三角不等式クイズ

1 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta>\frac{1}{2}$ を解け。

解答 $0\leqq\theta<\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

解説

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

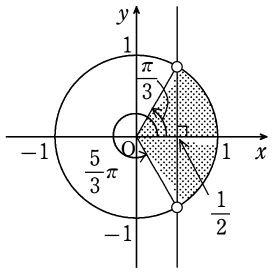
$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$$



2 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\sin\theta<-\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta-1\geqq0$

解答 (1) $\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$　(2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$，$\frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

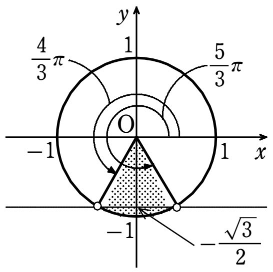
解説

(1) 不等式を変形すると　$\sin\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は　$\theta=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

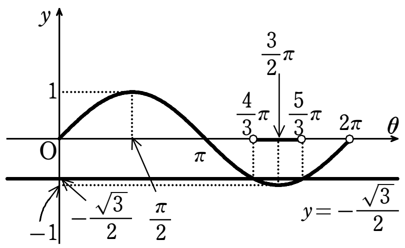
$$\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$$



別解 $\sin\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ から，求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から

$$\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$$



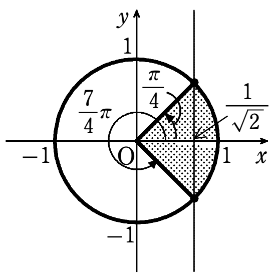
(2) 不等式を変形すると　$\cos\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

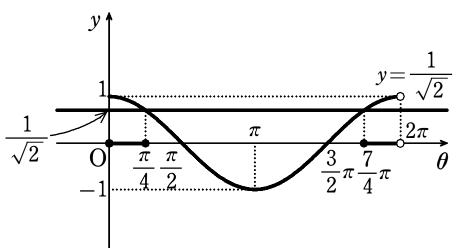
$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



別解 $\cos\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ から，求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より上側（交点を含む）にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



3 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta<\sqrt{3}$ を解け。

解答 $0\leqq\theta<\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=\sqrt{3}$ を満たす θ の値は

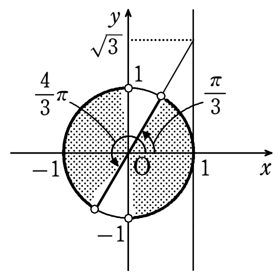
$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$



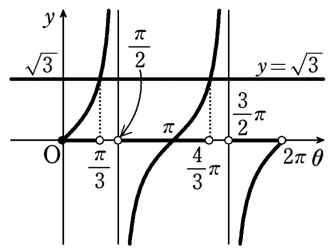
別解 求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\sqrt{3}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{4}{3}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$



4 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta\geqq1$ を解け。

解答 $\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi$

解説

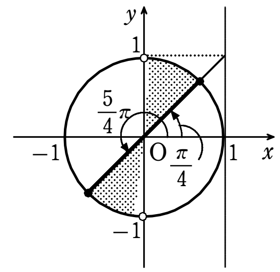
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=1$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{2},$$

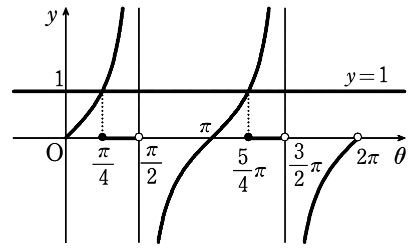
$$\frac{5}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi$$



別解 求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=1$ より上側（交点を含む）にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi$$



5 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{3}=0$　　(2) $\sqrt{3}\tan\theta+1=0$

(3) $2\sin\theta\leqq\sqrt{3}$　　(4) $\tan\theta+\sqrt{3}\leqq0$

(5) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$　　(6) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解答 (1) $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$　(2) $\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

(4) $\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$　(5) $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$

(6) $0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi$，$\frac{11}{12}\pi<\theta<2\pi$

解説

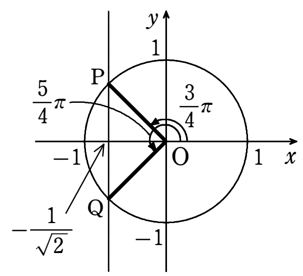
(1) 与えられた方程式を変形すると

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

単位円周上で，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，図の 2 点 P，Q で，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$



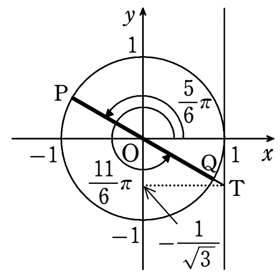
(2) 与えられた方程式を変形すると

$$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

点 $\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を T とする。直線 OT と単位円との交点は，図の 2 点 P，Q で，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$



(3) 与えられた不等式を変形すると

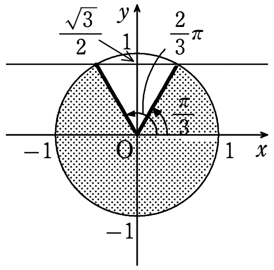
$\sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

を満たす θ の値は　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$



(4) 与えられた不等式を変形すると

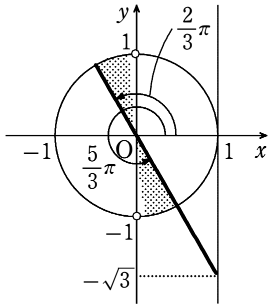
$\tan\theta\leqq-\sqrt{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で　$\tan\theta=-\sqrt{3}$

を満たす θ の値は　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$



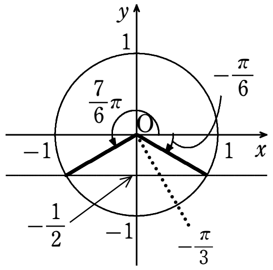
(5) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

であるから，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

より　$\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi$



(6) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

この範囲で $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす $\theta+\frac{\pi}{4}$

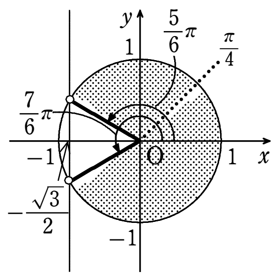
の値は　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

よって，図から，不等式を満たす $\theta+\frac{\pi}{4}$ の値の範囲は

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

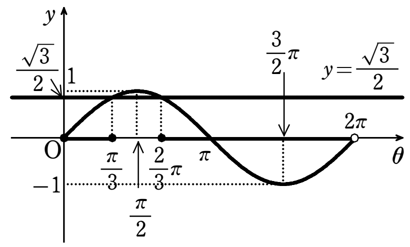
ゆえに，求める θ の値の範囲は

$0\leqq\theta<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi<\theta<2\pi$



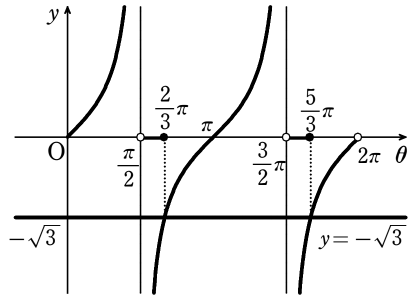
別解 (3) $\sin\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ から，求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側（交点を含む）にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$



(4) $\tan\theta\leqq-\sqrt{3}$ から，求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\sqrt{3}$ より下側（交点を含む）にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から　$\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$



6 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。[各 10 点]

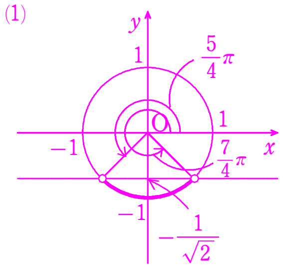
(1) $\sin\theta<-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\tan\theta-\sqrt{3}>0$

解答 (1) 図から，求める θ の値の範囲は　$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$

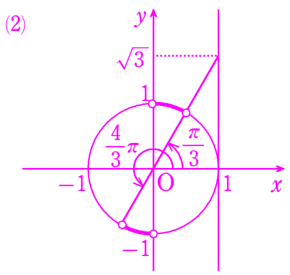
(2) $\tan\theta-\sqrt{3}>0$ から　$\tan\theta>\sqrt{3}$

図から，求める θ の値の範囲は　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

(1)



(2)



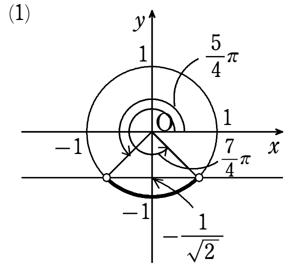
解説

(1) 図から，求める θ の値の範囲は　$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$

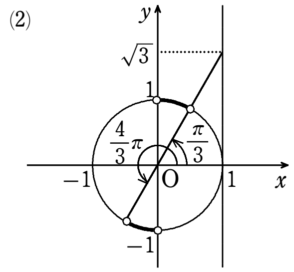
(2) $\tan\theta-\sqrt{3}>0$ から　$\tan\theta>\sqrt{3}$

図から，求める θ の値の範囲は　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

(1)



(2)



7 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。

解答　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{7}{4}\pi$

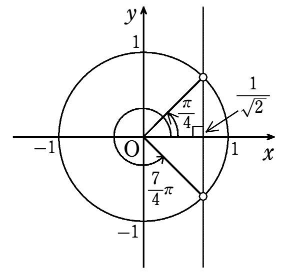
解説

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は

$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，右の図から

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{7}{4}\pi$



8 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\cos\theta\leqq\frac{1}{2}$　　(2) $\sin\theta>\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\sin\theta<\frac{1}{2}$

解答 (1) $\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$　(2) $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$　(3) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$

解説

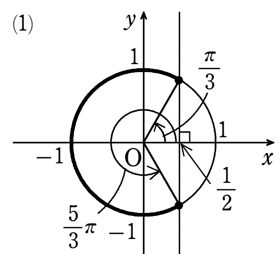
(1) $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ となる θ は　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

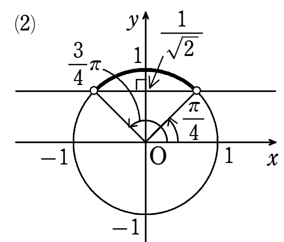
(2) $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$

(1)



(2)



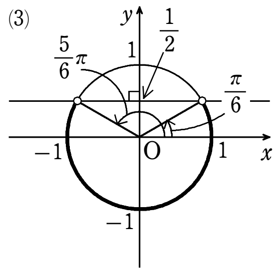
(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \frac{1}{2}$ となる θ は

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

よって，不等式の解は，右の図から

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

(3)



9 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta > 1$ を解け。

解答 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

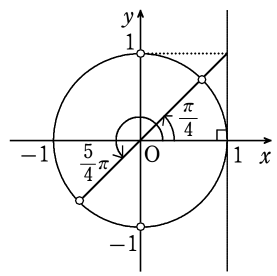
解説

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = 1$ となる θ は

$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

よって，不等式の解は，右の図から

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$



10 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$ を解け。

解答 $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

解説

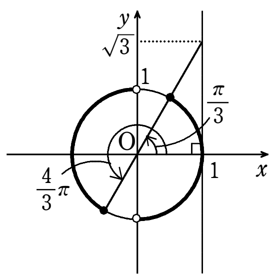
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ となる θ は

$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

よって，不等式の解は，右の図から

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi,$

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$



11 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$　　(2) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

(3) $2\sin\theta + \sqrt{3} < 0$　　(4) $\tan\theta + \sqrt{3} \leqq 0$

(5) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(6) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

解答 (1) $\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$　(2) $\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(3) $\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(4) $\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$　(5) $\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$

(6) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

解説

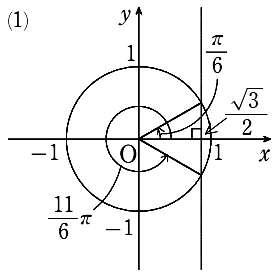
(1) 方程式を変形すると　$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，求める θ は　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

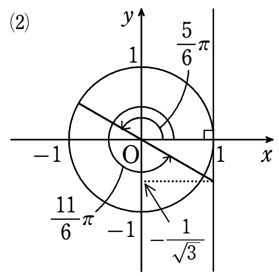
(2) 方程式を変形すると　$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，求める θ は　$\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(1)



(2)



(3) 不等式を変形すると　$\sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　$\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

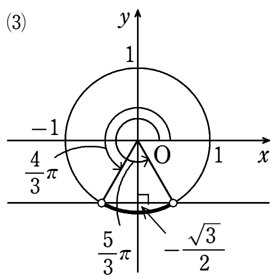
よって，不等式の解は　$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(4) 不等式を変形すると　$\tan\theta \leqq -\sqrt{3}$

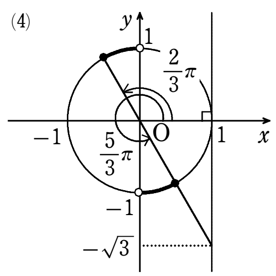
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -\sqrt{3}$ となる θ は　$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は　$\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$

(3)



(4)



(5) $\theta + \frac{\pi}{3} = t$ とおくと　$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

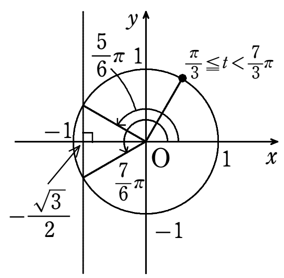
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{7}{3}\pi$

であるから，この範囲で ① を解くと

$t = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

すなわち　$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

よって　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$



(6) (5) より，不等式の解は　$\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi < t < \frac{7}{3}\pi$

すなわち　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

12 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta < \frac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\tan\theta > -\sqrt{3}$

解答 (1) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$　(2) $\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi$

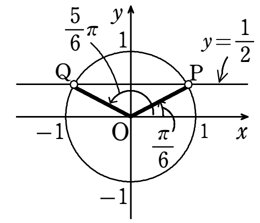
(3) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

解説

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の解は

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

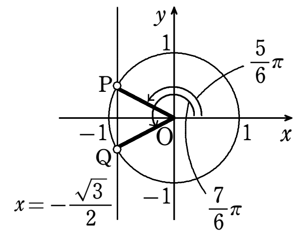
よって　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$



(2) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の解は

$\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$

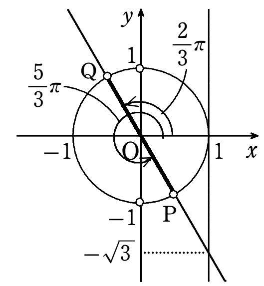
よって　$\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi$



(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の解は

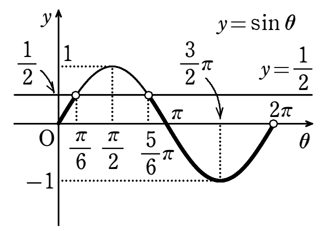
$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

よって　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

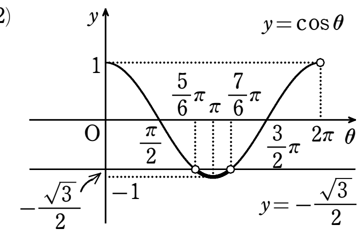


参考 グラフで考えると，次のようになる。

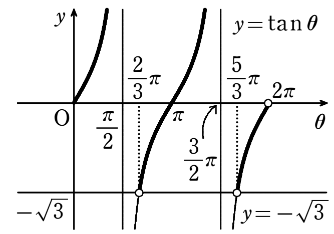
(1)



(2)



(3)



$\boxed{13}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta > \frac{1}{2}$　(2) $\cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan\theta < -\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{2}\sin\theta \leqq -1$　(5) $2\cos\theta + \sqrt{2} > 0$　(6) $\tan\theta + 1 \geqq 0$

解答　(1) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$　(2) $\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$　(3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(4) $\frac{5}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{4}\pi$　(5) $0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$

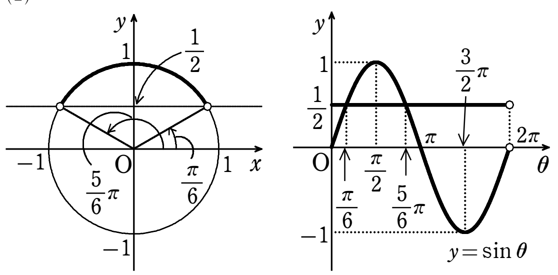
(6) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$

解説

単位円またはグラフを利用する。

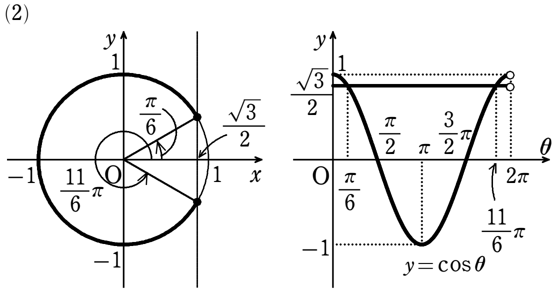
(1) 図から，解は　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

(1)



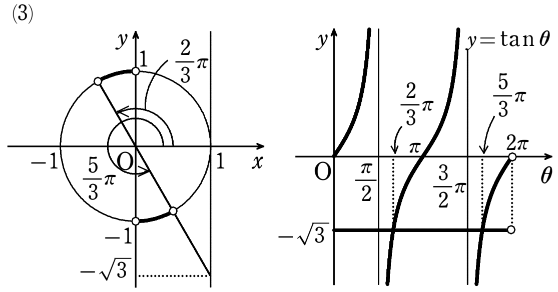
(2) 図から，解は　$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

(2)



(3) 図から，解は　$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

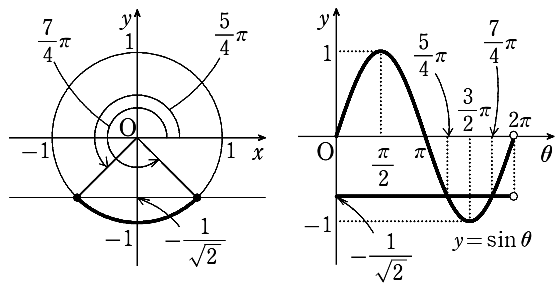
(3)



(4) $\sqrt{2}\sin\theta \leqq -1$ から　$\sin\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

図から，解は　$\frac{5}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{4}\pi$

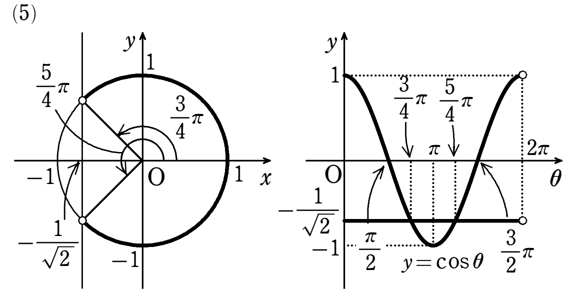
(4)



(5) $2\cos\theta + \sqrt{2} > 0$ から　$\cos\theta > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

図から，解は　$0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi$

(5)

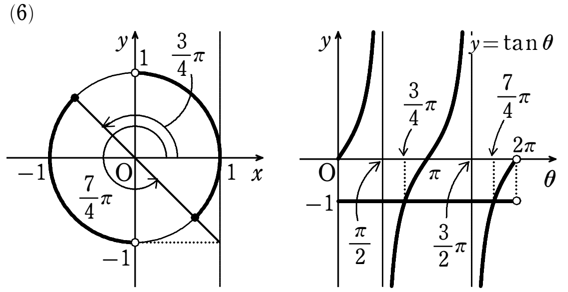


(6) $\tan\theta + 1 \geqq 0$ から　$\tan\theta \geqq -1$

図から，解は

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$

(6)



$\boxed{14}$ θ の範囲に制限がないとき，次の不等式を解け。

(1) $2\sin\theta \geqq \sqrt{3}$　(2) $2\cos\theta < \sqrt{2}$　(3) $\sqrt{3}\tan\theta > 1$

解答　n は整数とする。

(1) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$　(2) $\frac{\pi}{4} + 2n\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$

(3) $\frac{\pi}{6} + n\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + n\pi$

解説

n は整数とする。

(1) $2\sin\theta \geqq \sqrt{3}$ から　$\sin\theta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，これを解くと　$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$

関数 $y = \sin\theta$ の周期は 2π であるから，θ の範囲に制限がないときの不等式の解は

$\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$

(2) $2\cos\theta < \sqrt{2}$ から　$\cos\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，これを解くと　$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7}{4}\pi$

関数 $y = \cos\theta$ の周期は 2π であるから，θ の範囲に制限がないときの不等式の解は

$\frac{\pi}{4} + 2n\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$

(3) $\sqrt{3}\tan\theta > 1$ から　$\tan\theta > \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，これを解くと　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$

関数 $y = \tan\theta$ の周期は π であるから，θ の範囲に制限がないときの不等式の解は

$\frac{\pi}{6} + n\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + n\pi$

$\boxed{15}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$　(2) $2\cos\theta - \sqrt{3} < 0$　(3) $\tan\theta + 1 \geqq 0$

解答　(1) $0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$　(2) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$

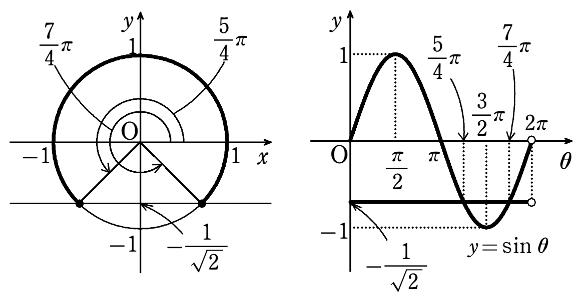
(3) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$

解説

(1) $\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$ から　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は　$\theta = \frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$

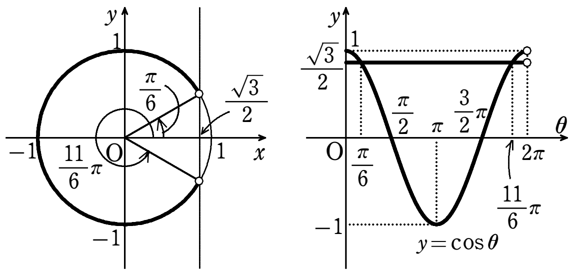
図から，不等式の解は　$0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$



(2) $2\cos\theta - \sqrt{3} < 0$ から　$\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は　$\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$

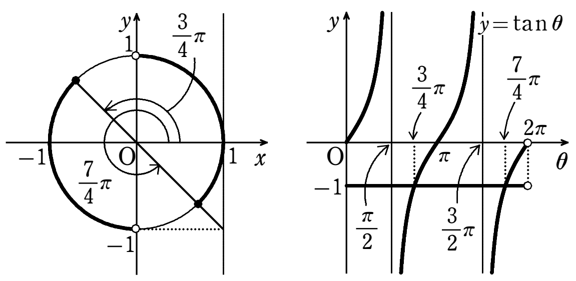
図から，不等式の解は　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$



(3)　$\tan\theta+1\geqq 0$ から　　$\tan\theta\geqq -1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\tan\theta=-1$ を満たす θ の値は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$



16 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$2\sin\theta+\sqrt{2}<0$　(4)　$2\cos\theta+1\geqq 0$

解答　(1)　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$　　(2)　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{11}{6}\pi$　　(3)　$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$

(4)　$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{11}{6}\pi$

(3)　$2\sin\theta+\sqrt{2}<0$ から　$\sin\theta<-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　　$\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

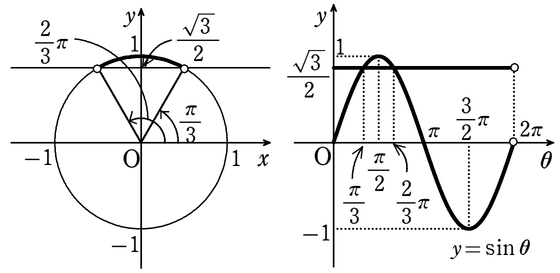
よって，不等式の解は，図から　　$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$

(4)　$2\cos\theta+1\geqq 0$ から　$\cos\theta\geqq -\frac{1}{2}$

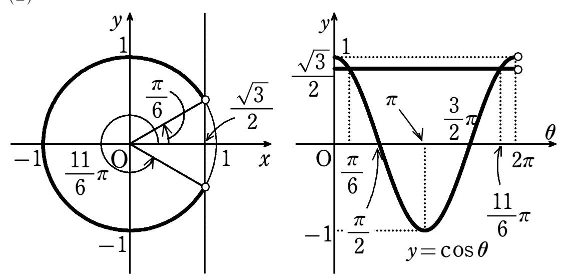
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ となる θ は　　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

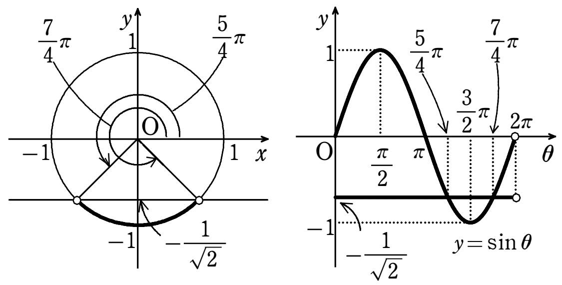
(1)



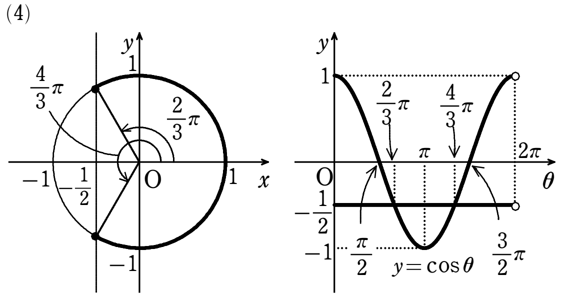
(2)



(3)



(4)



17 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\tan\theta>-1$　　　(2)　$3\tan\theta+\sqrt{3}<0$

解答　(1)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

(2)　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=-1$ となる θ は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

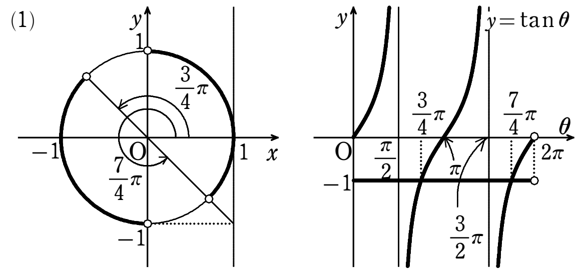
よって，不等式の解は，図から　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

(2)　$3\tan\theta+\sqrt{3}<0$ から　　$\tan\theta<-\frac{1}{\sqrt{3}}$

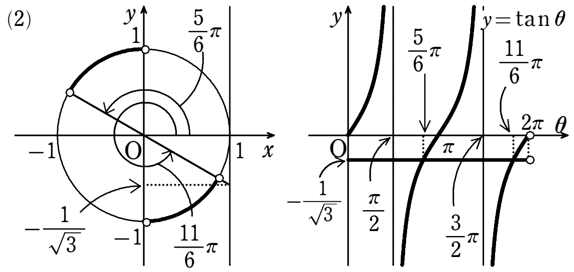
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ は　　$\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

(1)



(2)



18 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta<-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4)　$2\sin\theta+\sqrt{3}\leqq 0$　　(5)　$2\cos\theta>\sqrt{3}$　　(6)　$\tan\theta+1\geqq 0$

解答　(1)　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$　　(2)　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$　　(3)　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

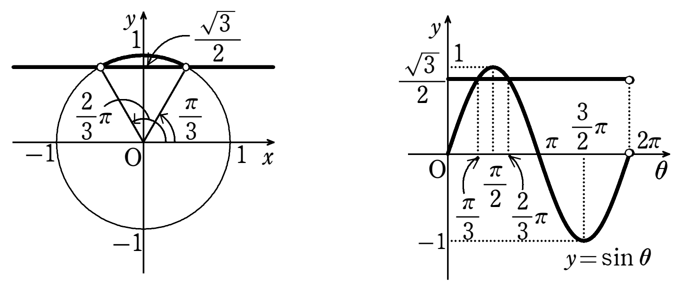
(4)　$\frac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$　　(5)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(6)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

解説

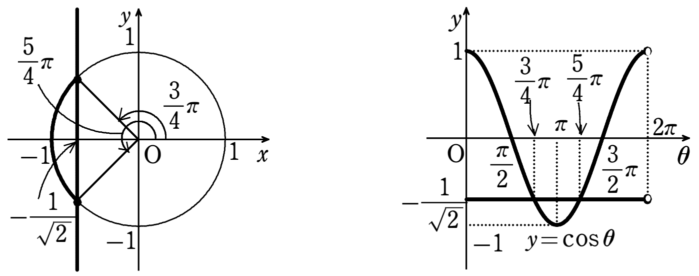
(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$



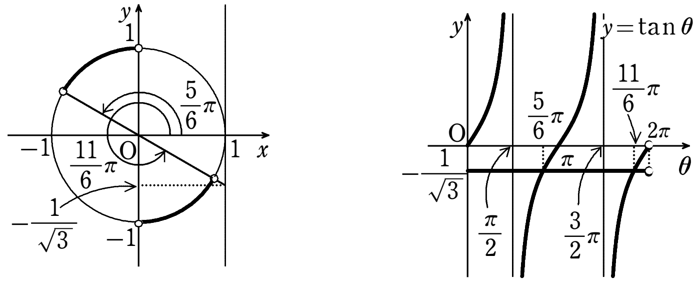
(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$



(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ は　$\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

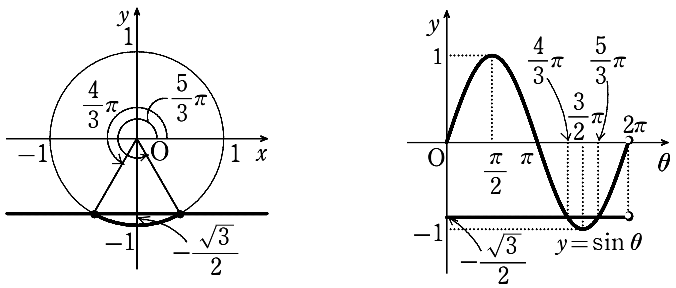
よって，不等式の解は，図から　$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta < \dfrac{11}{6}\pi$



(4)　不等式を変形すると　$\sin\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

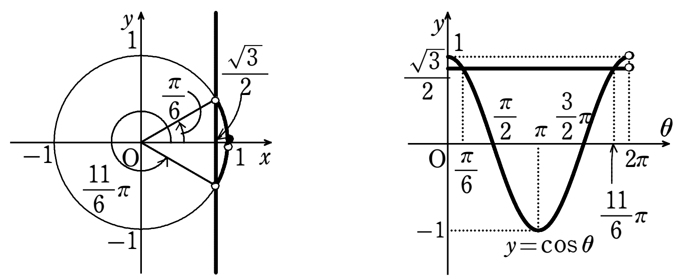
よって，不等式の解は，図から　$\dfrac{4}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$



(5)　不等式を変形すると　$\cos\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，不等式の解は，図から　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$



(6)　不等式を変形すると　$\tan\theta \geqq -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -1$ となる θ は　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$