=-2(a-2)\cdot 3+a^2-3$

整理すると　$a^2-6a+5=0$

ゆえに　$(a-1)(a-5)=0$　よって　$a=1,\ 5$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=1$ のとき　$y=2x-2$，$a=5$ のとき　$y=-6x+22$

(2)　$f(x)=x^3-3x+2$ とすると　$f'(x)=3x^2-3$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$

すなわち　$y=(3a^2-3)x-2a^3+2$ ……①

この直線が点 $(2,\ 4)$ を通るから　$4=(3a^2-3)\cdot 2-2a^3+2$

整理すると　$a^3-3a^2+4=0$　ゆえに　$(a+1)(a-2)^2=0$

よって　$a=-1,\ 2$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=-1$ のとき　$y=4$，$a=2$ のとき　$y=9x-14$

$\boxed{17}$ 2 つの放物線 $y=-x^2$，$y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

解説

$y=-x^2$ に対して　$y'=-2x$

よって，放物線 $y=-x^2$ 上の点 $(a,\ -a^2)$ における接線の方程式は

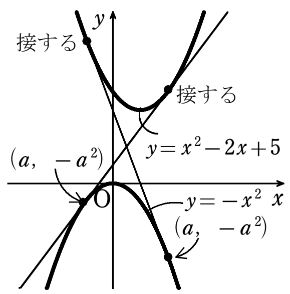
$y-(-a^2)=-2a(x-a)$

すなわち　$y=-2ax+a^2$ ……①

この直線が放物線 $y=x^2-2x+5$ にも接するための条件は，2 次方程式

$x^2-2x+5=-2ax+a^2$　すなわち

$x^2+2(a-1)x-a^2+5=0$ …… ② が重解をもつことである。



ゆえに，② の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(-a^2+5)=2a^2-2a-4=2(a+1)(a-2)$$

よって　$(a+1)(a-2)=0$　ゆえに　$a=-1,\ 2$

この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

$\boxed{18}$ 2 つの放物線 $y=x^2$ と $y=-(x-3)^2+4$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x-1$，$y=4x-4$

解説

$y=x^2$ から　$y'=2x$

よって，放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$　すなわち　$y=2ax-a^2$ ……①

この直線が放物線 $y=-(x-3)^2+4$ にも接するための条件は，2 次方程式

$-(x-3)^2+4=2ax-a^2$ すなわち $x^2+2(a-3)x-a^2+5=0$ …… ② が重解をもつことである。

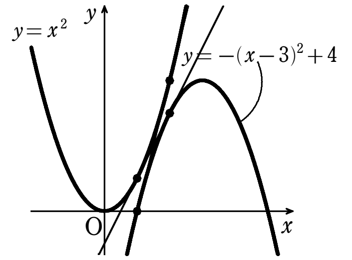
ゆえに，② の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-1\cdot(-a^2+5)$$

$$=2a^2-6a+4=2(a-1)(a-2)$$

$D=0$ から　$a=1,\ 2$

この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x-1$，$y=4x-4$



$\boxed{19}$ 次の曲線上の与えられた点における，曲線の接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+2$，$(1,\ 0)$　(2)　$y=-2x^2+4x-1$，$(0,\ -1)$

(3)　$y=x^3+4$，$(-2,\ -4)$　(4)　$y=5x-x^3$，$(2,\ 2)$

解答　(1)　$y=-x+1$　(2)　$y=4x-1$　(3)　$y=12x+20$　(4)　$y=-7x+16$

解説

(1)　$f(x)=x^2-3x+2$ とおくと　$f'(x)=2x-3$

よって，点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きは　$f'(1)=2\cdot 1-3=-1$

ゆえに，求める接線の方程式は　$y-0=-1\cdot(x-1)$

すなわち　$y=-x+1$

(2)　$f(x)=-2x^2+4x-1$ とおくと　$f'(x)=-4x+4$

よって，点 $(0,\ -1)$ における接線の傾きは　$f'(0)=-4\cdot 0+4=4$

ゆえに，求める接線の方程式は　$y+1=4(x-0)$

すなわち　$y=4x-1$

(3)　$f(x)=x^3+4$ とおくと　$f'(x)=3x^2$

よって，点 $(-2,\ -4)$ における接線の傾きは　$f'(-2)=3\cdot(-2)^2=12$

ゆえに，求める接線の方程式は　$y+4=12(x+2)$

すなわち　$y=12x+20$

(4)　$f(x)=5x-x^3$ とおくと　$f'(x)=5-3x^2$

よって，点 $(2,\ 2)$ における接線の傾きは　$f'(2)=5-3\cdot 2^2=-7$

ゆえに，求める接線の方程式は　$y-2=-7(x-2)$

すなわち　$y=-7x+16$

$\boxed{20}$ 次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+3x+4$　$(0,\ 0)$　(2)　$y=x^2-x+3$　$(1,\ -1)$

(3)　$y=x^3+2$　$(0,\ 4)$

解答　(1)　$y=7x$，$(2,\ 14)$；$y=-x$，$(-2,\ 2)$

(2)　$y=-3x+2$，$(-1,\ 5)$；$y=5x-6$，$(3,\ 9)$　(3)　$y=3x+4$，$(-1,\ 1)$

解説

(1) $y'=2x+3$

接点の座標を $(a,\ a^2+3a+4)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^2+3a+4)=(2a+3)(x-a)$$

すなわち $y=(2a+3)x-a^2+4$ ……①

この直線が点 $(0,\ 0)$ を通るから $0=(2a+3)\cdot 0-a^2+4$

これを解いて $a=\pm 2$

$a=2$ のとき，接点の座標は $(2,\ 14)$

① から，接線の方程式は $y=7x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は $(-2,\ 2)$

① から，接線の方程式は $y=-x$

(2) $y'=2x-1$

接点の座標を $(a,\ a^2-a+3)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^2-a+3)=(2a-1)(x-a)$$

すなわち $y=(2a-1)x-a^2+3$ ……①

この直線が点 $(1,\ -1)$ を通るから $-1=(2a-1)\cdot 1-a^2+3$

よって $a^2-2a-3=0$

これを解いて $a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は $(-1,\ 5)$

① から，接線の方程式は $y=-3x+2$

$a=3$ のとき，接点の座標は $(3,\ 9)$

① から，接線の方程式は $y=5x-6$

(3) $y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+2)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$$

すなわち $y=3a^2x-2a^3+2$ ……①

この直線が点 $(0,\ 4)$ を通るから $4=3a^2\cdot 0-2a^3+2$

よって $a^3+1=0$ すなわち $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ であるから $a+1=0$

よって $a=-1$

ゆえに，接点の座標は $(-1,\ 1)$

① から，接線の方程式は $y=3x+4$

$\boxed{21}$ 曲線 $y=x^3+3x^2-6$ について，傾きが 9 である接線の方程式を求めよ。

解答 $y=9x-11,\ y=9x+21$

解説

$y'=3x^2+6x$

接点の座標を $(a,\ a^3+3a^2-6)$ とすると，接線の傾きが 9 であるから

$$3a^2+6a=9$$

ゆえに $a^2+2a-3=0$

これを解いて $a=1,\ -3$

よって，接点の座標は $(1,\ -2),\ (-3,\ -6)$

したがって，求める接線の方程式は $y+2=9(x-1),\ y+6=9(x+3)$

すなわち $y=9x-11,\ y=9x+21$

$\boxed{22}$ 次の曲線上の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2-3x+2,\ (1,\ 0)$　　(2) $y=x^3-3x^2+6,\ (2,\ 2)$

解答 (1) 接線の方程式 $y=-x+1$，法線の方程式 $y=x-1$

(2) 接線の方程式 $y=2$，法線の方程式 $x=2$

解説

(1) $y'=2x-3$　　$x=1$ のとき $y'=-1$

接線の方程式は $y-0=-(x-1)$ すなわち $y=-x+1$

法線の方程式は $y-0=-\dfrac{1}{-1}(x-1)$ すなわち $y=x-1$

(2) $y'=3x^2-6x$　　$x=2$ のとき $y'=0$

接線の方程式は $y-2=0\cdot(x-2)$ すなわち $y=2$

法線の方程式は $x=2$

$\boxed{23}$ 曲線 $y=x^3+2x^2-x$ について，次のものを求めよ。

(1) 曲線上の点 $(-1,\ 2)$ における法線の方程式

(2) (1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $(-1,\ 2)$ 以外の点の座標

解答 (1) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$　(2) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2},\ \dfrac{9-\sqrt{11}}{4}\right),\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2},\ \dfrac{9+\sqrt{11}}{4}\right)$

解説

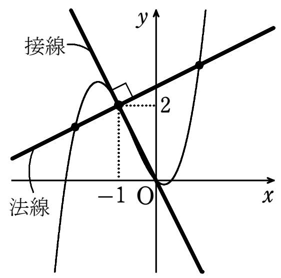
(1) $f(x)=x^3+2x^2-x$ とすると $f'(x)=3x^2+4x-1$

よって $f'(-1)=3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)-1=-2$

ゆえに，求める法線の方程式は

$$y-2=-\frac{1}{-2}\{x-(-1)\}$$

すなわち $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$



(2) 求める共有点の x 座標は，次の方程式の $x=-1$ 以外の実数解である。

$$x^3+2x^2-x=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

整理して $2x^3+4x^2-3x-5=0$

よって $(x+1)(2x^2+2x-5)=0$

ゆえに $x=-1$ または $2x^2+2x-5=0$

$2x^2+2x-5=0$ を解いて $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9+\sqrt{11}}{4}$

$x=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}\right)+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9-\sqrt{11}}{4}$

したがって，求める点の座標は

$$\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\ \frac{9-\sqrt{11}}{4}\right),\ \left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2},\ \frac{9+\sqrt{11}}{4}\right)$$

$\boxed{24}$ 曲線 $y=x^3-3x^2+2x+1$ について，次のものを求めよ。

(1) 曲線上の点 $(1,\ 1)$ における法線の方程式

(2) (1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $(1,\ 1)$ 以外の点の座標

解答 (1) $y=x$　(2) $(1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$

解説

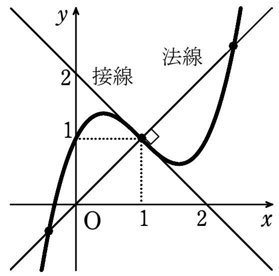
(1) $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ とすると $f'(x)=3x^2-6x+2$

よって $f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+2=-1$

ゆえに，求める法線の方程式は

$$y-1=-\frac{1}{-1}\cdot(x-1)$$

すなわち $y=x$



(2) 求める共有点の x 座標は，次の方程式の $x=1$ 以外の実数解である。

$$x^3-3x^2+2x+1=x$$

整理して $x^3-3x^2+x+1=0$

よって $(x-1)(x^2-2x-1)=0$

ゆえに $x=1$ または $x^2-2x-1=0$

$x^2-2x-1=0$ を解いて $x=1\pm\sqrt{2}$

$x=1+\sqrt{2}$ のとき $y=1+\sqrt{2}$，$x=1-\sqrt{2}$ のとき $y=1-\sqrt{2}$

したがって，求める点の座標は

$$(1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$$

$\boxed{25}$ 曲線 $y=\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{5}{3}x$ について，次のものを求めよ。

(1) 曲線上の点 $\left(2,\ -\dfrac{14}{9}\right)$ における法線の方程式

(2) (1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $\left(2,\ -\dfrac{14}{9}\right)$ 以外の点の座標

解答 (1) $y=-x+\dfrac{4}{9}$　(2) $\left(-1,\ \dfrac{13}{9}\right)$

解説

(1) $f(x)=\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{5}{3}x$ とすると $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5}{3}$

よって，点 $\left(2,\ -\dfrac{14}{9}\right)$ における接線の傾きは $f'(2)=\dfrac{2}{3}\cdot 2^2-\dfrac{5}{3}=1$

ゆえに，法線の傾きは -1 である。

したがって，求める法線の方程式は

$$y-\left(-\frac{14}{9}\right)=-1\cdot(x-2)\quad \text{すなわち}\quad y=-x+\frac{4}{9}$$

(2) 求める共有点の x 座標は，次の方程式の $x=2$ 以外の実数解である。

$$\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{3}x=-x+\frac{4}{9}$$

整理して $x^3-3x-2=0$　　よって $(x-2)(x+1)^2=0$

したがって，求める点の x 座標は，$x=-1$ であり，求める共有点の座標は

$$\left(-1,\ \frac{13}{9}\right)$$

$\boxed{26}$ 曲線 $y=2x^2-4x+3$ 上の点 A $(0,\ 3)$ を通り，点 A における曲線の接線に垂直な直線の方程式を求めよ。

解答　$y=\frac{1}{4}x+3$

解説

$y=2x^2-4x+3$ から　$y'=4x-4$

よって，点 A$(0,\ 3)$ における接線の傾きは　$4\cdot0-4=-4$

点 A における接線に垂直な直線の傾きを m とすると　$-4\times m=-1$

ゆえに　$m=\frac{1}{4}$

したがって，求める直線の方程式は　$y-3=\frac{1}{4}(x-0)$

すなわち　$y=\frac{1}{4}x+3$

27 2 つの曲線 $y=x^2$，$y=-(x-2)^2$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=0$，$y=4x-4$

解説

$y=x^2$ から　$y'=2x$

$y=-(x-2)^2=-x^2+4x-4$ から　$y'=-2x+4=-2(x-2)$

曲線 $y=x^2$ 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は　$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$

すなわち　$y=2\alpha x-\alpha^2$　…… ①

また，曲線 $y=-(x-2)^2$ 上の点 $(\beta,\ -(\beta-2)^2)$ における接線の方程式は

$$y+(\beta-2)^2=-2(\beta-2)(x-\beta)$$

すなわち　$y=-2(\beta-2)x+\beta^2-4$　…… ②

①，② が一致するとき　$2\alpha=-2(\beta-2)$　…… ③

$-\alpha^2=\beta^2-4$　…… ④

③ から　$\beta=2-\alpha$

これを ④ に代入して　$-\alpha^2=(2-\alpha)^2-4$

よって　$\alpha^2-2\alpha=0$　　これを解いて　$\alpha=0,\ 2$

ゆえに，求める共通接線の方程式は，① から

$\alpha=0$ のとき　$y=0$

$\alpha=2$ のとき　$y=4x-4$

別解　$y=x^2$ から　$y'=2x$

曲線 $y=x^2$ 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は　$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$

すなわち　$y=2\alpha x-\alpha^2$

これが曲線 $y=-(x-2)^2$ にも接するとき，方程式　$2\alpha x-\alpha^2=-(x-2)^2$

すなわち $x^2+2(\alpha-2)x-\alpha^2+4=0$ …… ① は重解をもつ。

① の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(\alpha-2)^2-(-\alpha^2+4)=2\alpha^2-4\alpha$

① が重解をもつための必要十分条件は $D=0$ であるから　$2\alpha^2-4\alpha=0$

よって　$\alpha^2-2\alpha=0$

これを解いて　$\alpha=0,\ 2$ （以下，略）

参考　$f(x)$ を整式とするとき次のことが成り立つ。

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+b$ が接する

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $f(x)=ax+b$ は重解をもつ

（重解が β であるとき，点 $(\beta,\ f(\beta))$ が接点）

28 次の曲線上の点における，曲線の接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^2-7x+8$　$(1,\ 2)$　　(2)　$y=-2x^2+5x$　$(3,\ -3)$

(3)　$y=x^3+5$　$(-3,\ -22)$

解答　(1)　$y=-5x+7$　(2)　$y=-7x+18$　(3)　$y=27x+59$

解説

(1)　$f(x)=x^2-7x+8$ とおくと　$f'(x)=2x-7$

よって，点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは　$f'(1)=2\cdot1-7=-5$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y-2=-5(x-1)$　すなわち　$y=-5x+7$

(2)　$f(x)=-2x^2+5x$ とおくと　$f'(x)=-4x+5$

よって，点 $(3,\ -3)$ における接線の傾きは　$f'(3)=-4\cdot3+5=-7$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y+3=-7(x-3)$　すなわち　$y=-7x+18$

(3)　$f(x)=x^3+5$ とおくと　$f'(x)=3x^2$

よって，点 $(-3,\ -22)$ における接線の傾きは　$f'(-3)=3\cdot(-3)^2=27$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y+22=27(x+3)$　すなわち　$y=27x+59$

29 曲線 $y=(x-1)(2x+1)$ について，次のものを求めよ。

(1)　x 軸との交点における接線の傾き　　(2)　傾きが 5 である接線の方程式

(3)　x 軸に平行な接線の方程式

解答　(1)　3，-3　(2)　$y=5x-\frac{11}{2}$　(3)　$y=-\frac{9}{8}$

解説

$f(x)=(x-1)(2x+1)$ とおく。

$f(x)=2x^2-x-1$ であるから　$f'(x)=4x-1$

(1)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は，$(x-1)(2x+1)=0$ を解いて

$$x=1,\ -\frac{1}{2}$$

点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きは　$f'(1)=4\cdot1-1=3$

点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ における接線の傾きは　$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-3$

(2)　求める接線の接点の座標を $(a,\ 2a^2-a-1)$ とすると，接線の傾きが 5 であるから

$f'(a)=5$　　よって　$4a-1=5$

これを解いて　$a=\frac{3}{2}$　　ゆえに，接点の座標は　$\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$

したがって，求める接線の方程式は

$y-2=5\left(x-\frac{3}{2}\right)$　すなわち　$y=5x-\frac{11}{2}$

(3)　x 軸に平行な接線の傾きは 0 である。

求める接線の接点の座標を $(a,\ 2a^2-a-1)$ とすると，接線の傾きが 0 であるから

$f'(a)=0$　　よって　$4a-1=0$

これを解いて　$a=\frac{1}{4}$　　よって，接点の座標は　$\left(\frac{1}{4},\ -\frac{9}{8}\right)$

したがって，求める接線の方程式は

$y+\frac{9}{8}=0\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)$　すなわち　$y=-\frac{9}{8}$

30 次の曲線の接線で，与えられた点を通るものの方程式を求めよ。また，その接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+5x+4$　$(0,\ 0)$　　(2)　$y=-2x^2+3x-7$　$(1,\ 2)$

(3)　$y=-x^3+4$　$(2,\ 4)$　　(4)　$y=x^3-3x^2-1$　$(0,\ 0)$

解答　接線の方程式，接点の座標の順に

(1)　$y=9x$，$(2,\ 18)$；　$y=x$，$(-2,\ -2)$

(2)　$y=7x-5$，$(-1,\ -12)$；　$y=-9x+11$，$(3,\ -16)$

(3)　$y=4$，$(0,\ 4)$；　$y=-27x+58$，$(3,\ -23)$

(4)　$y=-3x$，$(1,\ -3)$；　$y=\frac{15}{4}x$，$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{15}{8}\right)$

解説

(1)　$y=x^2+5x+4$ を微分すると　$y'=2x+5$

求める接線の接点の座標を $(a,\ a^2+5a+4)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^2+5a+4)=(2a+5)(x-a)$$

すなわち　$y=(2a+5)x-a^2+4$　…… ①

これが点 $(0,\ 0)$ を通るから

$0=(2a+5)\cdot0-a^2+4$

これを解いて　$a=\pm2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 18)$

① から，接線の方程式は　$y=9x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ -2)$

① から，接線の方程式は　$y=x$

(2)　$y=-2x^2+3x-7$ を微分すると　$y'=-4x+3$

求める接線の接点の座標を $(a,\ -2a^2+3a-7)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(-2a^2+3a-7)=(-4a+3)(x-a)$$

すなわち　$y=(-4a+3)x+2a^2-7$　…… ①

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$2=(-4a+3)\cdot1+2a^2-7$

よって　$2a^2-4a-6=0$

ゆえに　$a^2-2a-3=0$

すなわち　$(a+1)(a-3)=0$

したがって　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -12)$

① から，接線の方程式は　$y=7x-5$

$a=3$ のとき，接点の座標は　$(3,\ -16)$

① から，接線の方程式は　$y=-9x+11$

(3)　$y=-x^3+4$ を微分すると　$y'=-3x^2$

求める接線の接点の座標を $(a,\ -a^3+4)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(-a^3+4)=-3a^2(x-a)$$

すなわち　$y=-3a^2x+2a^3+4$　…… ①

これが点 $(2,\ 4)$ を通るから　$4=-3a^2\cdot2+2a^3+4$

よって　$2a^3-6a^2=0$　　ゆえに　$a^3-3a^2=0$

すなわち　$a^2(a-3)=0$　　したがって　$a=0,\ 3$

$a=0$ のとき，接点の座標は　$(0,\ 4)$

① から，接線の方程式は　$y=4$

$a=3$ のとき，接点の座標は　$(3,\ -23)$

① から，接線の方程式は　$y=-27x+58$

(4)　$y=x^3-3x^2-1$ を微分すると　　$y'=3x^2-6x$

求める接線の接点の座標を $(a,\ a^3-3a^2-1)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^3-3a^2-1)=(3a^2-6a)(x-a)$$

すなわち　　$y=(3a^2-6a)x-2a^3+3a^2-1$　…… ①

これが点 $(0,\ 0)$ を通るから　　$0=(3a^2-6a)\cdot 0-2a^3+3a^2-1$

よって　　$2a^3-3a^2+1=0$　…… ②

$P(a)=2a^3-3a^2+1$ とすると　　$P(1)=0$

ゆえに，$P(a)$ は $a-1$ で割り切れるから

$$P(a)=(a-1)(2a^2-a-1)=(a-1)^2(2a+1)$$

よって，② から　　$a=1,\ -\dfrac{1}{2}$

$a=1$ のとき，接点の座標は　　$(1,\ -3)$

① から，接線の方程式は　　$y=-3x$

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき，接点の座標は　　$\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{15}{8}\right)$

① から，接線の方程式は　　$y=\dfrac{15}{4}x$

31 曲線 $y=3x^2-5x+8$ 上の点 A $(0,\ 8)$ における法線 [A を通り，A における曲線の接線に垂直な直線] の方程式を求めよ。

解答　$y=\dfrac{1}{5}x+8$

解説

$y=3x^2-5x+8$ を微分すると　　$y'=6x-5$

よって，点 A $(0,\ 8)$ における接線の傾きは　　$6\cdot 0-5=-5$

点 A における法線の傾きを m とすると

$$-5\times m=-1 \qquad \text{ゆえに} \quad m=\frac{1}{5}$$

したがって，求める法線の方程式は　　$y-8=\dfrac{1}{5}(x-0)$

すなわち　　$y=\dfrac{1}{5}x+8$