$\boxed{1}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3 \quad (1\leqq x\leqq 16)$$

解答　$x=16$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -4

解説

$\log_2 x=t$ とおく。

$\log_2 x$ の底 2 は 1 より大きいから，$1\leqq x\leqq 16$ のとき

$$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 16$$

すなわち　$0\leqq t\leqq 4$　……①

与えられた関数の式を変形すると

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3$

よって，y を t で表すと

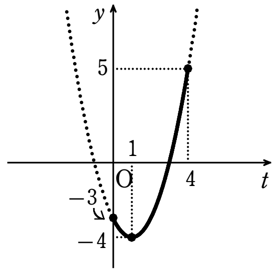
$y=t^2-2t-3$

$\quad =(t-1)^2-4$

① の範囲において，y は

$t=4$ で最大値 5 をとり，

$t=1$ で最小値 -4 をとる。



$t=4$ のとき　$\log_2 x=4$　　ゆえに　$x=2^4=16$

$t=1$ のとき　$\log_2 x=1$　　ゆえに　$x=2^1=2$

したがって，この関数は

$x=16$ で最大値 5 をとり，$x=2$ で最小値 -4 をとる。

$\boxed{2}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=(\log_3 x)^2-\log_3 x^4-3 \quad (1\leqq x\leqq 27)$$

解答　$x=1$ で最大値 -3，$x=9$ で最小値 -7

解説

$\log_3 x=t$ とおく。

$\log_3 x$ の底 3 は 1 より大きいから，$1\leqq x\leqq 27$ のとき

$$\log_3 1\leqq \log_3 x\leqq \log_3 27$$

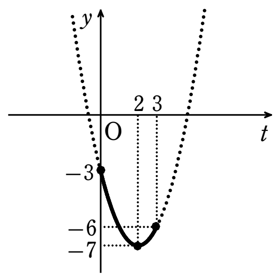
すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　……①

与えられた関数の式を変形すると

$y=(\log_3 x)^2-4\log_3 x-3$

よって，y を t で表すと

$y=t^2-4t-3=(t-2)^2-7$



① の範囲において，y は

$t=0$ で最大値 -3 をとり，$t=2$ で最小値 -7 をとる。

$t=0$ のとき　$\log_3 x=0$　　ゆえに　$x=3^0=1$

$t=2$ のとき　$\log_3 x=2$　　ゆえに　$x=3^2=9$

したがって，この関数は

$x=1$ で最大値 -3 をとり，$x=9$ で最小値 -7 をとる。

$\boxed{3}$ 関数 $y=\log_2 x+\log_2(16-x)$ の最大値を求めよ。

解答　$x=8$ で最大値 6

解説

真数は正であるから　$x>0$ かつ $16-x>0$

よって　$0<x<16$　……①

このとき関数は

$y=\log_2 x(16-x)=\log_2(-x^2+16x)$

$\quad =\log_2\{-(x-8)^2+64\}$

① の範囲において，真数は $x=8$ で最大値 64 をとる。

底 2 は 1 より大きいから，このとき y も最大値 $\log_2 64=6$ をとる。

以上により，y は $x=8$ で最大値 6 をとる。

$\boxed{4}$ (1)　関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2-\log_2 x^2+6$ の $2\leqq x\leqq 16$ における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=\log_3 x+3\log_x 3$ $(x>1)$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=2$ で最大値 5，$x=8$ で最小値 1　　(2)　$x=3^{\sqrt{3}}$ で最小値 $2\sqrt{3}$

解説

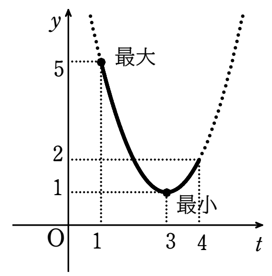
(1)　$\log_2 x=t$ とおくと，$2\leqq x\leqq 16$ から　　$1\leqq t\leqq 4$

また　$\log_2\dfrac{x}{4}=\log_2 x-\log_2 4=t-2$

y を t の式で表すと

$y=(t-2)^2-2t+6=t^2-6t+10$

$\quad =(t-3)^2+1$



$1\leqq t\leqq 4$ の範囲において，y は

$t=1$ で最大値 5，$t=3$ で最小値 1　をとる。

$t=1$ のとき，$\log_2 x=1$ から　　$x=2$

$t=3$ のとき，$\log_2 x=3$ から　　$x=8$

したがって，$x=2$ で最大値 5，$x=8$ で最小値 1 をとる。

(2)　$\log_3 x=t$ とおくと，$x>1$ から　　$t>0$

$$y=\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}=t+\frac{3}{t}$$

$t>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}=2\sqrt{3}$$

等号は $t=\dfrac{3}{t}$，$t>0$ すなわち $t=\sqrt{3}$ のとき成り立つ。

このとき，$\log_3 x=\sqrt{3}$ から　　$x=3^{\sqrt{3}}$

したがって，$x=3^{\sqrt{3}}$ で最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

$\boxed{5}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}} x+3$　$(1\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\left(\log_{10}\dfrac{x}{100}\right)\left(\log_{10}\dfrac{1}{x}\right)$　$(1<x\leqq 100)$

(3)　$y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$

(4)　$y=\log_2 x^2+\log_x 16$　$(x>1)$

解答　(1)　$x=8$ で最大値 6，$x=2$ で最小値 2

(2)　$x=10$ で最大値 1，$x=100$ で最小値 0

(3)　$x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 -2，最小値はない

(4)　$x=2^{\sqrt{2}}$ で最小値 $4\sqrt{2}$，最大値はない

解説

(1)　$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ から　　$0\leqq t\leqq 3$

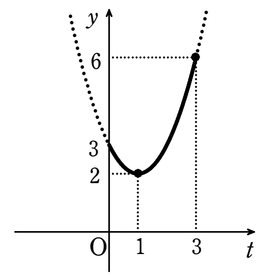
また　$\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x=-t$

y を t の式で表すと　$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

$0\leqq t\leqq 3$ の範囲において，y は

$t=3$ で最大値 6，$t=1$ で最小値 2

をとる。



$t=3$ のとき，$\log_2 x=3$ から　　$x=8$

$t=1$ のとき，$\log_2 x=1$ から　　$x=2$

よって　　$x=8$ で最大値 6，$x=2$ で最小値 2

(2)　$y=\left(\log_{10}\dfrac{x}{100}\right)\left(\log_{10}\dfrac{1}{x}\right)$

$\quad =(\log_{10}x-\log_{10}100)(\log_{10}x^{-1})$

$\quad =(\log_{10}x-2)(-\log_{10}x)$

$\log_{10}x=t$ とおくと，$1<x\leqq 100$ から　　$0<t\leqq 2$

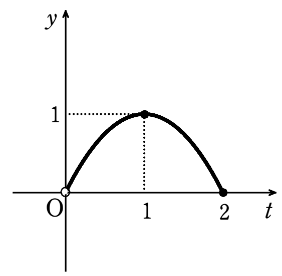
y を t の式で表すと

$y=(t-2)\cdot(-t)=-(t^2-2t)=-(t-1)^2+1$

$0<t\leqq 2$ の範囲において，y は

$t=1$ で最大値 1，$t=2$ で最小値 0

をとる。



$t=1$ のとき，$\log_{10}x=1$ から　　$x=10$

$t=2$ のとき，$\log_{10}x=2$ から　　$x=100$

よって　　$x=10$ で最大値 1，$x=100$ で最小値 0

(3)　真数は正であるから　　$x-2>0$　かつ　$3-x>0$

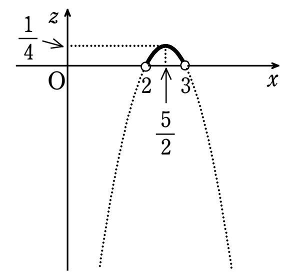
よって　　$2<x<3$　……①

$2\log_4(3-x)=\log_{2^2}(3-x)^2=\log_2(3-x)$ であるから

$y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$

$\quad =\log_2(x-2)+\log_2(3-x)$

$\quad =\log_2(x-2)(3-x)=\log_2(-x^2+5x-6)$



$z=-x^2+5x-6$ とすると　　$z=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

① の範囲において，z は $x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

対数の底 2 は 1 より大きいから，このとき y も最大となる。

よって　　$x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\log_2\dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

また，最小値はない。

(4)　$\log_2 x=t$ とおくと，$x>1$ から　　$t>0$

また　　$\log_x 16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 x}=\dfrac{4}{\log_2 x}$

y を t の式で表すと　　$y=2t+\dfrac{4}{t}$

$t>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$2t+\frac{4}{t} \geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{4}{t}}=4\sqrt{2}$$

等号は $2t=\frac{4}{t}$，$t>0$ すなわち $t=\sqrt{2}$ のとき成り立つ。

このとき，$\log_2 x=\sqrt{2}$ から　$x=2^{\sqrt{2}}$

よって　$x=2^{\sqrt{2}}$ で最小値 $4\sqrt{2}$

また，最大値はない。

6 $x^2y=16$，$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ のとき，$z=(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値も求めよ。

解答　$x=2$，$y=4$ で最大値 2；$x=1$，$y=16$ または $x=4$，$y=1$ で最小値 0

解説

$x^2y=16$，$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ の各辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 x^2y=\log_2 16$，　$\log_2 x\geqq \log_2 1$，　$\log_2 y\geqq \log_2 1$

よって　$2\log_2 x+\log_2 y=4$，　$\log_2 x\geqq 0$，　$\log_2 y\geqq 0$

第 1 式から　$\log_2 y=4-2\log_2 x$

第 3 式から　$4-2\log_2 x\geqq 0$

ゆえに　$\log_2 x\leqq 2$

第 2 式との共通範囲は　$0\leqq \log_2 x\leqq 2$　……①

このとき　$z=(\log_2 x)(\log_2 y)=(\log_2 x)(4-2\log_2 x)$

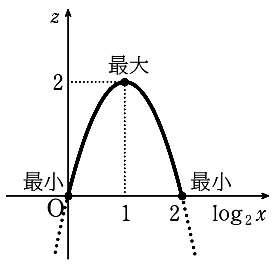
$=-2(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$=-2(\log_2 x-1)^2+2$

① の範囲において，z は

$\log_2 x=1$　で最大値 2，

$\log_2 x=0$，2 で最小値 0　をとる。



また　$\log_2 x=1$ のとき　$x=2$，$y=4$

$\log_2 x=0$ のとき　$x=1$，$y=16$

$\log_2 x=2$ のとき　$x=4$，$y=1$

よって　$x=2$，$y=4$ で最大値 2；

$x=1$，$y=16$ または $x=4$，$y=1$ で最小値 0

7 次のものを求めよ。

(1)　$xy=10^5$，$10\leqq x\leqq 1000$ のとき，$z=(\log_{10}x)(\log_{10}y)$ の最大値と最小値

(2)　$x>0$，$y>0$ で $2x+3y=12$ のとき，$z=\log_6 x+\log_6 y$ の最大値

解答　(1)　$x=100\sqrt{10}$，$y=100\sqrt{10}$ で最大値 $\frac{25}{4}$；$x=10$，$y=10000$ で最小値 4

(2)　$x=3$，$y=2$ で最大値 1

解説

(1)　$xy=10^5$，$10\leqq x\leqq 1000$ のとき，$y>0$ となる。

10 を底として，$xy=10^5$，$10\leqq x\leqq 1000$ の各辺の対数をとると

$\log_{10}xy=\log_{10}10^5$，$\log_{10}10\leqq \log_{10}x\leqq \log_{10}1000$

よって　$\log_{10}x+\log_{10}y=5$　……①，$1\leqq \log_{10}x\leqq 3$　……②

① から　$\log_{10}y=5-\log_{10}x$

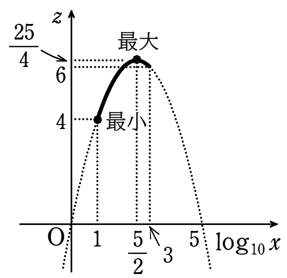
ゆえに　$z=(\log_{10}x)(5-\log_{10}x)=-(\log_{10}x)^2+5\log_{10}x$

$=-\left(\log_{10}x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

② の範囲において，z は

$\log_{10}x=\frac{5}{2}$ で最大値 $\frac{25}{4}$，

$\log_{10}x=1$ で最小値 4 をとる。



$\log_{10}x=\frac{5}{2}$ のとき　$x=10^{\frac{5}{2}}=100\sqrt{10}$

このとき　$y=100\sqrt{10}$

$\log_{10}x=1$ のとき　$x=10$

このとき　$y=10000$

よって　$x=100\sqrt{10}$，$y=100\sqrt{10}$ で最大値 $\frac{25}{4}$；$x=10$，$y=10000$ で最小値 4

(2)　$2x+3y=12$ から　$y=-\frac{2}{3}x+4$　……①

$y>0$ から　$-\frac{2}{3}x+4>0$　　よって　$x<6$

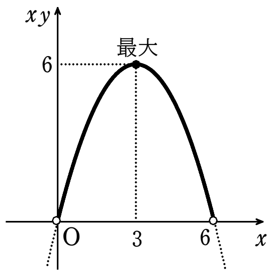
$x>0$ と合わせて　$0<x<6$　……②

また　$z=\log_6 x+\log_6 y=\log_6 xy$

底 6 は 1 より大きいから，xy が最大のとき，z は最大になる。

① から　$xy=x\left(-\frac{2}{3}x+4\right)=-\frac{2}{3}(x^2-6x)$

$=-\frac{2}{3}(x-3)^2+6$



② の範囲において，xy は $x=3$ で最大値 6 をとる。

① から，$x=3$ のとき　$y=2$

したがって，z は

$x=3$，$y=2$ で最大値 $\log_6 6=1$ をとる。

別解　$z=\log_6 x+\log_6 y=\log_6 xy$

$x>0$，$y>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$12=2x+3y\geqq 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy}$

よって　$\sqrt{xy}\leqq \sqrt{6}$　　ゆえに　$xy\leqq 6$

等号は $2x=3y$ のとき成り立つ。

$2x+3y=12$ と $2x=3y$ を連立して解くと　$x=3$，$y=2$

底 6 は 1 より大きいから，z は $x=3$，$y=2$ で最大値 $\log_6 6=1$ をとる。

8 $1\leqq x\leqq 8$ のとき，関数 $y=(\log_2 x)^2+8\log_{\frac{1}{4}}2x+\log_2 32$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=1$ で最大値 1，$x=4$ で最小値 -3

解説

$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ であるから

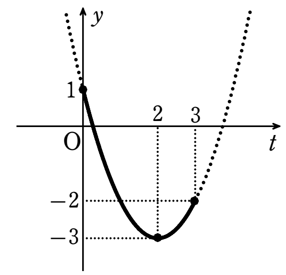
$\log_2 1\leqq t\leqq \log_2 8$　すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　……①

また　$\log_{\frac{1}{4}}2x=\frac{\log_2 2x}{\log_2\frac{1}{4}}=\frac{\log_2 2+\log_2 x}{-2}=-\frac{t+1}{2}$，$\log_2 32=\log_2 2^5=5$

であるから，y を t の式で表すと

$y=t^2+8\cdot\left(-\frac{t+1}{2}\right)+5=t^2-4t+1$

$=(t-2)^2-3$



① の範囲において，y は

$t=0$ で最大値 1，$t=2$ で最小値 -3

をとる。

$t=\log_2 x$ より，$x=2^t$ であるから

$t=0$ のとき　$x=2^0=1$，　$t=2$ のとき　$x=2^2=4$

したがって，この関数は $x=1$ で最大値 1，$x=4$ で最小値 -3 をとる。

9 (1)　関数 $y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$1\leqq x\leqq 5$ のとき，関数 $y=2\log_5 x+(\log_5 x)^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(3)　$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ のとき，関数 $y=(\log_3 3x)\left(\log_3\frac{x}{27}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=\frac{5}{2}$ で最大値 -2　　(2)　$x=5$ で最大値 3，$x=1$ で最小値 0

(3)　$x=\frac{1}{3}$，27 で最大値 0；$x=3$ で最小値 -4

解説

(1)　真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $3-x>0$

よって　$2<x<3$　……①

$2\log_4(3-x)=2\cdot\frac{\log_2(3-x)}{\log_2 4}=\log_2(3-x)$ であるから

$y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)=\log_2(x-2)+\log_2(3-x)$

$=\log_2(x-2)(3-x)=\log_2(-x^2+5x-6)$

$z=-x^2+5x-6$ とすると　$z=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

① の範囲において，z は $x=\frac{5}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

対数の底 2 は 1 より大きいから，このとき y も最大となる。

よって　$x=\frac{5}{2}$ で最大値 $\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

(2)　$\log_5 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 5$ であるから

$\log_5 1\leqq t\leqq \log_5 5$　すなわち　$0\leqq t\leqq 1$　……①

y を t の式で表すと　$y=2t+t^2=(t+1)^2-1$

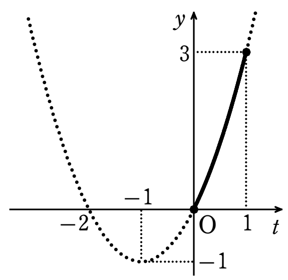
① の範囲において，y は

$t=1$ で最大値 3，$t=0$ で最小値 0

をとる。$t=\log_5 x$ より，$x=5^t$ であるから

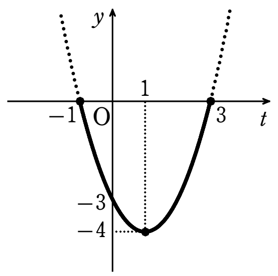
$t=1$ のとき　$x=5$，　$t=0$ のとき　$x=5^0=1$

よって　$x=5$ で最大値 3，$x=1$で最小値 0



(3)　$\log_3 x=t$ とおくと，$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ であるから

$$\log_3\frac{1}{3}\leqq t\leqq\log_3 27$$



すなわち　$-1\leqq t\leqq 3$　……①

$\log_3 3x=1+\log_3 x$，$\log_3\frac{x}{27}=\log_3 x-3$ である

から，y を t の式で表すと

$$y=(1+t)(t-3)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$$

① の範囲において，y は

$t=-1$，3 で最大値 0，$t=1$ で最小値 -4

をとる。$t=\log_3 x$ より，$x=3^t$ であるから

$t=-1$ のとき　$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$，　$t=3$ のとき　$x=3^3=27$，

$t=1$　のとき　$x=3$

よって　$x=\frac{1}{3}$，27 で最大値 0；$x=3$ で最小値 -4

$\boxed{10}$ $x\geqq 2$，$y\geqq 2$，$xy=16$ のとき，$(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$(x,\ y)=(4,\ 4)$ のとき最大値 4；$(x,\ y)=(2,\ 8)$，$(8,\ 2)$ のとき最小値 3

解説

$x\geqq 2$，$y\geqq 2$，$xy=16$ の各辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 x\geqq 1$，$\log_2 y\geqq 1$，$\log_2 x+\log_2 y=4$

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと　$X\geqq 1$，$Y\geqq 1$，$X+Y=4$

$X+Y=4$ から　$Y=4-X$　……①

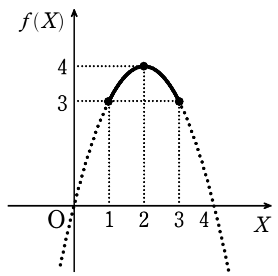
$Y\geqq 1$ であるから　$4-X\geqq 1$　ゆえに　$X\leqq 3$

$X\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq X\leqq 3$　……②

また　$(\log_2 x)(\log_2 y)$

$=XY=X(4-X)=-X^2+4X$

$=-(X-2)^2+4$



これを $f(X)$ とすると，② の範囲において，$f(X)$ は

$X=2$ で最大値 4，$X=1$，3 で最小値 3　をとる。

① から　$X=2$ のとき　$Y=2$，

$X=1$ のとき　$Y=3$，　$X=3$ のとき　$Y=1$

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ より，$x=2^X$，$y=2^Y$ であるから

$(x,\ y)=(4,\ 4)$ のとき最大値 4；$(x,\ y)=(2,\ 8)$，$(8,\ 2)$ のとき最小値 3

$\boxed{11}$ $x\geqq 3$，$y\geqq\frac{1}{3}$，$xy=27$ のとき，$(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}$；$x=81$，$y=\frac{1}{3}$ で最小値 -4

解説

$x\geqq 3$，$y\geqq\frac{1}{3}$，$xy=27$ の各辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 x\geqq 1$，$\log_3 y\geqq -1$，$\log_3 x+\log_3 y=3$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと

$X\geqq 1$，$Y\geqq -1$，$X+Y=3$

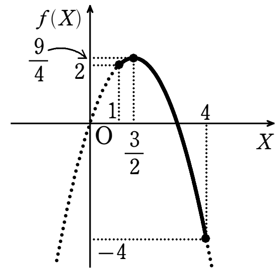
$X+Y=3$ から　$Y=3-X$　……①

$Y\geqq -1$ であるから　$3-X\geqq -1$　ゆえに　$X\leqq 4$

$X\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq X\leqq 4$　……②

また　$(\log_3 x)(\log_3 y)=XY=X(3-X)=-X^2+3X$

$$=-\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



これを $f(X)$ とすると，② の範囲において，$f(X)$ は

$X=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$X=4$ で最小値 -4　をとる。

① から　$X=\frac{3}{2}$ のとき　$Y=\frac{3}{2}$，$X=4$ のとき　$Y=-1$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ より，$x=3^X$，$y=3^Y$ であるから

$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}$；$x=81$，$y=\frac{1}{3}$ で最小値 -4

$\boxed{12}$ (1)　$\log_2 x+\log_2 y=3$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2)　正の実数 x，y が $xy=100$ を満たすとき，$(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　(1)　$x=y=2\sqrt{2}$ のとき最小値 16　　(2)　$x=y=10$ のとき最小値 2

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$，$y>0$

$\log_2 x+\log_2 y=3$ から　$\log_2 xy=3$　ゆえに　$xy=8$

$x^2>0$，$y^2>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)により

$$x^2+y^2\geqq 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy=16$$

等号が成り立つのは，$x^2=y^2$ かつ $xy=8$　すなわち　$x=y=2\sqrt{2}$ のときである。

したがって　$x=y=2\sqrt{2}$ のとき最小値 16

(2)　$x>0$，$y>0$ より $xy>0$ であるから，$xy=100$ の両辺の常用対数をとると

$\log_{10}xy=\log_{10}100$

したがって　$\log_{10}x+\log_{10}y=2$

$\log_{10}x=X$，$\log_{10}y=Y$ とおくと　$X+Y=2$

ゆえに　$Y=2-X$　……①

$P=(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$ として，P を X の式で表すと

$$P=X^3+Y^3=X^3+(2-X)^3=X^3+8-12X+6X^2-X^3$$

$$=6X^2-12X+8=6(X-1)^2+2$$

X はすべての実数値をとり，P は $X=1$ で最小値 2 をとる。

① から　$X=1$ のとき　$Y=1$

$X=1$，$Y=1$ のとき　$x=10$，$y=10$

したがって　$x=y=10$ のとき最小値 2

$\boxed{13}$ 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=(\log_3 x)^2+2\log_3 x$　　(2)　$y=\left(\log_2\frac{4}{x}\right)\left(\log_2\frac{x}{2}\right)$

(3)　$y=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$　$(1\leqq x\leqq 27)$

解答　(1)　$x=\frac{1}{3}$ で最小値 -1，最大値はない

(2)　$x=2\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$，最小値はない

(3)　$x=1$ で最大値 3，$x=9$ で最小値 -1

解説

(1)　$\log_3 x=t$ とおくと　$y=t^2+2t=(t+1)^2-1$

したがって，y は $t=-1$ で最小値 -1 をとる。

$t=-1$ のとき　$\log_3 x=-1$

ゆえに　$x=\frac{1}{3}$

よって，y は $x=\frac{1}{3}$ で最小値 -1 をとる。また，最大値はない。

(2)　$y=(\log_2 4-\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)=(2-\log_2 x)(\log_2 x-1)$

$\log_2 x=t$ とおくと

$$y=(2-t)(t-1)=-t^2+3t-2=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

したがって，y は $t=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

$t=\frac{3}{2}$ のとき　$\log_2 x=\frac{3}{2}$

ゆえに　$x=2\sqrt{2}$

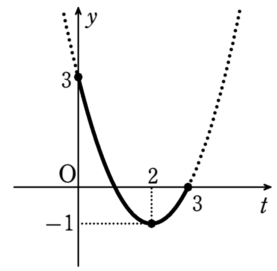
よって，y は $x=2\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。また，最小値はない。

(3)　$\log_3 x=t$ とおく。

$\log_3 x$ の底 3 は 1 より大きいから，$1\leqq x\leqq 27$ のとき　$\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 27$

よって　$0\leqq t\leqq 3$　……①

また　$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$



① の範囲で y は

$t=0$ で最大値 3，　$t=2$ で最小値 -1

をとる。

$t=0$ のとき　$\log_3 x=0$　ゆえに　$x=1$

$t=2$ のとき　$\log_3 x=2$　ゆえに　$x=9$

したがって，y は

$x=1$ で最大値 3，$x=9$ で最小値 -1

をとる。

$\boxed{14}$ 関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)$ の最小値を求めよ。

解答　$x=3$ で最小値 -2

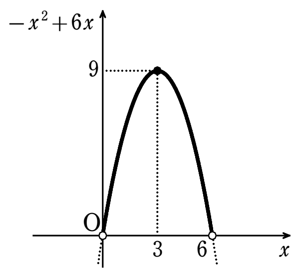
解説

真数は正であるから　$x>0$ かつ $6-x>0$

よって　$0<x<6$　……①

また　$y=\log_{\frac{1}{3}}x(6-x)=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+6x)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\{-(x-3)^2+9\}$



① の範囲で $-(x-3)^2+9$ は，$x=3$ で最大値 9

をとる。

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから，このとき y は最小で，

最小値は　$\log_{\frac{1}{3}}9=-2$

よって，y は $x=3$ で最小値 -2 をとる。

$\boxed{15}$ $x>0$，$y>0$，$x+2y=8$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。

解答　$x=4$，$y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$

解説

$x+2y=8$ から　　$x=8-2y$　……①

$x>0$ から　　$8-2y>0$　　　よって　　$y<4$

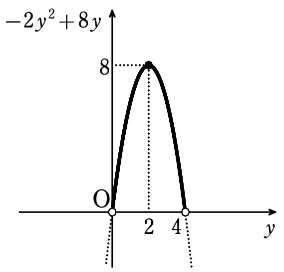
$y>0$ と合わせて　　$0<y<4$　……②

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy=\log_{10}(8-2y)y$$
$$=\log_{10}(-2y^2+8y)=\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$$

$-2(y-2)^2+8$ は，② の範囲で

　$y=2$ で最大値 8

をとる。



底 10 は 1 より大きいから，このとき

$\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$ も最大で，その最大値は

　$\log_{10}8=3\log_{10}2$

また，① から，$y=2$ のとき　　$x=4$

よって，$\log_{10}x+\log_{10}y$ は

　$x=4$，$y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$

をとる。

$\boxed{16}$ $x\geqq 2$，$y\geqq 1$，$x^2y=64$ のとき，$(\log_2x)(\log_2y)$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　$x=2\sqrt{2}$，$y=8$ で最大値 $\dfrac{9}{2}$；$x=8$，$y=1$ で最小値 0

解説

$\log_2x=X$，$\log_2y=Y$ とおく。

2 を底として $x^2y=64$ の両辺の対数をとると　　$\log_2x^2y=\log_2 64$

よって　　$2\log_2x+\log_2y=6$　　　　ゆえに　　$2X+Y=6$

したがって　　$Y=6-2X$　……①

また，$x\geqq 2$，$y\geqq 1$ から　　$\log_2x\geqq\log_2 2$，$\log_2y\geqq\log_2 1$

すなわち　　$\log_2x\geqq 1$，$\log_2y\geqq 0$

よって　　$X\geqq 1$，$Y=6-2X\geqq 0$

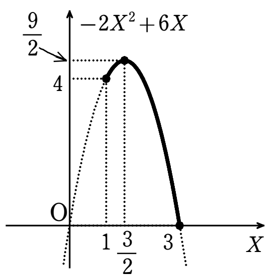
ゆえに　　$1\leqq X\leqq 3$　……②

また　　$(\log_2x)(\log_2y)=XY=X(6-2X)$
$$=-2X^2+6X$$
$$=-2\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

② の範囲で，$(\log_2x)(\log_2y)$ は

　$X=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{2}$，$X=3$ で最小値 0

をとる。



$X=\dfrac{3}{2}$ のとき，① から　　$Y=3$　　　よって　　$x=2\sqrt{2}$，$y=8$

$X=3$ のとき，① から　　$Y=0$　　　よって　　$x=8$，$y=1$

以上から　　$x=2\sqrt{2}$，$y=8$ で最大値 $\dfrac{9}{2}$；$x=8$，$y=1$ で最小値 0

$\boxed{17}$ $x>0$，$y>0$，$x+2y=4$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。
また，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=2$，$y=1$ のとき最大値 $\log_{10}2$

解説

$x+2y=4$ から　　$x=4-2y$　……①

$x>0$ から　　$4-2y>0$　　　よって　　$y<2$

$y>0$ と合わせて　　$0<y<2$　……②

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy=\log_{10}(4-2y)y$$
$$=\log_{10}(-2y^2+4y)=\log_{10}\{-2(y-1)^2+2\}$$

② の範囲で $-2(y-1)^2+2$ は，$y=1$ で最大値 2 をとる。

底 10 は 1 より大きいから，このとき $\log_{10}\{-2(y-1)^2+2\}$ も最大で，その最大値は

$$\log_{10}2$$

① から，$y=1$ のとき　　$x=2$

したがって　　$x=2$，$y=1$ のとき最大値 $\log_{10}2$

$\boxed{18}$ 次の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=\log_{\frac{1}{4}}x+\log_{\frac{1}{4}}(8-x)$ の最小値　　　(2)　$y=2\log_5x-(\log_5x)^2$ の最大値

(3)　$y=(\log_2x)^2-\log_2x^6+5$ $(4\leqq x\leqq 64)$ の最大値と最小値

解答　(1)　$x=4$ で最小値 -2　　(2)　$x=5$ で最大値 1
　　　(3)　$x=64$ で最大値 5，$x=8$ で最小値 -4

解説

(1)　真数は正であるから　　　$x>0$ かつ $8-x>0$

　よって　　$0<x<8$　……①

　また　　$y=\log_{\frac{1}{4}}x(8-x)=\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+8x)$

$$=\log_{\frac{1}{4}}\{-(x-4)^2+16\}$$

　① の範囲で $-(x-4)^2+16$ は，$x=4$ で最大値 16 をとる。

　底 $\dfrac{1}{4}$ は 1 より小さいから，このとき y は最小で，最小値は　　$\log_{\frac{1}{4}}16=-2$

　よって　　$x=4$ で最小値 -2

(2)　$\log_5x=t$ とおくと　　$y=2t-t^2=-(t-1)^2+1$

　よって，y は $t=1$ すなわち $x=5$ で最大値 1 をとる。

(3)　$y=(\log_2x)^2-6\log_2x+5$　$(4\leqq x\leqq 64)$

　$\log_2x=t$ とおく。

　$4\leqq x\leqq 64$ から　　$\log_2 4\leqq\log_2x\leqq\log_2 64$

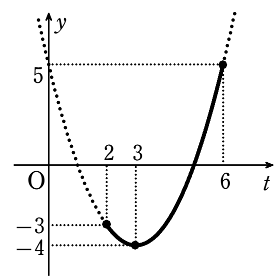
　よって　　$2\leqq t\leqq 6$　……①

　また　　$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

　① の範囲で y は

　　$t=6$ すなわち $x=64$ で最大値 5，

　　$t=3$ すなわち $x=8$ で最小値 -4　をとる。



$\boxed{19}$ 次の最大値または最小値を求めよ。

(1)　$y=\log_3(2x-x^2)$ の最大値　　　　　(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-x^2)$ の最小値

解答　(1)　$x=1$ のとき最大値 0　　(2)　$x=2$ のとき最小値 -2

解説

(1)　真数は正であるから　$2x-x^2>0$

　よって　$x(x-2)<0$　ゆえに　$0<x<2$　……①

　$2x-x^2=-(x-1)^2+1$ から，① の範囲で，$2x-x^2$ は $x=1$ のとき最大値 1 をとる。

　底 3 は 1 より大きいから，このとき y も最大となり，最大値は $\log_3 1=0$

　よって，y は $x=1$ のとき最大値 0 をとる。

(2)　真数は正であるから　$4x-x^2>0$

　よって，$x(x-4)<0$　ゆえに　$0<x<4$　……①

　$4x-x^2=-(x-2)^2+4$ から，① の範囲で，$4x-x^2$ は $x=2$ のとき最大値 4 をとる。

　底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから，このとき y は最小となり，最小値は $\log_{\frac{1}{2}}4=-2$

　よって，y は $x=2$ のとき最小値 -2 をとる。

$\boxed{20}$ 関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)\left(\log_8\dfrac{x}{8}\right)$ $(1\leqq x\leqq 16)$ は $x=$ ア $\boxed{}$ で最小値 イ $\boxed{}$ をとり，

$x=$ ウ $\boxed{}$ で最大値 エ $\boxed{}$ をとる。また，$y=\dfrac{5}{4}$ となる x の値は $x=$ オ $\boxed{}$ であ

る。

解答　(ア)　$4\sqrt{2}$　　(イ)　$-\dfrac{1}{12}$　　(ウ)　1　　(エ)　2　　(オ)　$\sqrt{2}$

解説

$$y=\left(\log_2\frac{x}{4}\right)\left(\log_8\frac{x}{8}\right)=(\log_2x-2)(\log_8x-1)=(\log_2x-2)\left(\frac{\log_2x}{\log_2 8}-1\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\log_2x)^2-\frac{5}{3}\log_2x+2$$

$\log_2x=t$ とおくと，底 2 は 1 より大きいから $1\leqq x\leqq 16$ のとき

　$\log_2 1\leqq t\leqq\log_2 16$　　すなわち　　$0\leqq t\leqq 4$　……①

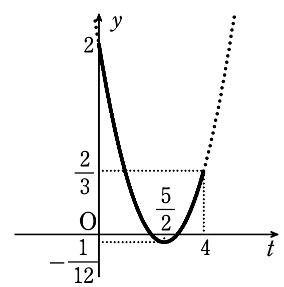
y を t の式で表すと

$$y=\frac{1}{3}t^2-\frac{5}{3}t+2=\frac{1}{3}\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{12}$$

① の範囲において，y は

　$t=\dfrac{5}{2}$ で最小値 $-\dfrac{1}{12}$，$t=0$ で最大値 2

をとる。



$t=\dfrac{5}{2}$ となるのは，$\log_2x=\dfrac{5}{2}$ から　　$x=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

$t=0$ となるのは，$\log_2x=0$ から　　$x=1$

のときである。

よって，y は $x=$ ア$4\sqrt{2}$ で最小値 イ$-\dfrac{1}{12}$ をとり，$x=$ ウ1 で最大値 エ2 をとる。

また，$y=\dfrac{5}{4}$ のとき，$\dfrac{1}{3}\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{4}$ から　　$\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2=4$

ゆえに　　$t-\dfrac{5}{2}=\pm 2$　　　よって　　$t=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{9}{2}$

① を満たすものは　　$t=\dfrac{1}{2}$

このとき，$\log_2 x=\frac{1}{2}$ から　　$x=2^{\frac{1}{2}}={}^{オ}\sqrt{2}$

$\boxed{21}$ 関数 $y=(\log_3 x)^2-\log_{\sqrt{3}}x^2+\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x}$ $\left(\frac{1}{27}\leqq x\leqq 27\right)$ ……① について考える。

$t=\log_3 x$ とおき，y を t の式で表すと ${}^{ア}\boxed{}$ となる。よって，関数 ① は $x={}^{イ}\boxed{}$ のとき最小値 ${}^{ウ}\boxed{}$ をとり，$x={}^{エ}\boxed{}$ のとき最大値 ${}^{オ}\boxed{}$ をとる。

解答　(ア)　$y=t^2-3t-2$　　(イ)　$3\sqrt{3}$　　(ウ)　$-\frac{17}{4}$　　(エ)　$\frac{1}{27}$　　(オ)　16

解説

$y=(\log_3 x)^2-\log_{\sqrt{3}}x^2+\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x}$ $\left(\frac{1}{27}\leqq x\leqq 27\right)$ ……①

$t=\log_3 x$ のとき，$\frac{1}{27}\leqq x\leqq 27$ であるから　　$-3\leqq t\leqq 3$ ……②

また　　$\log_{\sqrt{3}}x^2=\dfrac{\log_3 x^2}{\log_3\sqrt{3}}=\dfrac{2\log_3 x}{\frac{1}{2}\log_3 3}=4t$

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x}=\frac{\log_3 9-\log_3 x}{\log_3\frac{1}{3}}=-2+t$$

よって，y を t の式で表すと　　$y=t^2-4t+(-2+t)$　すなわち　${}^{ア}y=t^2-3t-2$

このとき，$y=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$ から，② の範囲において，y は

$t=\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{17}{4}$，$t=-3$ で最大値 16

をとる。

$t=\log_3 x$ より，$x=3^t$ であるから

$t=\frac{3}{2}$ のとき $x=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$，$t=-3$ のとき $x=3^{-3}=\frac{1}{27}$

したがって，関数 ① は

$x={}^{イ}3\sqrt{3}$ のとき最小値 ${}^{ウ}-\frac{17}{4}$，$x={}^{エ}\frac{1}{27}$ のとき最大値 ${}^{オ}16$

をとる。

$\boxed{22}$ 関数 $f(x)=(\log_2 x^2)^2+\log_2(6x^4)$ $\left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 8\right)$ は，$x=\dfrac{\sqrt{{}^{ア}\boxed{}}}{{}^{イ}\boxed{}}$ で最小値 $\log_2{}^{ウ}\boxed{}$ をとる。

解答　$\dfrac{\sqrt{(ア)}}{(イ)}$　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(ウ)　3

解説

$$f(x)=(2\log_2 x)^2+(\log_2 6+\log_2 x^4)=4(\log_2 x)^2+(1+\log_2 3+4\log_2 x)$$
$$=4\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)^2+\log_2 3$$

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 8$ より　　$-1\leqq\log_2 x\leqq 3$

よって，$f(x)$ は $\log_2 x=-\frac{1}{2}$ すなわち $x=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{{}^{ア}2}}{{}^{イ}2}$ のとき最小値 $\log_2{}^{ウ}3$ をとる。

$\boxed{23}$ $x>1$ の範囲で，関数 $f(x)=\log_3 x+\log_x 9$ の最小値を求めよ。

解答　$x=3^{\sqrt{2}}$ で最小値 $2\sqrt{2}$

解説

$f(x)=\log_3 x+\dfrac{\log_3 9}{\log_3 x}=\log_3 x+\dfrac{2}{\log_3 x}$

$x>1$ より $\log_3 x>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$f(x)\geqq 2\sqrt{\log_3 x\cdot\frac{2}{\log_3 x}}=2\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは，$\log_3 x=\dfrac{2}{\log_3 x}$ のときである。

$\log_3 x=\dfrac{2}{\log_3 x}$ から　　$(\log_3 x)^2=2$

$\log_3 x>0$ から　　$\log_3 x=\sqrt{2}$　　　よって　$x=3^{\sqrt{2}}$

したがって，$x=3^{\sqrt{2}}$ で最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。