整式で表される関数の最大・最小クイズ

1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=-2x^3+3x^2+12x \quad (-2\leqq x\leqq 4)$$

解答　$x=2$ で最大値 20，$x=4$ で最小値 -32

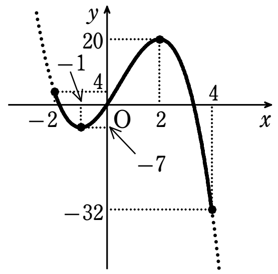
解説

$y'=-6x^2+6x+12$
$\quad=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると

$\quad x=-1,\ 2$

区間 $-2\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は，次のようになる。



x	-2	……	-1	……	2	……	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	↘	極小 -7	↗	極大 20	↘	-32

ゆえに，$x=2$ で最大値 20，$x=4$ で最小値 -32 をとる。

2 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=x^3-3x+4 \quad (-2\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=-2x^3+6x^2-8 \quad (1\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^4-4x^3+12 \quad (-1\leqq x\leqq 4)$

解答　(1)　$x=3$ で最大値 22，$x=-2,\ 1$ で最小値 2

(2)　$x=2$ で最大値 0，$x=3$ で最小値 -8

(3)　$x=-1$ で最大値 17，$x=3$ で最小値 -15

解説

(1)　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm 1$

区間 $-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	……	-1	……	1	……	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	↗	極大 6	↘	極小 2	↗	22

ゆえに，$x=3$ で最大値 22，$x=-2,\ 1$ で最小値 2 をとる。

(2)　$y'=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

区間 $1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	1	……	2	……	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-4	↗	極大 0	↘	-8

ゆえに，$x=2$ で最大値 0，$x=3$ で最小値 -8 をとる。

(3)　$y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 3$

区間 $-1\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	……	0	……	3	……	4
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	17	↘	12	↘	極小 -15	↗	12

ゆえに，$x=-1$ で最大値 17，$x=3$ で最小値 -15 をとる。

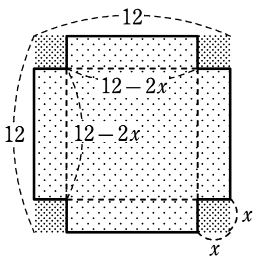
3 1 辺が 12 cm の正方形の厚紙の四隅から，合同な正方形を切り取った残りで，ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺を何 cm にすればよいか。

解答　2 cm

解説

切り取る正方形の 1 辺を x cm，箱の容積を V cm^3 とすると

$V=(12-2x)^2x$
$\quad=4(x^3-12x^2+36x)$



また，箱が作れるためには

$\quad x>0,\ 12-2x>0$

すなわち　$0<x<6$

V を x で微分すると

$V'=4(3x^2-24x+36)$
$\quad=12(x-2)(x-6)$

$0<x<6$ において $V'=0$ となるのは $x=2$ のときである。

よって，$0<x<6$ における V の増減表は，次のようになる。

x	0	……	2	……	6
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

ゆえに，$x=2$ で，V は最大である。

したがって，切り取る正方形の 1 辺を 2 cm にすればよい。

4 底面の直径と高さの和が 18 cm である直円柱の体積が最大となるのは，高さが何 cm のときか。

解答　6 cm

解説

直円柱の底面の半径を r cm，高さを h cm，体積を V cm^3 とすると，$r>0$，$h>0$ で

$\quad V=\pi r^2h$　……①

$\quad 2r+h=18$　……②

② から　$h=2(9-r)$

これを ① に代入して

$\quad V=\pi r^2\cdot 2(9-r)=2\pi(-r^3+9r^2)$

また，$h>0$ より　$2(9-r)>0$

ゆえに　$r<9$

よって　$0<r<9$

$$\frac{dV}{dr}=2\pi(-3r^2+18r)=-6\pi r(r-6)$$

$0<r<9$ において，$\dfrac{dV}{dr}=0$ となるのは $r=6$ のときである。

よって，$0<r<9$ における V の増減表は，次のようになる。

r	0	……	6	……	9
$\dfrac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

ゆえに，$r=6$ で，V は最大となる。

このとき $h=2(9-6)=6$ であるから，体積が最大となるのは高さが 6 cm のときである。

5 次の関数の最大値と最小値を求めよ。[各 25 点]

(1)　$y=-x^3+3x^2-2 \quad (-2\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=x^3-3x+2 \quad (-2\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると

$\quad x=0,\ 2$

$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，右のようになる。

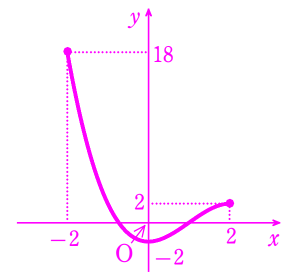
よって，

$\quad x=-2$ で最大値 18，

$\quad x=0$ で最小値 -2

をとる。

x	-2	…	0	…	2
y'		$-$	0	$+$	
y	18	↘	極小 -2	↗	2



(2)　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると

$\quad x=\pm 1$

$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，右のようになる。

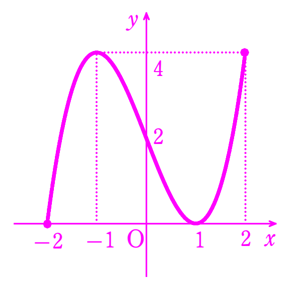
よって，

$\quad x=-1,\ 2$ で最大値 4，

$\quad x=-2,\ 1$ で最小値 0

をとる。

x	-2	…	-1	…	1	…	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	4



解説

(1)　$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると

$\quad x=0,\ 2$

$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，右のようになる。

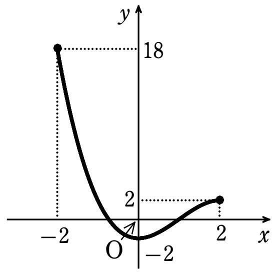
x	-2	…	0	…	2
y'		$-$	0	$+$	
y	18	↘	極小 -2	↗	2

よって，

$x=-2$ で最大値 18,

$x=0$ で最小値 -2

をとる。



(2) $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると

$x=\pm1$

$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，右のようになる。

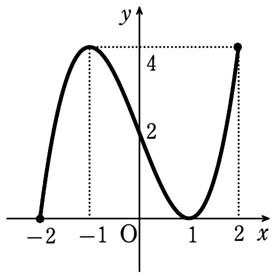
x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	4

よって，

$x=-1,\ 2$ で最大値 4,

$x=-2,\ 1$ で最小値 0

をとる。



6 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=x^3-6x^2+10\ (-2\leqq x\leqq 3)$　　(2) $y=3x^4-4x^3-12x^2\ (-1\leqq x\leqq 3)$

解答 (1) $x=0$ で最大値 10，$x=-2$ で最小値 -22

(2) $x=3$ で最大値 27，$x=2$ で最小値 -32

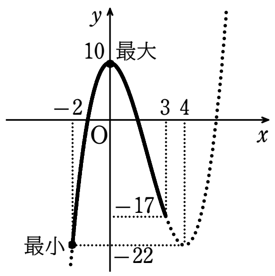
解説

(1) $y'=3x^2-12x=3x(x-4)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 4$

区間 $-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-22	↗	極大 10	↘	-17



よって　$x=0$ で最大値 10,

$x=-2$ で最小値 -22

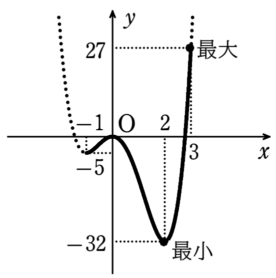
(2) $y'=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$

$=12x(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ 2$

区間 $-1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	↗	極大 0	↘	極小 -32	↗	27



よって　$x=3$ で最大値 27，$x=2$ で最小値 -32

7 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=-2x^3+15x^2-36x\ (1\leqq x\leqq 3)$

(2) $y=-x^4+4x^3+12x^2-32x\ (-2\leqq x\leqq 4)$

解答 (1) $x=1$ で最大値 -23，$x=2$ で最小値 -28

(2) $x=-2,\ 4$ で最大値 64；$x=1$ で最小値 -17

解説

(1) $y'=-6x^2+30x-36=-6(x-2)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=2,\ 3$

区間 $1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，右のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	0
y	-23	↘	極小 -28	↗	-27

よって　$x=1$ で最大値 -23,

$x=2$ で最小値 -28

(2) $y'=-4x^3+12x^2+24x-32=-4(x^3-3x^2-6x+8)$

$=-4(x-1)(x+2)(x-4)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ -2,\ 4$

区間 $-2\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は，右のようになる。

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	4
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	64	↘	極小 -17	↗	64

よって　$x=-2,\ 4$ で最大値 64,

$x=1$ で最小値 -17

8 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=x^3-9x\ (-3\leqq x\leqq 3)$　　(2) $y=x^3-6x^2+9x\ (-1\leqq x\leqq 2)$

(3) $y=-x^3-3x^2+5\ (-3\leqq x\leqq 2)$　　(4) $y=-2x^3+3x^2-7\ (-2\leqq x\leqq 1)$

(5) $y=x^4-8x^2\ (-1\leqq x\leqq 3)$　　(6) $y=3x^4-2x^3-3x^2\ (-2\leqq x\leqq 2)$

解答 (1) $x=-\sqrt{3}$ で最大値 $6\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$ で最小値 $-6\sqrt{3}$

(2) $x=1$ で最大値 4，$x=-1$ で最小値 -16

(3) $x=-3,\ 0$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -15

(4) $x=-2$ で最大値 21，$x=0$ で最小値 -7

(5) $x=3$ で最大値 9，$x=2$ で最小値 -16

(6) $x=-2$ で最大値 52，$x=1$ で最小値 -2

解説

(1) $y'=3x^2-9=3(x^2-3)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm\sqrt{3}$

$-3\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$6\sqrt{3}$	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	0

よって，$x=-\sqrt{3}$ で最大値 $6\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$ で最小値 $-6\sqrt{3}$ をとる。

(2) $y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	↗	4	↘	2

よって，$x=1$ で最大値 4，$x=-1$ で最小値 -16 をとる。

(3) $y'=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ -2$

$-3\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	5	↘	1	↗	5	↘	-15

よって，$x=-3,\ 0$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -15 をとる。

(4) $y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1$

$-2\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	21	↘	-7	↗	-6

よって，$x=-2$ で最大値 21，$x=0$ で最小値 -7 をとる。

(5) $y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ \pm2$

$-1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-7	↗	0	↘	-16	↗	9

よって，$x=3$ で最大値 9，$x=2$ で最小値 -16 をとる。

(6) $y'=12x^3-6x^2-6x=6x(2x^2-x-1)=6x(x-1)(2x+1)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}$

$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	52	↘	$-\frac{5}{16}$	↗	0	↘	-2	↗	20

よって，$x=-2$ で最大値 52，$x=1$ で最小値 -2 をとる。

9 O を原点とする。放物線の一部 $y=3-x^2\ (y\geqq0)$ と x 軸に平行な直線が異なる 2 点 A，B で交わるとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの点 A，B の座標を求めよ。

解答 最大値 2；$(-1,\ 2)$，$(1,\ 2)$

解説

2点A，Bは y 軸に関して対称であるから

A$(-x,\ 3-x^2)$，B$(x,\ 3-x^2)$ $[0<x<\sqrt{3}]$

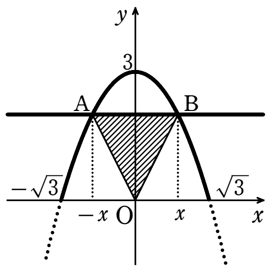
とおける。

△OABの面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x(3-x^2)=-x^3+3x$$

よって　$S'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$0<x<\sqrt{3}$ において $S'=0$ となるのは $x=1$ のときである。



よって，$0<x<\sqrt{3}$ における S の増減表は，次のようになる。

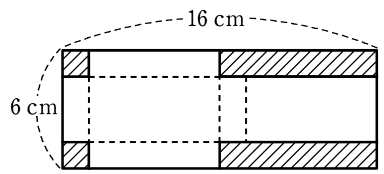
x	0	…	1	…	$\sqrt{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	2	↘	

ゆえに，S は $x=1$ で最大値 2 をとる。

したがって，面積の最大値は　2

A，Bの座標は　$(-1,\ 2)$，$(1,\ 2)$

10 辺の長さが 6 cm と 16 cm の長方形のボール紙がある。図の斜線部分を切り取り，点線に沿って折り曲げてふたつきの箱を作る。この箱の最大容積を求めよ。



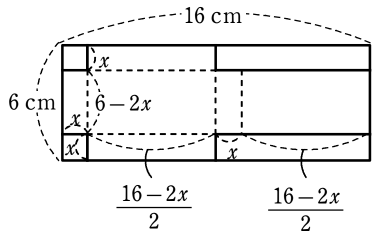
解答　$\frac{800}{27}$ cm^3

解説

箱の高さを x cm，容積を V cm^3 とすると

$$V=x(6-2x)\frac{16-2x}{2}=2x(x-3)(x-8)$$

$$=2(x^3-11x^2+24x)$$



ただし，$x>0$，$6-2x>0$，$\frac{16-2x}{2}>0$ から

$0<x<3$

$V'=2(3x^2-22x+24)=2(x-6)(3x-4)$

$0<x<3$ において $V'=0$ となるのは $x=\frac{4}{3}$ のときである。

よって，$0<x<3$ における V の増減表は，次のようになる。

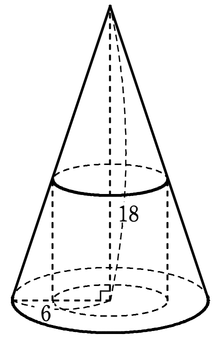
x	0	…	$\frac{4}{3}$	…	3
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

ゆえに，V は $x=\frac{4}{3}$ で最大となり，その最大値は

$$2\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-3\right)\left(\frac{4}{3}-8\right)=2\cdot\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{20}{3}\right)=\frac{800}{27}$$

ゆえに，箱の最大容積は　$\frac{800}{27}$ cm^3

11 底面の半径 6，高さ 18 の直円錐に，右の図のように直円柱が内接している。この直円柱のうちで，体積が最大であるものの底面の半径と高さを求めよ。



解答　底面の半径 4，高さ 6

解説

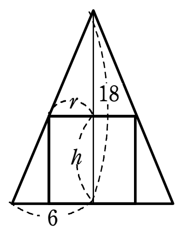
直円柱の底面の半径を r，高さを h とすると

$6:r=18:(18-h)$

よって　$18r=6(18-h)$

ゆえに　$h=18-3r$　……①

また　$0<r<6$



直円柱の体積を V とすると

$V=\pi r^2h=\pi r^2(18-3r)=3\pi(-r^3+6r^2)$

よって　$\frac{dV}{dr}=3\pi(-3r^2+12r)=-9\pi r(r-4)$

$0<r<6$ において $\frac{dV}{dr}=0$ となるのは $r=4$ のときである。

よって，$0<r<6$ における V の増減表は，次のようになる。

r	0	…	4	…	6
$\frac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$	
V		↗	96π	↘	

ゆえに，$r=4$ で，V は最大である。

① から，$r=4$ のとき　$h=6$

したがって，V が最大となるときの直円柱の底面の半径は 4，高さは 6 である。

12 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=x^3+3x^2-9x$　$(-4\leqq x\leqq 3)$

(2) $y=-x^3-3x^2+5$　$(-4\leqq x\leqq 2)$

(3) $y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

(4) $y=x^4-8x^2+2$　$(-1\leqq x\leqq 3)$

(5) $y=-3x^4-2x^3+3x^2$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

解答　(1) $x=\pm 3$ で最大値 27，$x=1$ で最小値 -5

(2) $x=-4$ で最大値 21，$x=2$ で最小値 -15

(3) $x=1$ で最大値 10，$x=-1$ で最小値 -10

(4) $x=3$ で最大値 11，$x=2$ で最小値 -14

(5) $x=-1$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 -52

解説

(1) $y'=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

$-4\leqq x\leqq 3$ において，y の増減表は，次のようになる。

x	-4	…	-3	…	1	…	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	20	↗	27	↘	-5	↗	27

よって，この関数は $x=\pm 3$ で最大値 27，$x=1$ で最小値 -5 をとる。

(2) $y'=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=-2,\ 0$

$-4\leqq x\leqq 2$ において，y の増減表は，次のようになる。

x	-4	…	-2	…	0	…	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	21	↘	1	↗	5	↘	-15

よって，この関数は $x=-4$ で最大値 21，$x=2$ で最小値 -15 をとる。

(3) $y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

$-2\leqq x\leqq 1$ において，y の増減表は，次のようになる。

x	-2	…	-1	…	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-10	↗	10

よって，この関数は $x=1$ で最大値 10，$x=-1$ で最小値 -10 をとる。

(4) $y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ \pm 2$

$-1\leqq x\leqq 3$ において，y の増減表は，次のようになる。

x	-1	…	0	…	2	…	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	↗	2	↘	-14	↗	11

よって，この関数は $x=3$ で最大値 11，$x=2$ で最小値 -14 をとる。

別解　$x^2=t$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 3$ から　$0\leqq t\leqq 9$　……①

y を t で表すと

$y=t^2-8t+2=(t-4)^2-14$

① の範囲において，y は

$t=9$ で最大値 11，$t=4$ で最小値 -14

をとる。

また，$-1\leqq x\leqq 3$ であるから，

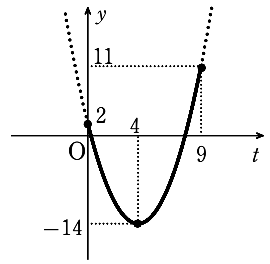
$t=9$ のとき　$x=3$

$t=4$ のとき　$x=2$

よって，この関数は

$x=3$ で最大値 11，$x=2$ で最小値 -14

をとる。



(5) $y'=-12x^3-6x^2+6x=-6x(2x^2+x-1)=-6x(x+1)(2x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ \frac{1}{2}$

$-2\leqq x\leqq 2$ において，y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-20	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘	-52

よって，この関数は $x=-1$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 -52 をとる。

13 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=2\sin^3\theta-3\sin^2\theta$　　(2) $y=\cos2\theta-2\cos^3\theta$

解答 (1) $\theta=0,\ \pi$ で最大値 0；$\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 -5

(2) $\theta=\pi$ で最大値 3；$\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1

解説

(1) $\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq t\leqq1$ ……①

y を t で表すと　$y=2t^3-3t^2$

$f(t)=2t^3-3t^2$ とすると　$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=0,\ 1$

① の範囲において，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	-5	↗	0	↘	-1

よって，$f(t)$ は ① の範囲において，

$t=0$ で最大値 0，$t=-1$ で最小値 -5

をとる。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=0$ のとき　$\theta=0,\ \pi$

$t=-1$ のとき　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

したがって　$\theta=0,\ \pi$ で最大値 0，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 -5

(2) $y=(2\cos^2\theta-1)-2\cos^3\theta=-2\cos^3\theta+2\cos^2\theta-1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq t\leqq1$ ……①

y を t で表すと　$y=-2t^3+2t^2-1$

$f(t)=-2t^3+2t^2-1$ とすると　$f'(t)=-6t^2+4t=-2t(3t-2)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=0,\ \frac{2}{3}$

① の範囲において，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	↘	-1	↗	$-\frac{19}{27}$	↘	-1

よって，$f(t)$ は ① の範囲において，

$t=-1$ で最大値 3，$t=0,\ 1$ で最小値 -1

をとる。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=-1$ のとき　$\theta=\pi$

$t=0$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$t=1$ のとき　$\theta=0$

したがって　$\theta=\pi$ で最大値 3，$\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1

14 関数 $y=8^x-2^{2x+1}-2^{x+2}+3\ (0\leqq x\leqq2)$ の最小値を求めよ。

解答 $x=1$ で最小値 -5

解説

$y=2^{3x}-2\cdot2^{2x}-2^2\cdot2^x+3=(2^x)^3-2\cdot(2^x)^2-4\cdot2^x+3$

$2^x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq2$ から　$2^0\leqq2^x\leqq2^2$

よって　$1\leqq t\leqq4$ ……①

y を t で表すと　$y=t^3-2t^2-4t+3$

$f(t)=t^3-2t^2-4t+3$ とおくと　$f'(t)=3t^2-4t-4=(t-2)(3t+2)$

$f'(t)=0$ とすると，① から　$t=2$

① の範囲において，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小 -5	↗	

よって，① の範囲において，$f(t)$ は $t=2$ で最小値 -5 をとる。

$t=2$ のとき　$2^x=2$　　よって　$x=1$

したがって，y は $x=1$ で最小値 -5 をとる。

15 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=-2x^3+3x^2+12x-3\ (-2\leqq x\leqq1)$

(2) $y=x^4-2x^2-3\ (-1\leqq x\leqq2)$

解答 (1) $x=1$ で最大値 10，$x=-1$ で最小値 -10

(2) $x=2$ で最大値 5；$x=-1,\ 1$ で最小値 -4

解説

(1) 関数 $y=-2x^3+3x^2+12x-3$ について

$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

y の増減表は，右のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-10	↗	10

よって，この関数は

$x=1$ で最大値 10 をとり，$x=-1$ で最小値 -10

をとる。

(2) 関数 $y=x^4-2x^2-3$ について

$y'=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ 1$

y の増減表は，右のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-4	↗	-3	↘	-4	↗	5

よって，この関数は

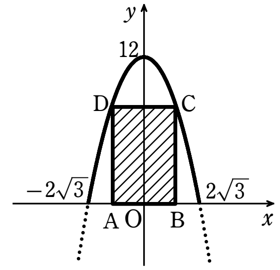
$x=2$ で 最大値 5 をとり，$x=-1,\ 1$ で最小値 -4

をとる。

16 曲線 $y=-x^2+12\ (-2\sqrt{3}\leqq x\leqq2\sqrt{3})$ と x 軸で囲まれた図形に内接する長方形 ABCD の面積の最大値を求めよ。ただし，2 点 A，B は x 軸上にあるものとする。

解答 最大値 32

解説



放物線 $y=-x^2+12$ は y 軸に関して対称であるから，

$0<x<2\sqrt{3}$ として

A $(-x,\ 0)$，B $(x,\ 0)$，

C $(x,\ -x^2+12)$，D $(-x,\ -x^2+12)$

とおける。

よって，長方形 ABCD の面積を S とすると

$S=2x(-x^2+12)$

$=-2x^3+24x\ \ (0<x<2\sqrt{3})$

$S'=-6x^2+24=-6(x+2)(x-2)$

$S'=0$ とすると　$x=\pm2$

S の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	32	↘	

よって，S は $x=2$ のとき最大値 32 をとる。

したがって，面積の最大値は　32

参考 S が最大になるときの長方形の 4 頂点の座標は

$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(2,\ 8)$，$(-2,\ 8)$

17 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=x^3-12x\ \ (-3\leqq x\leqq3)$　　(2) $y=x^3-6x^2+9x\ (-1\leqq x\leqq2)$

(3) $y=x^3-3x^2+5\ (0\leqq x\leqq3)$　　(4) $y=-2x^3+3x^2+12x\ \ (-2\leqq x\leqq4)$

解答 (1) $x=-2$ で最大値 16，$x=2$ で最小値 -16

(2) $x=1$ で最大値 4，$x=-1$ で最小値 -16

(3) $x=0,\ 3$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 1

(4) $x=2$ で最大値 20，$x=4$ で最小値 -32

解説

(1) $y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-2,\ 2$

y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	↗	16	↘	-16	↗	-9

よって，この関数は

$x=-2$ で最大値 16 をとり，

$x=2$ で最小値 -16 をとる。

(2) $y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	↗	4	↘	2

よって，この関数は

$x=1$ で最大値 4 をとり，

$x=-1$ で最小値 -16 をとる。

(3)　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

y の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	
y	5	↘	1	↗	5

よって，この関数は

$x=0,\ 3$ で最大値 5 をとり，

$x=2$ で最小値 1 をとる。

(4)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x^2-x-2)=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	↘	-7	↗	20	↘	-32

よって，この関数は

$x=2$ で最大値 20 をとり，

$x=4$ で最小値 -32 をとる。

18 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=-x^3+3x^2\quad(-1\leqq x\leqq 4)$$

解答　$x=-1,\ 2$ で最大値 4，　$x=4$ で最小値 -16

解説

$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

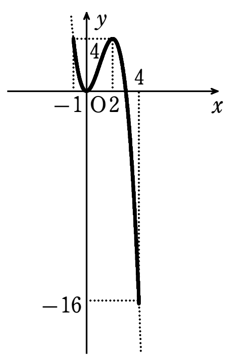
y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	4	↘	極小 0	↗	極大 4	↘	-16

よって，この関数は

$x=-1,\ 2$ で最大値 4 をとり，

$x=4$ で最小値 -16 をとる。



19 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=x^3+3x^2\quad(-3\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=-x^3+x^2+x\quad(0\leqq x\leqq 2)$

(3)　$y=x^4-2x^3+3\quad(-1\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$x=2$ で最大値 20，　$x=-3,\ 0$ で最小値 0

(2)　$x=1$ で最大値 1，　$x=2$ で最小値 -2

(3)　$x=-1$ で最大値 6，　$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $\frac{21}{16}$

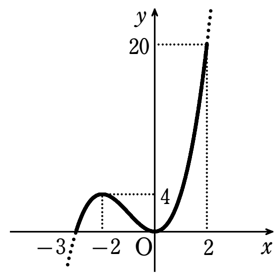
解説

(1)　$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=-2,\ 0$

y の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	20



よって，この関数は

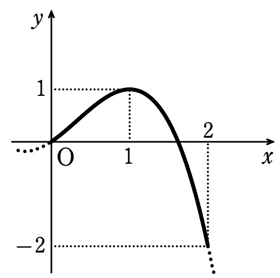
$x=2$ で最大値 20 をとり，$x=-3,\ 0$ で最小値 0 をとる。

(2)　$y'=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$

$0<x<2$ の範囲で $y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 1	↘	-2



よって，この関数は

$x=1$ で最大値 1 をとり，$x=2$ で最小値 -2 をとる。

(3)　$y'=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ \frac{3}{2}$

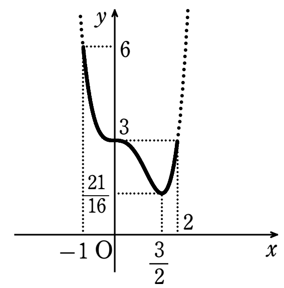
y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	6	↘	3	↘	極小 $\frac{21}{16}$	↗	3

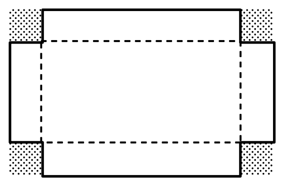
よって，この関数は

$x=-1$ で最大値 6 をとり，

$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $\frac{21}{16}$ をとる。



20 縦 10 cm，横 16 cm の長方形の厚紙の四隅から，合同な正方形を右の図のように切り取った残りで，ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか。



解答　2 cm

解説

切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，このときの箱の容積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とする。

箱が作れるためには，$x>0$，$10-2x>0$，$16-2x>0$ であるから

$0<x<5$　……①

このとき

$y=x(10-2x)(16-2x)=4(x^3-13x^2+40x)$

$y'=4(3x^2-26x+40)=4(x-2)(3x-20)$

① の範囲において，$y'=0$ となるのは，$x=2$ のときであり，y の増減表は次のようになる。

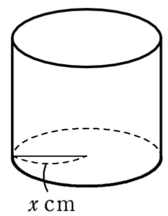
x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

したがって，y は $x=2$ で最大になる。　　答　2 cm

21 底面の直径と高さの和が 18 cm である直円柱の体積を $V\,\mathrm{cm}^3$ とする。

(1)　底面の半径を x cm とするとき，V を x の式で表せ。

(2)　V が最大となるのは，円柱の高さが何 cm のときか。



解答　(1)　$V=\pi x^2(18-2x)\ (0<x<9)$　　(2)　6 cm

解説

(1)　直円柱の高さは $(18-2x)$ cm である。

$x>0$，$18-2x>0$ から　$0<x<9$　……①

このとき，体積 V は　$V=\pi x^2\times(18-2x)$

よって　$V=\pi x^2(18-2x)$　$(0<x<9)$

(2)　$V=-2\pi x^3+18\pi x^2$ より

$V'=-6\pi x^2+36\pi x=-6\pi x(x-6)$

① の範囲において，V の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

したがって，V は $x=6$ で最大となる。

このとき，円柱の高さは　$18-2\cdot 6=6$ (cm)

22 次の関数の最大値と最小値を求めよ。　[15点×2＝30点]

(1)　$y=-2x^3+3x^2+12x\quad(-3\leqq x\leqq 1)$　　(2)　$y=x^4-2x^2+5\quad(-2\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	45	↘	-7	↗	13

よって　$x=-3$ で最大値 45，$x=-1$ で最小値 -7

(2)　$y'=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	13	↘	4	↗	5	↘	4	↗	13

よって　　$x=\pm 2$ で最大値 13，$x=\pm 1$ で最小値 4

(解説)

(1)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	45	↘	-7	↗	13

よって　　$x=-3$ で最大値 45，$x=-1$ で最小値 -7

(2)　$y'=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	13	↘	4	↗	5	↘	4	↗	13

よって　　$x=\pm 2$ で最大値 13，$x=\pm 1$ で最小値 4