加法定理クイズ

1 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

解説

2 加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ$　(2) $\sin 15^\circ$　(3) $\cos 15^\circ$　(4) $\sin 165^\circ$

解答　(1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

(1) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(4) $\sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ) = \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

別解　$\sin 165^\circ = \sin(135^\circ + 30^\circ) = \sin 135^\circ \cos 30^\circ + \cos 135^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3 $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ であることを用いて，$\sin \frac{7}{12}\pi$，$\cos \frac{7}{12}\pi$ の値を求めよ。

解答　$\sin \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

解説

$$\sin \frac{7}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{7}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

4 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。$\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos\beta = \frac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\sin(\alpha+\beta) = \frac{16}{65}$，$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{33}{65}$

解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\alpha < 0$，$\sin\beta > 0$

ゆえに　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$

したがって

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{33}{65}$$

5 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする。$\sin\alpha = \frac{2}{3}$，$\sin\beta = \frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha-\beta)$　(2) $\cos(\alpha+\beta)$

解答　(1) $-\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$　(2) $-\frac{8+3\sqrt{5}}{15}$

解説

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であるから　$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta < 0$

ゆえに　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$

(1) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{8+3\sqrt{5}}{15}$$

6 $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2+\sqrt{3}$$

解説

7 加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\tan 15^\circ$　(2) $\tan 105^\circ$　(3) $\tan 165^\circ$

解答　(1) $2-\sqrt{3}$　(2) $-2-\sqrt{3}$　(3) $-2+\sqrt{3}$

解説

(1) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

別解　$\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$ を利用すると

$$\tan 15^\circ = \tan(90^\circ - 75^\circ) = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

(2) $\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

別解　$\tan 105^\circ = \tan(90^\circ + 15^\circ) = -\frac{1}{\tan 15^\circ} = -\frac{1}{2-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$

(3) $\tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ \tan 45^\circ} = \frac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\cdot 1} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$$= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3}$$

8 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\tan(\alpha+\beta)$　(2) $\alpha+\beta$

解答　(1) -1　(2) $\frac{3}{4}\pi$

解説

(1) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$

(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから　$0 < \alpha+\beta < \pi$

よって　$\alpha+\beta = \frac{3}{4}\pi$

9 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

解答　$-\frac{24}{25}$

解説

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから　$\sin\alpha > 0$

よって　$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

10 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$　(2) $\cos 2\alpha$　(3) $\tan 2\alpha$

解答 (1) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$　(2) $-\frac{1}{9}$　(3) $4\sqrt{5}$

解説

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ から　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(2) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=-\frac{1}{9}$

(3) $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{4\sqrt{5}}{9}\div\left(-\frac{1}{9}\right)=4\sqrt{5}$

別解 (3) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ から

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=4\sqrt{5}$$

11 $\sin\frac{\pi}{8}$ の値

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

解説

12 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos\frac{\pi}{8}$　(2) $\tan\frac{\pi}{8}$

解答 (1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$　(2) $\sqrt{2}-1$

解説

(1) $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{8}>0$ であるから　$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(2) $\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$ であるから　$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

13 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\alpha}{2}$　(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$　(3) $\tan\frac{\alpha}{2}$

解答 (1) $\frac{3}{\sqrt{10}}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$　(3) 3

解説

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より　$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

(1) $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\frac{\alpha}{2}>0$

よって　$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

(2) $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\frac{\alpha}{2}>0$

よって　$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{5}\right)}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(3) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\div\frac{1}{\sqrt{10}}=3$

14 和と積の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ\cos 45^\circ$　(2) $\cos 45^\circ\cos 75^\circ$　(3) $\sin 75^\circ\sin 15^\circ$
(4) $\sin 105^\circ-\sin 15^\circ$　(5) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$　(6) $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$

解答 (1) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$　(3) $\frac{1}{4}$　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　(5) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1) 与式$=\frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+45^\circ)+\sin(75^\circ-45^\circ)\}$

$=\frac{1}{2}(\sin 120^\circ+\sin 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

(2) 与式$=\frac{1}{2}\{\cos(45^\circ+75^\circ)+\cos(45^\circ-75^\circ)\}$

$=\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

(3) 与式$=-\frac{1}{2}\{\cos(75^\circ+15^\circ)-\cos(75^\circ-15^\circ)\}$

$=-\frac{1}{2}(\cos 90^\circ-\cos 60^\circ)=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

(4) 与式$=2\cos\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}$

$=2\cos 60^\circ\sin 45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) 与式$=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$=2\cos 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(6) 与式$=-2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$=-2\sin 45^\circ\sin 30^\circ=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

15 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=4$，$\tan\gamma=13$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\tan(\alpha+\beta)$　(2) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

解答 (1) $-\frac{6}{7}$　(2) 1

解説

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+4}{1-2\cdot 4}=-\frac{6}{7}$

(2) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$

$$=\frac{-\frac{6}{7}+13}{1-\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot 13}=1$$

16 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos 2\alpha$　(2) $\sin 2\alpha$　(3) $\cos\frac{\alpha}{2}$

解答 (1) $-\frac{7}{25}$　(2) $\frac{24}{25}$　(3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

解説

(1) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$

(3) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{4}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ すなわち $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\cos\frac{\alpha}{2}>0$

よって　$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

17 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答　$-\dfrac{59}{72}$

解説

$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots①$$

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{9}\quad\cdots\cdots②$$

①，② を辺々加えると

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\frac{13}{36}$$

よって　$1+2\cos(\alpha-\beta)+1=\dfrac{13}{36}$　　ゆえに　$2\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{59}{36}$

すなわち　$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{59}{72}$

18 加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 105°$，$\cos 105°$，$\tan 105°$　　(2)　$\sin 15°$，$\cos 15°$，$\tan 15°$

解答　(1)　$\sin 105°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 105°=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，$\tan 105°=-2-\sqrt{3}$

(2)　$\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 15°=2-\sqrt{3}$

解説

(1)　$\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 105°=\cos(60°+45°)=\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\tan 105°=\tan(60°+45°)=\dfrac{\tan 60°+\tan 45°}{1-\tan 60°\tan 45°}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3}=-2-\sqrt{3}$$

(2)　$\sin 15°=\sin(60°-45°)=\sin 60°\cos 45°-\cos 60°\sin 45°$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 15°=\cos(60°-45°)=\cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\tan 15°=\tan(60°-45°)=\dfrac{\tan 60°-\tan 45°}{1+\tan 60°\tan 45°}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=2-\sqrt{3}$$

19 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

解答　$\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin 2\theta=\dfrac{4}{5}$

解説

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\tan\theta\cos^2\theta=2\tan\theta\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

20 $\sin\dfrac{3}{8}\pi$，$\cos\dfrac{3}{8}\pi$，$\tan\dfrac{3}{8}\pi$ の値を求めよ。

解答　$\sin\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$\cos\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\tan\dfrac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$

解説

$$\sin^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\dfrac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\sin\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\dfrac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\cos\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\tan\frac{3}{8}\pi=\sin\frac{3}{8}\pi\div\cos\frac{3}{8}\pi=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$$

21 (1)　α は鋭角，β は鈍角で，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{2}{7}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

解答　(1)　$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{4\sqrt{5}}{21}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{8\sqrt{5}}{11}$　　(2)　$-\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　α は鋭角，β は鈍角であるから　$\sin\alpha>0$，$\cos\beta<0$

ゆえに　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{7}\right)^2}=-\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

よって　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{7}=-\frac{4\sqrt{5}}{21}$$

また　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{2}{7}\div\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\right)=-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$ であるから

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{15}}{\frac{11}{15}}=\frac{8\sqrt{5}}{11}$$

(2)　$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ の両辺をそれぞれ 2 乗すると

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$$

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

辺々を加えて　$2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{1}{2}$

よって　$2+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{4}$

22 (1)　α は鋭角，β は鈍角で，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(2)　α，β は鋭角で，$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{5}{4}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

解答　(1)　順に　$-\dfrac{13\sqrt{17}}{85}$，$-\dfrac{8}{19}$　　(2)　順に　$\dfrac{9}{16}$，$\pm\dfrac{9\sqrt{7}}{35}$

解説

(1)　α は鋭角，β は鈍角であるから　$\cos\alpha>0$，$\sin\beta>0$

ゆえに　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)^2}=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

よって　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{13}{5\sqrt{17}}=-\frac{13\sqrt{17}}{85}$$

また　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\div\dfrac{4}{\sqrt{17}}=\dfrac{1}{4}$，

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{3}{5}\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{3}{4}$　であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{8}{19}$$

(2)　$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{5}{4}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{5}{4}$ の両辺をそれぞれ 2 乗すると

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{25}{16}$$

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{25}{16}$$

辺々を加えて　$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\dfrac{25}{8}$

よって　$2+2\sin(\alpha+\beta)=\frac{25}{8}$　　ゆえに　$\sin(\alpha+\beta)=\frac{9}{16}$

また，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$0<\alpha+\beta<\pi$

したがって　$-1<\cos(\alpha+\beta)<1$

よって　$\cos(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$

ゆえに　$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{9}{16}\div\left(\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)=\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}$　（複号同順）

23 (1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos 2\alpha=\cos 3\alpha$ を満たす角 α を求めよ。

(2) (1) の α に対して，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

解答　(1) $\alpha=\frac{2}{5}\pi$　(2) $\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から

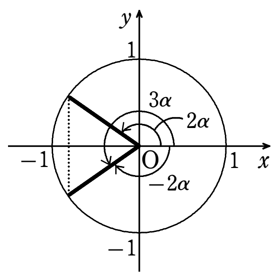
$0<2\alpha<3\alpha<\frac{3}{2}\pi$

よって，$\cos 2\alpha=\cos 3\alpha$ が成り立つのは

$3\alpha=2\pi-2\alpha$

のときである。

これを解いて　$\alpha=\frac{2}{5}\pi$



(2) 2 倍角，3 倍角の公式により，(1) の等式は

$2\cos^2\alpha-1=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

すなわち　$4\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=0$

ゆえに　$(\cos\alpha-1)(4\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1)=0$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より，$0<\cos\alpha<1$ であるから　$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

24 積 ⟶ 和，和 ⟶ 積の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ\cos 15^\circ$　(2) $\cos 105^\circ-\cos 15^\circ$　(3) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

解答　(1) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　(2) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

解説

(1) $\sin 75^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)\}$

$=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

(2) $\cos 105^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}$

$=-2\sin 60^\circ\sin 45^\circ=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=(\sin 80^\circ\sin 40^\circ)\sin 20^\circ$

$=-\frac{1}{2}\{\cos(80^\circ+40^\circ)-\cos(80^\circ-40^\circ)\}\sin 20^\circ$

$=-\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 40^\circ)\sin 20^\circ$

$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sin 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 40^\circ\sin 20^\circ$

$=\frac{1}{4}\sin 20^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\sin(40^\circ+20^\circ)-\sin(40^\circ-20^\circ)\}$

$=\frac{1}{4}\sin 20^\circ+\frac{1}{4}(\sin 60^\circ-\sin 20^\circ)$

$=\frac{1}{4}\sin 20^\circ+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\sin 20^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}$

25 積 ⟶ 和，和 ⟶ 積の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ\sin 45^\circ$　(2) $\sin 105^\circ\sin 45^\circ$　(3) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$

(4) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$　(5) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$

(6) $\sin 10^\circ-\sin 110^\circ-\sin 230^\circ$

解答　(1) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$　(2) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$　(3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(4) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(5) $\frac{1}{8}$　(6) 0

解説

(1) $\cos 75^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+45^\circ)-\sin(75^\circ-45^\circ)\}$

$=\frac{1}{2}(\sin 120^\circ-\sin 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

(2) $\sin 105^\circ\sin 45^\circ=-\frac{1}{2}\{\cos(105^\circ+45^\circ)-\cos(105^\circ-45^\circ)\}$

$=-\frac{1}{2}(\cos 150^\circ-\cos 60^\circ)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

(3) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(4) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$=2\cos 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(5) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=(\cos 80^\circ\cos 40^\circ)\cos 20^\circ$

$=\frac{1}{2}\{\cos(80^\circ+40^\circ)+\cos(80^\circ-40^\circ)\}\cos 20^\circ$

$=\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ)\cos 20^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 40^\circ\cos 20^\circ$

$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(40^\circ+20^\circ)+\cos(40^\circ-20^\circ)\}$

$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{4}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)$

$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{4}\cos 60^\circ+\frac{1}{4}\cos 20^\circ=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(6) $\sin 10^\circ-\sin 110^\circ-\sin 230^\circ=-(\sin 110^\circ-\sin 10^\circ)-\sin 230^\circ$

$=-2\cos\frac{110^\circ+10^\circ}{2}\sin\frac{110^\circ-10^\circ}{2}-\sin 230^\circ$

$=-2\cos 60^\circ\sin 50^\circ-\sin 230^\circ$

$=-2\cdot\frac{1}{2}\sin 50^\circ-\sin(180^\circ+50^\circ)$

$=-\sin 50^\circ+\sin 50^\circ=0$

26 次の値を求めよ。

(1) $\sin 195^\circ$　(2) $\cos 195^\circ$　(3) $\tan 105^\circ$

(4) $\sin\frac{11}{12}\pi$　(5) $\cos\frac{11}{12}\pi$　(6) $\tan\frac{13}{12}\pi$

解答　(1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　(2) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3) $-2-\sqrt{3}$　(4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(5) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　(6) $2-\sqrt{3}$

解説

(1) $\sin 195^\circ=\sin(150^\circ+45^\circ)=\sin 150^\circ\cos 45^\circ+\cos 150^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(2) $\cos 195^\circ=\cos(150^\circ+45^\circ)=\cos 150^\circ\cos 45^\circ-\sin 150^\circ\sin 45^\circ$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-2-\sqrt{3}$

(4) $\sin\frac{11}{12}\pi=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos\frac{11}{12}\pi=\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(6) $\tan\frac{13}{12}\pi=\tan\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{5}{6}\pi+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{5}{6}\pi\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 1}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$

参考　(1)，(2) から

$\tan\frac{13}{12}\pi=\tan 195^\circ=\frac{\sin 195^\circ}{\cos 195^\circ}$

として計算してもよい。

27 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ とする。次の値を求めよ。

(1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{5}$ のとき　$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$

(2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$ のとき　$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$

(3) $\tan\alpha=-2$，$\tan\beta=1$ のとき　$\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$

解答　順に

(1) $\frac{2(1-\sqrt{42})}{15}$，$-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$　(2) $\frac{63}{65}$，$-\frac{16}{65}$　(3) $-\frac{1}{3}$，3

解説

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

ゆえに　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$

$=\frac{2(1-\sqrt{42})}{15}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$

$=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$

(2) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\beta>0$

よって　$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$

ゆえに　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2+1}{1-(-2)\cdot1}=-\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2-1}{1+(-2)\cdot1}=3$

28 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\tan\alpha=-1$，$\tan\beta=-2$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解答　$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解説

$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+(-1)^2}=\frac{1}{2}$

$\cos^2\beta=\frac{1}{1+\tan^2\beta}=\frac{1}{1+(-2)^2}=\frac{1}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

また　$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　$\cos\beta<0$

よって　$\cos\beta=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\sin\beta=\tan\beta\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

したがって　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

29 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ のとき，$(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)$ の値を求めよ。

解答　2

解説

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ から　$\tan(\alpha+\beta)=1$

よって　$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

分母を払って整理すると　$\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta=1$

したがって　$(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta+1$

$=1+1=2$

30 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

解答　$-\frac{59}{72}$

解説

$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$ の両辺をそれぞれ2乗すると

$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{9}$

辺々を加えて　$2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\frac{13}{36}$

よって　$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{59}{72}$

すなわち　$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{59}{72}$

31 次の値を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ のとき　$\cos2\alpha$，$\sin2\alpha$，$\tan2\alpha$

(2) $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$，$\cos\alpha=-\frac{3}{4}$ のとき　$\cos2\alpha$，$\sin2\alpha$，$\tan2\alpha$

解答　順に

(1) $\frac{7}{9}$，$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，$-\frac{4\sqrt{2}}{7}$　(2) $\frac{1}{8}$，$\frac{3\sqrt{7}}{8}$，$3\sqrt{7}$

解説

(1) $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

また　$\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

(2) $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ であるから　$\sin\alpha<0$

よって　$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

ゆえに　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

また　$\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=3\sqrt{7}$

32 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$　(2) $\cos\frac{5}{8}\pi$　(3) $\tan\frac{5}{12}\pi$

解答　(1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(2) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(3) $2+\sqrt{3}$

解説

(1) $\sin^2\frac{\pi}{12}=\sin^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}>0$ であるから　$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}$

$=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos^2\frac{5}{8}\pi=\cos^2\frac{\frac{5}{4}\pi}{2}=\frac{1+\cos\frac{5}{4}\pi}{2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{5}{8}\pi<0$ であるから　$\cos\frac{5}{8}\pi=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(3) $\tan^2\frac{5}{12}\pi=\tan^2\frac{\frac{5}{6}\pi}{2}=\frac{1-\cos\frac{5}{6}\pi}{1+\cos\frac{5}{6}\pi}=\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=(2+\sqrt{3})^2$

$\tan\frac{5}{12}\pi>0$ であるから　$\tan\frac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3}$

33 $0<\alpha<\pi$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ のとき　$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$

(2) $\tan\alpha=2$ のとき　$\tan2\alpha$，$\tan\frac{\alpha}{2}$

(3) $\cos2\alpha=\frac{1}{3}$ のとき　$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$

解答　順に

(1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\frac{1}{\sqrt{5}}$，2　(2) $-\frac{4}{3}$，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ または $\frac{1}{\sqrt{3}}$，$-\frac{\sqrt{6}}{3}$，$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{4}{5}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5}$

$0<\alpha<\pi$ から　$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

よって，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}>0$ であるから　$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2$

(2) $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$

また　$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$

$0<\alpha<\pi$ であり，$\tan\alpha>0$ であるから　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$　……①

よって，$\cos\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

ゆえに　$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

$=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$

① より，$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\tan\frac{\alpha}{2}>0$

よって　$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3) $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$

$0<\alpha<\pi$ から　$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

34 次の値を求めよ。

(1) $\sin75^\circ\cos15^\circ$　(2) $\cos75^\circ\sin15^\circ$　(3) $\sin37.5^\circ\sin7.5^\circ$

(4) $\sin75^\circ-\sin15^\circ$　(5) $\cos15^\circ+\cos105^\circ$　(6) $\cos105^\circ-\cos15^\circ$

解答　(1) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　(2) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$　(3) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　(5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(6) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説

(1) $\sin75^\circ\cos15^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)\}=\frac{1}{2}(\sin90^\circ+\sin60^\circ)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

(2) $\cos75^\circ\sin15^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+15^\circ)-\sin(75^\circ-15^\circ)\}=\frac{1}{2}(\sin90^\circ-\sin60^\circ)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

(3) $\sin37.5^\circ\sin7.5^\circ=-\frac{1}{2}\{\cos(37.5^\circ+7.5^\circ)-\cos(37.5^\circ-7.5^\circ)\}=-\frac{1}{2}(\cos45^\circ-\cos30^\circ)$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\sin75^\circ-\sin15^\circ=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\cos15^\circ+\cos105^\circ=2\cos\frac{15^\circ+105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ-105^\circ}{2}=2\cos60^\circ\cos(-45^\circ)$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(6) $\cos105^\circ-\cos15^\circ=-2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}=-2\sin60^\circ\sin45^\circ$

$=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

35 次の値を求めよ。

(1) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ$　(2) $\sin20^\circ+\sin140^\circ+\sin260^\circ$

解答　(1) $\frac{1}{8}$　(2) 0

解説

(1) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos20^\circ)\cos80^\circ=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{2}\cos20^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{4}(\cos100^\circ+\cos60^\circ)$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{4}\cos(180^\circ-80^\circ)+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ-\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

(2) $\sin20^\circ+\sin140^\circ+\sin260^\circ=(\sin20^\circ+\sin260^\circ)+\sin140^\circ$

$=2\sin140^\circ\cos120^\circ+\sin140^\circ$

$=-\sin140^\circ+\sin140^\circ=0$

36 次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$　(2) $\sin\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{5}{12}\pi$

解答　(1) $\sqrt{2}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}$

(2) $\sin\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{5}{12}\pi=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{5}{12}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{5}{12}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\left\{\sin\frac{5}{12}\pi\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{5}{12}\pi\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

37 次の値を求めよ。

(1) $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$　(2) $\cos10^\circ+\cos110^\circ+\cos130^\circ$

解答　(1) $\frac{\sqrt{3}}{8}$　(2) 0

解説

(1) 与式$=-\frac{1}{2}(\cos60^\circ-\cos20^\circ)\sin80^\circ=-\frac{1}{4}\sin80^\circ+\frac{1}{2}\cos20^\circ\sin80^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin80^\circ+\frac{1}{4}(\sin100^\circ+\sin60^\circ)$

$=-\frac{1}{4}\sin80^\circ+\frac{1}{4}\sin(180^\circ-80^\circ)+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{1}{4}\sin80^\circ+\frac{1}{4}\sin80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

(2) 与式$=2\cos60^\circ\cos50^\circ+\cos130^\circ$

$=\cos50^\circ+\cos(180^\circ-50^\circ)=\cos50^\circ-\cos50^\circ=0$

38 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で $\sin\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\theta$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\cos 3\theta$ の値を求めよ。

解答 $\sin 2\theta=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$，$\cos 3\theta=-\frac{10\sqrt{2}}{27}$

解説

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

次に　$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\frac{\theta}{2}>0$

よって　$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

また　$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=-3\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+4\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3=-\frac{10\sqrt{2}}{27}$

39 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で $\cos\theta=-\frac{2}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$，$\sin\frac{\theta}{2}$，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

解答 $\cos 2\theta=-\frac{1}{9}$，$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，$\sin 3\theta=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

解説

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{9}$

次に　$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}=\frac{5}{6}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\frac{\theta}{2}>0$

ゆえに　$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

また　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

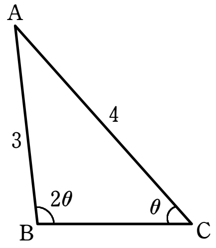
よって　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

40 △ABC において，AB=3，CA=4，∠B=2θ，∠C=θ とする。このとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\theta$　(2) $\sin\theta$　(3) $\sin 3\theta$　(4) BC

解答 (1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(3) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$　(4) $\frac{7}{3}$

解説



(1) 正弦定理により　$\frac{3}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin 2\theta}$

よって　$3\sin 2\theta=4\sin\theta$

ゆえに　$6\sin\theta\cos\theta=4\sin\theta$

すなわち　$2\sin\theta(3\cos\theta-2)=0$

$\sin\theta\neq 0$ であるから　$\cos\theta=\frac{2}{3}$

(2) $\sin\theta>0$ であるから

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(3) 3 倍角の公式から

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3$

$=\sqrt{5}-\frac{20\sqrt{5}}{27}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

(4) $\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)=\pi-(2\theta+\theta)=\pi-3\theta$

よって，正弦定理により　$\frac{BC}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{3}{\sin\theta}$

ゆえに　$BC=\frac{3}{\sin\theta}\cdot\sin(\pi-3\theta)=\frac{3}{\sin\theta}\cdot\sin 3\theta=3\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{7\sqrt{5}}{27}=\frac{7}{3}$

41 直線 $y=(\sqrt{2}-1)x-6$ と x 軸のなす鋭角を θ とすると，

$\tan\theta=\sqrt{^{ア}\boxed{}}-{}^{イ}\boxed{}$，$\tan 2\theta={}^{ウ}\boxed{}$，

$\tan 3\theta=\sqrt{^{エ}\boxed{}}+{}^{オ}\boxed{}$

である。

解答 (ア) 2　(イ) 1　(ウ) 1　(エ) 2　(オ) 1

解説

$\tan\theta=\sqrt{^{ア}2}-{}^{イ}1$

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{-2+2\sqrt{2}}={}^{ウ}1$

$\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}=\frac{1+(\sqrt{2}-1)}{1-1\cdot(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{^{エ}2}+{}^{オ}1$

42 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin\alpha=\frac{2}{3}$ のとき，$\sin 3\alpha$，$\cos 3\alpha$ の値を求めよ。

解答 $\sin 3\alpha=\frac{22}{27}$，$\cos 3\alpha=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

解説

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3\cdot\frac{2}{3}-4\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{22}{27}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3-3\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{7\sqrt{5}}{27}$