円の中心･半径クイズ

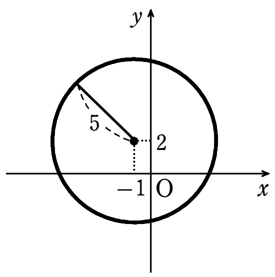
1 **方程式 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ の表す図形**

この方程式を変形すると

$$(x^2+2x)+(y^2-4y)=20$$
$$(x^2+2x+1^2)+(y^2-4y+2^2)=20+1^2+2^2$$

すなわち　$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$

これは，点 $(-1,\ 2)$ を中心とし，半径が 5 の円を表す。



解説

2 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2-2x+4y-11=0$　　(2)　$x^2+y^2+6x-8y+16=0$

解答　(1)　点 $(1,\ -2)$ を中心とし，半径が 4 の円
　　(2)　点 $(-3,\ 4)$ を中心とし，半径が 3 の円

解説

(1)　方程式 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ を変形すると

$$(x^2-2x+1^2)+(y^2+4y+2^2)=11+1^2+2^2$$

すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$

これは，点 $(1,\ -2)$ を中心とし，半径が 4 の円を表す。

(2)　方程式 $x^2+y^2+6x-8y+16=0$ を変形すると

$$(x^2+6x+3^2)+(y^2-8y+4^2)=-16+3^2+4^2$$

すなわち　$(x+3)^2+(y-4)^2=3^2$

これは，点 $(-3,\ 4)$ を中心とし，半径が 3 の円を表す。

3 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+2x-4y+5=0$　　(2)　$x^2+y^2+2x-4y+6=0$

解答　(1)　点 $(-1,\ 2)$　　(2)　方程式が表す図形はない

解説

(1)　方程式 $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ を変形すると

$$(x^2+2x+1^2)+(y^2-4y+2^2)=-5+1^2+2^2$$

すなわち　$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

この方程式を満たす実数 x，y は $x=-1$，$y=2$ だけである。

よって，この方程式は点 $(-1,\ 2)$ を表す。

(2)　方程式 $x^2+y^2+2x-4y+6=0$ を変形すると

$$(x^2+2x+1^2)+(y^2-4y+2^2)=-6+1^2+2^2$$

すなわち　$(x+1)^2+(y-2)^2=-1$

この方程式を満たす実数 x，y は存在しない。

よって，この方程式が表す図形はない。

4 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2-6x+4y+13=0$　　(2)　$x^2+y^2+4x+8y+21=0$

解答　(1)　点 $(3,\ -2)$　　(2)　方程式が表す図形はない

解説

(1)　方程式 $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ を変形すると

$$(x^2-6x+3^2)+(y^2+4y+2^2)=-13+3^2+2^2$$

すなわち　$(x-3)^2+(y+2)^2=0$

この方程式を満たす実数 x，y は $x=3$，$y=-2$ だけである。

よって，この方程式は点 $(3,\ -2)$ を表す。

(2)　方程式 $x^2+y^2+4x+8y+21=0$ を変形すると

$$(x^2+4x+2^2)+(y^2+8y+4^2)=-21+2^2+4^2$$

すなわち　$(x+2)^2+(y+4)^2=-1$

この方程式を満たす実数 x，y は存在しない。

よって，この方程式が表す図形はない。

5 (1)　方程式 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ はどんな図形を表すか。

(2)　方程式 $x^2+y^2+2px+3py+13=0$ が円を表すとき，定数 p の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　中心 $(-2,\ 3)$，半径 3 の円　　(2)　$p<-2$，$2<p$

解説

(1)　$(x^2+4x+2^2)+(y^2-6y+3^2)=-4+2^2+3^2$

ゆえに　$(x+2)^2+(y-3)^2=3^2$

よって　中心 $(-2,\ 3)$，半径 3 の円

(2)　$(x^2+2px+p^2)+\left\{y^2+3py+\left(\dfrac{3}{2}p\right)^2\right\}=-13+p^2+\left(\dfrac{3}{2}p\right)^2$

よって　$(x+p)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}p\right)^2=\dfrac{13}{4}p^2-13$

この方程式が円を表すための条件は　$\dfrac{13}{4}p^2-13>0$

ゆえに　$p^2-4>0$　　したがって　$p<-2$，$2<p$

6 (1)　方程式 $x^2+y^2-2x+6y-6=0$ はどんな図形を表すか。

(2)　方程式 $x^2+y^2-4ax+6ay+14a^2-4a+3=0$ が円を表すとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　中心 $(1,\ -3)$，半径 4 の円　　(2)　$1<a<3$

解説

(1)　方程式を変形すると

$$(x^2-2x+1^2)+(y^2+6y+3^2)=6+1^2+3^2$$

ゆえに　$(x-1)^2+(y+3)^2=4^2$

よって　中心 $(1,\ -3)$，半径 4 の円

(2)　方程式を変形すると

$$(x^2-4ax+4a^2)+(y^2+6ay+9a^2)=-a^2+4a-3$$

したがって　$(x-2a)^2+(y+3a)^2=-(a-1)(a-3)$

この方程式が円を表すための条件は　$-(a-1)(a-3)>0$

よって　$(a-1)(a-3)<0$　　ゆえに　$1<a<3$

7 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+4x-6y=0$　　(2)　$3x^2+3y^2-6x+12y+5=0$

(3)　$x^2+y^2-\sqrt{3}x+y+1=0$　　(4)　$x^2+y^2+6x-2y+15=0$

解答　(1)　中心 $(-2,\ 3)$，半径 $\sqrt{13}$ の円　　(2)　中心 $(1,\ -2)$，半径 $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$ の円

(3)　点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$　　(4)　方程式が表す図形はない

解説

(1)　方程式を変形すると　$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=4+9$

すなわち　$(x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{13})^2$

これは，点 $(-2,\ 3)$ を中心とし，半径が $\sqrt{13}$ の円を表す。

(2)　方程式の両辺を 3 で割ると　$x^2+y^2-2x+4y+\dfrac{5}{3}=0$

これを変形すると　$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=-\dfrac{5}{3}+1+4$

すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{30}}{3}\right)^2$

これは，点 $(1,\ -2)$ を中心とし，半径が $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$ の円を表す。

(3)　方程式を変形すると　$\left(x^2-\sqrt{3}x+\dfrac{3}{4}\right)+\left(y^2+y+\dfrac{1}{4}\right)=-1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}$

すなわち　$\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

この方程式を満たす実数 x，y は $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ だけである。

よって，この方程式は点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ を表す。

(4)　方程式を変形すると　$(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=-15+9+1$

すなわち　$(x+3)^2+(y-1)^2=-5$

この方程式を満たす実数 x，y は存在しない。

よって，この方程式が表す図形はない。

8 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+2x=0$　　(2)　$x^2+y^2-4x+2y-4=0$

(3)　$x^2+y^2-6x+10y+16=0$　　(4)　$2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$

解答　(1)　点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円
　　(2)　点 $(2,\ -1)$ を中心とする半径 3 の円
　　(3)　点 $(3,\ -5)$ を中心とする半径 $3\sqrt{2}$ の円
　　(4)　点 $(1,\ -2)$ を中心とする半径 2 の円

解説

(1)　方程式を変形すると　$(x^2+2x)+y^2=0$

すなわち　$(x+1)^2-1^2+y^2=0$

よって　$(x+1)^2+y^2=1^2$

これは，点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を表す。

(2)　方程式を変形すると

$$(x^2-4x)+(y^2+2y)=4$$

すなわち　$(x-2)^2-2^2+(y+1)^2-1^2=4$

よって　$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

これは，点 $(2,\ -1)$ を中心とする半径 3 の円を表す。

(3)　方程式を変形すると

$$(x^2-6x)+(y^2+10y)=-16$$

すなわち　$(x-3)^2-3^2+(y+5)^2-5^2=-16$

よって　$(x-3)^2+(y+5)^2=(3\sqrt{2})^2$

これは，点 $(3,\ -5)$ を中心とする半径 $3\sqrt{2}$ の円を表す。

(4)　方程式の両辺を 2 で割ると

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0$$

変形すると　$(x^2-2x)+(y^2+4y)=-1$

すなわち　$(x-1)^2-1^2+(y+2)^2-2^2=-1$

よって　$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

これは，点 $(1,\ -2)$ を中心とする半径 2 の円を表す。

9　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2-6x-4y-12=0$　　(2)　$x^2+y^2+2x+y-1=0$

(3)　$x^2+y^2+8x-10y+41=0$　　(4)　$x^2+y^2+12x+6y+50=0$

解答　(1)　点 $(3,\ 2)$ を中心とする半径 5 の円

(2)　点 $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円

(3)　点 $(-4,\ 5)$　　(4)　方程式が表す図形はない

解説

(1)　方程式を変形すると　$(x^2-6x)+(y^2-4y)=12$

すなわち　$(x-3)^2-3^2+(y-2)^2-2^2=12$

よって　$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$

これは，点 $(3,\ 2)$ を中心とする半径 5 の円を表す。

(2)　方程式を変形すると　$(x^2+2x)+(y^2+y)=1$

すなわち　$(x+1)^2-1^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$

よって　$(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

これは，点 $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円を表す。

(3)　方程式を変形すると　$(x^2+8x)+(y^2-10y)=-41$

すなわち　$(x+4)^2-4^2+(y-5)^2-5^2=-41$

よって　$(x+4)^2+(y-5)^2=0$

これは，点 $(-4,\ 5)$ を表す。

参考　A，B が実数のとき　$A^2+B^2=0 \iff A=B=0$

よって　$x+4=y-5=0$

ゆえに　$x=-4,\ y=5$

(4)　方程式を変形すると　$(x^2+12x)+(y^2+6y)=-50$

すなわち　$(x+6)^2-6^2+(y+3)^2-3^2=-50$

よって　$(x+6)^2+(y+3)^2=-5$

この方程式が表す図形はない。

参考　A，B が実数のとき　$A^2+B^2 \geqq 0$

よって，$(x+6)^2+(y+3)^2=-5$ を満たす実数 $x+6$，$y+3$ は存在しない。

10　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+2x=0$　　(2)　$x^2+y^2-6x+10y+16=0$

(3)　$2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$　　(4)　$x^2+y^2-4x+y+2=0$

解答　(1)　点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円

(2)　点 $(3,\ -5)$ を中心とする半径 $3\sqrt{2}$ の円

(3)　点 $(1,\ -2)$ を中心とする半径 2 の円

(4)　点 $\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円

解説

(1)　方程式を変形すると

$(x^2+2x)+y^2=0$　　すなわち　$(x+1)^2-1^2+y^2=0$

よって　$(x+1)^2+y^2=1^2$

これは，点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を表す。

(2)　方程式を変形すると

$(x^2-6x)+(y^2+10y)=-16$　　すなわち　$(x-3)^2-3^2+(y+5)^2-5^2=-16$

よって　$(x-3)^2+(y+5)^2=(3\sqrt{2})^2$

これは，点 $(3,\ -5)$ を中心とする半径 $3\sqrt{2}$ の円を表す。

(3)　方程式の両辺を 2 で割ると　$x^2+y^2-2x+4y+1=0$

変形すると

$(x^2-2x)+(y^2+4y)=-1$　　すなわち　$(x-1)^2-1^2+(y+2)^2-2^2=-1$

よって　$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

これは，点 $(1,\ -2)$ を中心とする半径 2 の円を表す。

(4)　方程式を変形すると

$(x^2-4x)+(y^2+y)=-2$　　すなわち　$(x-2)^2-2^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-2$

よって　$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

これは，点 $\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円を表す。