対数不等式クイズ(難)

1 次の不等式を解け。

$$2\log_2(2-x) \geqq \log_2 x$$

解答　$0<x\leqq 1$

解説

真数は正であるから，$2-x>0$ かつ $x>0$ より

$0<x<2$　……①

与えられた不等式は　$\log_2(2-x)^2 \geqq \log_2 x$

底 2 は 1 より大きいから　$(2-x)^2 \geqq x$

整理して　$x^2-5x+4\geqq 0$　すなわち　$(x-1)(x-4)\geqq 0$

これを解いて　$x\leqq 1$，$4\leqq x$　……②

①，② から，解は　$0<x\leqq 1$

2 次の不等式を解け。

(1)　$2\log_2(3-x) \leqq \log_2 4x$　　(2)　$2\log_{0.5}(x-2) < \log_{0.5}(2x-1)$

(3)　$\log_2(x+1)+\log_2(x-2) \geqq 2$

解答　(1)　$1\leqq x<3$　(2)　$x>5$　(3)　$x\geqq 3$

解説

(1)　真数は正であるから，$3-x>0$ かつ $4x>0$ より　$0<x<3$　……①

与えられた不等式は　$\log_2(3-x)^2 \leqq \log_2 4x$

底 2 は 1 より大きいから　$(3-x)^2\leqq 4x$

整理して　$x^2-10x+9\leqq 0$　すなわち　$(x-1)(x-9)\leqq 0$

これを解いて　$1\leqq x\leqq 9$　……②

①，② から，解は　$1\leqq x<3$

(2)　真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $2x-1>0$ より　$x>2$　……①

与えられた不等式は　$\log_{0.5}(x-2)^2 < \log_{0.5}(2x-1)$

底 0.5 は 1 より小さいから　$(x-2)^2>2x-1$

整理して　$x^2-6x+5>0$　すなわち　$(x-1)(x-5)>0$

これを解いて　$x<1$，$5<x$　……②

①，② から，解は　$x>5$

(3)　真数は正であるから，$x+1>0$ かつ $x-2>0$ より　$x>2$　……①

与えられた不等式は　$\log_2(x+1)(x-2) \geqq \log_2 2^2$

すなわち　$\log_2(x+1)(x-2)\geqq \log_2 4$

底 2 は 1 より大きいから　$(x+1)(x-2)\geqq 4$

整理して　$x^2-x-6\geqq 0$　すなわち　$(x+2)(x-3)\geqq 0$

これを解いて　$x\leqq -2$，$3\leqq x$　……②

①，② から，解は　$x\geqq 3$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_8(x+2)^2=2$　　(2)　$\log_3(x-2)+\log_3(2x-7)=2$

(3)　$\log_2 x+\log_2(6-x)<3$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqq -1$

解答　(1)　$x=6$，-10　(2)　$x=5$　(3)　$0<x<2$，$4<x<6$　(4)　$2<x\leqq 3$

解説

(1)　対数の定義から　$(x+2)^2=8^2$　ゆえに　$x+2=\pm 8$

すなわち　$x=-2\pm 8$　よって　$x=6$，-10

(2)　真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $2x-7>0$ より　$x>\frac{7}{2}$

方程式を変形すると　$\log_3(x-2)(2x-7)=2$

よって　$(x-2)(2x-7)=3^2$　整理して　$2x^2-11x+5=0$

すなわち　$(x-5)(2x-1)=0$

$x>\frac{7}{2}$ であるから，解は　$x=5$

(3)　真数は正であるから，$x>0$ かつ $6-x>0$ より

$0<x<6$　……①

不等式を変形すると　$\log_2 x(6-x)<3$

底 2 は 1 より大きいから　$x(6-x)<2^3$

整理して　$x^2-6x+8>0$　すなわち　$(x-2)(x-4)>0$

これを解いて　$x<2$，$4<x$　……②

①，② から，解は　$0<x<2$，$4<x<6$

(4)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $x-2>0$ より

$x>2$　……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x-2)\geqq -1$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$(x-1)(x-2)\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

整理して　$x^2-3x\leqq 0$　すなわち　$x(x-3)\leqq 0$

これを解いて　$0\leqq x\leqq 3$　……②

①，② から，解は　$2<x\leqq 3$

4 次の方程式，不等式を解け。[各 15 点]

(1)　$2\log_2 x-\log_2(x+3)=2$　　(2)　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+\log_{\frac{1}{6}} x\geqq -1$

解答　(1)　真数は正であるから　$x>0$，$x+3>0$

ゆえに　$x>0$　……①

方程式から　$\log_2 x^2-\log_2(x+3)=\log_2 2^2$

よって　$\log_2 x^2=\log_2(x+3)+\log_2 4$

ゆえに　$x^2=4(x+3)$

整理すると　$x^2-4x-12=0$

したがって　$(x-6)(x+2)=0$

① から　$x=6$

(2)　真数は正であるから　$x-1>0$，$x>0$

ゆえに　$x>1$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq \log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq \log_{\frac{1}{6}} 6$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$(x-1)x\leqq 6$

ゆえに　$(x+2)(x-3)\leqq 0$

よって　$-2\leqq x\leqq 3$

① から　$1<x\leqq 3$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$，$x+3>0$

ゆえに　$x>0$　……①

方程式から　$\log_2 x^2-\log_2(x+3)=\log_2 2^2$

よって　$\log_2 x^2=\log_2(x+3)+\log_2 4$

ゆえに　$x^2=4(x+3)$

整理すると　$x^2-4x-12=0$

したがって　$(x-6)(x+2)=0$

① から　$x=6$

(2)　真数は正であるから　$x-1>0$，$x>0$

ゆえに　$x>1$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq \log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq \log_{\frac{1}{6}} 6$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$(x-1)x\leqq 6$

ゆえに　$(x+2)(x-3)\leqq 0$

よって　$-2\leqq x\leqq 3$

① から　$1<x\leqq 3$

5 次の不等式を解け。

(1)　$2\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$　　(2)　$2(\log_2 x)^2+3\log_2 4x<8$

解答　(1)　$2<x<5$　(2)　$\frac{1}{4}<x<\sqrt{2}$

解説

(1)　真数は正であるから　$x-2>0$　かつ　$2x-1>0$

よって　$x>2$

このとき，与式から　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)^2>\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$(x-2)^2<2x-1$

整理すると　$x^2-6x+5<0$

これを解くと　$1<x<5$

$x>2$ との共通範囲を求めて　$2<x<5$

(2)　真数は正であるから　$x>0$

与式から　$2(\log_2 x)^2+3\log_2 x-2<0$

よって　$(\log_2 x+2)(2\log_2 x-1)<0$

これを解くと　$-2<\log_2 x<\frac{1}{2}$

すなわち　$\log_2 2^{-2}<\log_2 x<\log_2 2^{\frac{1}{2}}$

底 2 は 1 より大きいから　$\frac{1}{4}<x<\sqrt{2}$

6 次の不等式を解け。

(1)　$\log_{\frac{1}{3}}(-x)\geqq 2$　　(2)　$\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}(4-x)<1$

(3) $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 4 < 0$　　(4) $\log_7 x - 3\log_x 7x \leqq -1$

解答　(1) $-\dfrac{1}{9} \leqq x < 0$　(2) $0 < x < 2-\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2} < x < 4$

(3) $2^{1-\sqrt{5}} < x < 2^{1+\sqrt{5}}$　(4) $0 < x \leqq \dfrac{1}{7}$，$1 < x \leqq 343$

解説

(1) 真数は正であるから　$-x > 0$　すなわち　$x < 0$　……①

このとき，与式から　$\log_{\frac{1}{3}}(-x) \geqq \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$-x \leqq \dfrac{1}{9}$　　よって　$x \geqq -\dfrac{1}{9}$　……②

①，② から　$-\dfrac{1}{9} \leqq x < 0$

(2) 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$4-x > 0$

よって　$0 < x < 4$　……①

このとき，与式から　$\log_2 x + \log_2(4-x) < 1$

すなわち　$\log_2 x(4-x) < \log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$x(4-x) < 2$

整理すると　$x^2 - 4x + 2 > 0$

これを解くと　$x < 2-\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2} < x$　……②

①，② から　$0 < x < 2-\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2} < x < 4$

(3) 真数は正であるから　$x > 0$　……①

このとき，与式から　$1-\sqrt{5} < \log_2 x < 1+\sqrt{5}$

底 2 は 1 より大きいから　$2^{1-\sqrt{5}} < x < 2^{1+\sqrt{5}}$

これは ① を満たすから，求める解である。

(4) 底と真数の条件から　$x > 0$　かつ　$x \neq 1$

$$\log_7 x - 3\log_x 7x = \log_7 x - 3(\log_x 7 + \log_x x) = \log_7 x - 3\left(\frac{1}{\log_7 x} + 1\right)$$

$$= \log_7 x - \frac{3}{\log_7 x} - 3$$

$\log_7 x = t$ とおくと，$x \neq 1$ から　$t \neq 0$

不等式は　$t - \dfrac{3}{t} - 3 \leqq -1$　……①

[1]　$t > 0$ のとき，① の両辺に t を掛けて整理すると

$t^2 - 2t - 3 \leqq 0$

ゆえに　$(t+1)(t-3) \leqq 0$

よって　$-1 \leqq t \leqq 3$

$t > 0$ であるから　$0 < t \leqq 3$

[2]　$t < 0$ のとき，① の両辺に t を掛けて整理すると

$t^2 - 2t - 3 \geqq 0$

ゆえに　$(t+1)(t-3) \geqq 0$

よって　$t \leqq -1$，$3 \leqq t$

$t < 0$ であるから　$t \leqq -1$

以上から，① を満たす t の範囲は　$t \leqq -1$，$0 < t \leqq 3$

ゆえに　$\log_7 x \leqq -1$，$0 < \log_7 x \leqq 3$

すなわち　$\log_7 x \leqq \log_7 7^{-1}$，$\log_7 7^0 < \log_7 x \leqq \log_7 7^3$

底 7 は 1 より大きいから　$x \leqq 7^{-1}$，$7^0 < x \leqq 7^3$

したがって　$0 < x \leqq \dfrac{1}{7}$，$1 < x \leqq 343$

7 x についての不等式 $\log_a(2x^2+x-3) > \log_a(x^2+4x-5)$ を解け。

解答　$0 < a < 1$ のとき $1 < x < 2$；$a > 1$ のとき $x < -5$，$2 < x$

解説

真数は正であるから　$2x^2+x-3 > 0$　かつ　$x^2+4x-5 > 0$

$2x^2+x-3 > 0$ から　$(2x+3)(x-1) > 0$　　よって　$x < -\dfrac{3}{2}$，$1 < x$　……①

$x^2+4x-5 > 0$ から　$(x+5)(x-1) > 0$　　よって　$x < -5$，$1 < x$　……②

①，② の共通範囲は　$x < -5$，$1 < x$　……③

[1]　$0 < a < 1$ のとき，与式から　$2x^2+x-3 < x^2+4x-5$

よって　$(x-1)(x-2) < 0$　　ゆえに　$1 < x < 2$　……④

③，④ から，解は　$1 < x < 2$

[2]　$a > 1$ のとき，与式から　$2x^2+x-3 > x^2+4x-5$

整理して　$x^2-3x+2 > 0$　　よって　$(x-1)(x-2) > 0$

ゆえに　$x < 1$，$2 < x$　……⑤

③，⑤ から，解は　$x < -5$，$2 < x$

8 次の不等式を解け。

(1) $\log_2|x-1| + \log_{\frac{1}{4}}|4-x| < 2$

(2) $\log_2\{\log_3(x-1) + \log_3(x+7)\} < 1$

解答　(1) $-7-4\sqrt{7} < x < 1$，$1 < x < -7+4\sqrt{7}$，$5 < x < 13$

(2) $-3+\sqrt{17} < x < 2$

解説

(1) 真数は正であるから　$|x-1| > 0$　かつ　$|4-x| > 0$

ゆえに　$x \neq 1$　かつ　$x \neq 4$

不等式から　$\log_{2^2}|x-1|^2 + \log_{4^{-1}}|4-x| < 2$

よって　$\log_4(x-1)^2 - \log_4|4-x| < \log_4 4^2$

ゆえに　$\log_4(x-1)^2 < \log_4|4-x| + \log_4 4^2$

すなわち　$\log_4(x-1)^2 < \log_4(|4-x| \cdot 4^2)$

底 4 は 1 より大きいから　$(x-1)^2 < 16|4-x|$　……①

[1]　$x > 4$ のとき

① から　$(x-1)^2 < 16(x-4)$

展開して整理すると　$x^2 - 18x + 65 < 0$

左辺を因数分解すると　$(x-5)(x-13) < 0$

したがって　$5 < x < 13$　　これは $x > 4$ を満たす。

[2]　$x < 4$（$x \neq 1$）のとき

① から　$(x-1)^2 < 16(4-x)$

展開して整理すると　$x^2 + 14x - 63 < 0$

これを解くと　$-7-4\sqrt{7} < x < -7+4\sqrt{7}$

$f(x) = x^2 + 14x - 63$ とすると

$f(1) = 1^2 + 14 \cdot 1 - 63 = -48 < 0$

$f(4) = 4^2 + 14 \cdot 4 - 63 = 9 > 0$

したがって　$1 < -7+4\sqrt{7} < 4$

$x < 4$（$x \neq 1$）であるから，不等式の解は

$-7-4\sqrt{7} < x < 1$，$1 < x < -7+4\sqrt{7}$

[1]，[2] から，求める解は

$-7-4\sqrt{7} < x < 1$，$1 < x < -7+4\sqrt{7}$，$5 < x < 13$

(2) 真数は正であるから　$x-1 > 0$　かつ　$x+7 > 0$　……①

更に，$\log_3(x-1) + \log_3(x+7) > 0$ から

$\log_3\{(x-1)(x+7)\} > \log_3 1$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-1)(x+7) > 1$

ゆえに　$x^2 + 6x - 8 > 0$

よって　$x < -3-\sqrt{17}$，$-3+\sqrt{17} < x$　……②

$1 < -3+\sqrt{17}$ であるから，①，② より，真数に関する条件は

$-3+\sqrt{17} < x$　……③

このとき，不等式から　$\log_2[\log_3\{(x-1)(x+7)\}] < \log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから

$\log_3\{(x-1)(x+7)\} < 2$

すなわち　$\log_3\{(x-1)(x+7)\} < \log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-1)(x+7) < 9$

ゆえに　$x^2 + 6x - 16 < 0$　すなわち　$(x+8)(x-2) < 0$

よって　$-8 < x < 2$　……④

③，④ の共通範囲を求めて　$-3+\sqrt{17} < x < 2$

9 次の不等式を解け。

(1) $2\log_{0.1}(x-1) < \log_{0.1}(7-x)$　　(2) $\log_{10}(x-3) + \log_{10} x \leqq 1$

(3) $\log_2(1-x) + \log_2(3-x) < 1 + \log_2 3$

解答　(1) $3 < x < 7$　(2) $3 < x \leqq 5$　(3) $2-\sqrt{7} < x < 1$

解説

(1) 真数は正であるから　$x-1 > 0$ かつ $7-x > 0$

よって　$1 < x < 7$　……①

与えられた不等式は　$\log_{0.1}(x-1)^2 < \log_{0.1}(7-x)$

底 0.1 は 1 より小さいから　$(x-1)^2 > 7-x$

整理して　$x^2 - x - 6 > 0$　すなわち　$(x+2)(x-3) > 0$

これを解いて　$x < -2$，$3 < x$　……②

①，② から，解は　$3 < x < 7$

(2) 真数は正であるから　$x-3 > 0$ かつ $x > 0$

よって　$x > 3$　……①

不等式を変形すると　$\log_{10}(x-3)x \leqq \log_{10} 10$

底 10 は 1 より大きいから　$(x-3)x \leqq 10$

整理して　$x^2 - 3x - 10 \leqq 0$　すなわち　$(x+2)(x-5) \leqq 0$

これを解いて　$-2 \leqq x \leqq 5$　……②

①，② から，解は　$3 < x \leqq 5$

(3) 真数は正であるから　$1-x > 0$ かつ $3-x > 0$

よって　$x < 1$　……①

$1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$ であるから，与えられた不等式は

$\log_2(1-x)(3-x) < \log_2 6$

底 2 は 1 より大きいから　$(1-x)(3-x) < 6$

整理して　$x^2 - 4x - 3 < 0$

これを解いて　$2-\sqrt{7} < x < 2+\sqrt{7}$　……②

①，② から，解は　$2-\sqrt{7}<x<1$

$\boxed{10}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+3=0$　　(2) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{4}} x=0$

(3) $(\log_3 x)^2-\log_9 x^2-2\leqq 0$　　(4) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{3}} x^2-15>0$

解答　(1) $x=2,\ 8$　(2) $x=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$　(4) $0<x<\dfrac{1}{27},\ 243<x$

解説

(1) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^4>0$

すなわち　$x>0$ ……①

方程式を変形すると　$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

$\log_2 x=t$ とおくと　$t^2-4t+3=0$

よって　$(t-1)(t-3)=0$

ゆえに　$t=1,\ 3$

$t=1$ すなわち $\log_2 x=1$ のとき　$x=2^1=2$

$t=3$ すなわち $\log_2 x=3$ のとき　$x=2^3=8$

したがって　$x=2,\ 8$

これらは ① を満たす。

(2) 真数は正であるから　$x>0$ ……①

方程式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=0$

すなわち　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x=0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$ とおくと　$t^2-\dfrac{t}{2}=0$

よって　$t\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　ゆえに　$t=0,\ \dfrac{1}{2}$

$t=0$ すなわち $\log_{\frac{1}{2}} x=0$ のとき　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$x=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これらは ① を満たす。

(3) 真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$(\log_3 x)^2-\dfrac{\log_3 x^2}{\log_3 9}-2\leqq 0$

すなわち　$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2\leqq 0$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t^2-t-2\leqq 0$　　よって　$(t+1)(t-2)\leqq 0$

これを解いて　$-1\leqq t\leqq 2$

ゆえに　$-1\leqq \log_3 x\leqq 2$　　すなわち　$\log_3\dfrac{1}{3}\leqq \log_3 x\leqq \log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$ ……②

①，② から，解は　$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+2\log_{\frac{1}{3}} x-15>0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$ とおくと　$t^2+2t-15>0$

よって　$(t-3)(t+5)>0$　　これを解いて　$t<-5,\ 3<t$

ゆえに　$\log_{\frac{1}{3}} x<-5,\ 3<\log_{\frac{1}{3}} x$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} 243,\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}<\log_{\frac{1}{3}} x$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>243,\ \dfrac{1}{27}>x$ ……②

①，② から，解は　$0<x<\dfrac{1}{27},\ 243<x$

$\boxed{11}$ 次の x についての不等式を解け。ただし，a は 1 と異なる正の定数とする。

(1) $\log_a(x+3)<\log_a(2x+2)$　　(2) $\log_a(x^2-3x-10)\geqq \log_a(2x-4)$

解答　(1) $0<a<1$ のとき　$-1<x<1$

$a>1$ のとき　$x>1$

(2) $0<a<1$ のとき　$5<x\leqq 6$

$a>1$ のとき　$x\geqq 6$

解説

(1) 真数は正であるから　$x+3>0$ かつ $2x+2>0$

よって　$x>-3$ かつ $x>-1$

ゆえに　$x>-1$ ……①

[1] $0<a<1$ のとき

不等式から　$x+3>2x+2$

これを解いて　$x<1$ ……②

①，② から，解は　$-1<x<1$

[2] $a>1$ のとき

不等式から　$x+3<2x+2$

これを解いて　$x>1$ ……③

①，③ から，解は　$x>1$

(2) 真数は正であるから　$x^2-3x-10>0$ かつ $2x-4>0$

よって　$(x+2)(x-5)>0$ かつ $x>2$

ゆえに　$x>5$ ……①

[1] $0<a<1$ のとき

不等式から　$x^2-3x-10\leqq 2x-4$

整理して　$x^2-5x-6\leqq 0$

よって　$(x+1)(x-6)\leqq 0$

これを解いて　$-1\leqq x\leqq 6$ ……②

①，② から，解は　$5<x\leqq 6$

[2] $a>1$ のとき

不等式から　$x^2-3x-10\geqq 2x-4$

よって　$(x+1)(x-6)\geqq 0$

これを解いて　$x\leqq -1,\ 6\leqq x$ ……③

①，③ から，解は　$x\geqq 6$

$\boxed{12}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_5(x-2)<\log_5(6-x)$　　(2) $2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3) $\log_3(x-4)+\log_3(x-2)<1$　　(4) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^3-4\leqq 0$

解答　(1) $2<x<4$　(2) $2<x<5$　(3) $4<x<5$　(4) $\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 2$

解説

(1) 真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $6-x>0$

すなわち　$2<x<6$ ……①

底 5 は 1 より大きいから，不等式より　$x-2<6-x$

これを解いて　$x<4$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$2<x<4$

(2) 真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $x+4>0$

すなわち　$x>2$ ……①

不等式を変形すると　$\log_{0.2}(x-2)^2>\log_{0.2}(x+4)$

底 0.2 は 1 より小さいから　$(x-2)^2<x+4$

整理すると　$x^2-5x<0$

したがって　$x(x-5)<0$

これを解いて　$0<x<5$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$2<x<5$

(3) 真数は正であるから　$x-4>0$ かつ $x-2>0$

すなわち　$x>4$ ……①

不等式を変形すると　$\log_3(x-4)(x-2)<\log_3 3$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-4)(x-2)<3$

整理すると　$x^2-6x+5<0$

したがって　$(x-1)(x-5)<0$

これを解いて　$1<x<5$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$4<x<5$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^3>0$

すなわち　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-3\log_{\frac{1}{2}} x-4\leqq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$ とおくと　$t^2-3t-4\leqq 0$

ゆえに　$(t+1)(t-4)\leqq 0$

よって　$-1\leqq t\leqq 4$

ゆえに　$-1\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq 4$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

$\log_{\frac{1}{2}} 2\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 2$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 2$

$\boxed{13}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2(x+1)+\log_2(5-x)=3$　　(2)　$(\log_9 x)^2-2\log_3 x+4=0$

(3)　$\log_2(x-1)(x-3)\leqq 2$　　(4)　$(\log_3 x)^2-\log_9 x^2-12\geqq 0$

解答　(1)　$x=1,\ 3$　　(2)　$x=81$　　(3)　$2-\sqrt{5}\leqq x<1,\ 3<x\leqq 2+\sqrt{5}$

(4)　$0<x\leqq\dfrac{1}{27},\ 81\leqq x$

解説

(1)　真数は正であるから　$x+1>0$　かつ　$5-x>0$

すなわち　$-1<x<5$　…… ①

方程式を変形すると　$\log_2(x+1)(5-x)=\log_2 2^3$

ゆえに　$(x+1)(5-x)=2^3$

整理すると　$x^2-4x+3=0$

よって　$(x-1)(x-3)=0$

① より　$x=1,\ 3$

(2)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

$\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 x}{2}$ であるから，方程式は

$$\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^2-2\log_3 x+4=0$$

すなわち　$(\log_3 x)^2-8\log_3 x+16=0$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t^2-8t+16=0$

ゆえに　$(t-4)^2=0$

よって　$t=4$　すなわち　$\log_3 x=4$

したがって　$x=3^4=81$　(これは ① を満たす)

(3)　真数は正であるから　$(x-1)(x-3)>0$

すなわち　$x<1,\ 3<x$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_2(x-1)(x-3)\leqq\log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-1)(x-3)\leqq 2^2$

整理すると　$x^2-4x-1\leqq 0$

これを解いて　$2-\sqrt{5}\leqq x\leqq 2+\sqrt{5}$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$2-\sqrt{5}\leqq x<1,\ 3<x\leqq 2+\sqrt{5}$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x^2>0$

すなわち　$x>0$　…… ①

$\log_9 x^2=\dfrac{\log_3 x^2}{\log_3 9}=\dfrac{2\log_3 x}{2}=\log_3 x$ であるから，不等式は

$$(\log_3 x)^2-\log_3 x-12\geqq 0$$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t^2-t-12\geqq 0$

ゆえに　$(t+3)(t-4)\geqq 0$

よって　$t\leqq -3,\ 4\leqq t$

すなわち　$\log_3 x\leqq -3,\ 4\leqq\log_3 x$

$\log_3 x\leqq\log_3 3^{-3},\ \log_3 3^4\leqq\log_3 x$

$\log_3 x\leqq\log_3\dfrac{1}{27},\ \log_3 81\leqq\log_3 x$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq\dfrac{1}{27},\ 81\leqq x$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x\leqq\dfrac{1}{27},\ 81\leqq x$

$\boxed{14}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$3^{2x}=5^{x+1}$　　(2)　$2^{x+1}>3^x$

解答　(1)　$x=\dfrac{\log_3 5}{2-\log_3 5}$　　(2)　$x<\dfrac{1}{\log_2 3-1}$

解説

(1)　与式の両辺は正の数であるから，3 を底とする対数をとると

$$\log_3 3^{2x}=\log_3 5^{x+1}$$

すなわち　$2x=(x+1)\log_3 5$

よって　$(2-\log_3 5)x=\log_3 5$

両辺を $2-\log_3 5\ (\neq 0)$ で割ると　$x=\dfrac{\log_3 5}{2-\log_3 5}$

参考　与式の両辺の 5 を底とする対数をとると，解は次のようになる。

$$x=\frac{1}{2\log_5 3-1}$$

なお　$\dfrac{1}{2\log_5 3-1}=\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{\log_3 5}-1}=\dfrac{\log_3 5}{2-\log_3 5}$

よって，表し方は異なるが，結果は同じである。

(2)　与式の両辺は正の数であるから，2 を底とする対数をとると

$$\log_2 2^{x+1}>\log_2 3^x$$

すなわち　$x+1>x\log_2 3$

よって　$(\log_2 3-1)x<1$　…… ①

$\log_2 3>\log_2 2=1$ であるから　$\log_2 3-1>0$

ゆえに，① から　$x<\dfrac{1}{\log_2 3-1}$

参考　与式の両辺の 3 を底とする対数をとると，解は次のようになる。

$$x<\frac{\log_3 2}{1-\log_3 2}$$

$\boxed{15}$ 不等式 $\log_5(x-1)+\log_5(x+3)\leqq 1$ を解け。

解答　$1<x\leqq 2$

解説

真数は正であるから　$x-1>0$　かつ　$x+3>0$

すなわち　$x>1$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_5(x-1)(x+3)\leqq\log_5 5$

底 5 は 1 より大きいから　$(x-1)(x+3)\leqq 5$

式を整理して　$x^2+2x-8\leqq 0$　　したがって　$(x-2)(x+4)\leqq 0$

これを解いて　$-4\leqq x\leqq 2$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$1<x\leqq 2$

$\boxed{16}$ $\log_{\sqrt{2}}(x-3)-\log_2(x-3)>\log_4 9$　を満たす x の値の範囲を求めよ。

解答　$x>6$

解説

真数は正であるから，$x-3>0$ より　$x>3$　…… ①

$$\log_{\sqrt{2}}(x-3)=\frac{\log_2(x-3)}{\log_2\sqrt{2}}=2\log_2(x-3)$$

$$\log_4 9=\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}=\log_2 3$$

であるから，不等式は　$2\log_2(x-3)-\log_2(x-3)>\log_2 3$

すなわち　$\log_2(x-3)>\log_2 3$

底 2 は 1 より大きいから　$x-3>3$

すなわち　$x>6$　…… ②

①，② から，求める解は　$x>6$

$\boxed{17}$ 不等式 $\dfrac{2}{3}+\log_8(2x^2-x+1)\leqq\log_2(x+1)$ を解け。

解答　$x=1,\ x\geqq 3$

解説

真数は正であるから　$2x^2-x+1>0$　かつ　$x+1>0$

$2x^2-x+1=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$ より，真数が正であるための条件は　$x>-1$　…… ①

不等式を変形すると　$\dfrac{2}{3}\log_2 2+\dfrac{\log_2(2x^2-x+1)}{\log_2 8}\leqq\log_2(x+1)$

よって　$2\log_2 2+\log_2(2x^2-x+1)\leqq 3\log_2(x+1)$

ゆえに　$\log_2 4(2x^2-x+1)\leqq\log_2(x+1)^3$

底 2 は 1 より大きいから　$4(2x^2-x+1)\leqq(x+1)^3$

整理して　$x^3-5x^2+7x-3\geqq 0$　　すなわち　$(x-1)^2(x-3)\geqq 0$

よって　$x=1,\ x\geqq 3$　…… ②

①，② から　$x=1,\ x\geqq 3$

$\boxed{18}$ 不等式 $(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

解答　$0<x\leqq\dfrac{1}{100},\ 10000\leqq x$

解説

真数は正であるから　$x>0$

$\log_{10}x=t$ とおくと，不等式は　$t^2\geqq 2t+8$

よって　$t^2-2t-8\geqq 0$

すなわち　$(t+2)(t-4)\geqq 0$

ゆえに　$t\leqq -2,\ 4\leqq t$

すなわち　$\log_{10}x\leqq -2,\ 4\leqq\log_{10}x$

底 10 は 1 より大きいから　$x\leqq 10^{-2},\ 10^4\leqq x$

$x>0$ から　$0<x\leqq\dfrac{1}{100},\ 10000\leqq x$

$\boxed{19}$ 不等式 $\log_{81}(7-2x)+\log_{\frac{1}{9}}(x+2)\leqq 0$ を解くと

$$^{ア}\boxed{}+{}^{イ}\boxed{}\sqrt{^{ウ}\boxed{}}\leqq x<\frac{^{エ}\boxed{}}{^{オ}\boxed{}}$$

となる。

解答 (ア)$+$(イ)$\sqrt{(ウ)}\leqq x<\dfrac{(エ)}{(オ)}$　$-3+2\sqrt{3}\leqq x<\dfrac{7}{2}$

解説

真数は正であるから　$7-2x>0$　かつ　$x+2>0$

よって　$-2<x<\dfrac{7}{2}$

ここで　$\log_{81}(7-2x)=\dfrac{\log_3(7-2x)}{\log_3 81}=\dfrac{\log_3(7-2x)}{\log_3 3^4}=\dfrac{1}{4}\log_3(7-2x)$

$\log_{\frac{1}{9}}(x+2)=\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3\frac{1}{9}}=\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 3^{-2}}=-\dfrac{1}{2}\log_3(x+2)$

よって，不等式は　$\dfrac{1}{4}\log_3(7-2x)-\dfrac{1}{2}\log_3(x+2)\leqq 0$

$\log_3(7-2x)\leqq 2\log_3(x+2)$

底 3 は 1 より大きいから　$7-2x\leqq(x+2)^2$

整理すると　$x^2+6x-3\geqq 0$

これを解くと　$x\leqq -3-2\sqrt{3},\ -3+2\sqrt{3}\leqq x$

$-3-2\sqrt{3}<-2<-3+2\sqrt{3},\ -3+2\sqrt{3}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})<\sqrt{3}<\dfrac{7}{2}$ であることから

$-2<x<\dfrac{7}{2}$ との共通範囲を求めて　${}^{ア}-3+{}^{イ}2\sqrt{{}^{ウ}3}\leqq x<\dfrac{{}^{エ}7}{{}^{オ}2}$

20 不等式 $(\log_3 x)^2-5\log_3 x+4>0$ を満たす x の値の範囲は

${}^{ア}\boxed{}<x<{}^{イ}\boxed{}$，${}^{ウ}\boxed{}<x$ である。

解答 (ア) 0　(イ) 3　(ウ) 81

解説

真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$(\log_3 x-1)(\log_3 x-4)>0$

ゆえに　$\log_3 x<1,\ 4<\log_3 x$

よって　$\log_3 x<\log_3 3,\ \log_3 3^4<\log_3 x$

底 3 は 1 より大きいから　$x<3,\ 81<x$

① から，不等式の解は　${}^{ア}0<x<{}^{イ}3,\ {}^{ウ}81<x$

21 不等式 $x^{\log_3 x^3}\geqq\left(\dfrac{27}{x^2}\right)^3$ を解くと，${}^{ア}\boxed{}<x\leqq\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}^{ウ}\boxed{}}$，$x\geqq{}^{エ}\boxed{}$ である。

解答 (ア) 0　(イ) 1　(ウ) 27　(エ) 3

解説

$\log_3 x^3$ の真数について，$x^3>0$ より $x>0$ であるから

$x^{\log_3 x^3}=x^{3\log_3 x}>0,\quad x^2>0$

よって，不等式の両辺は正であり，3 を底とする対数をとると

$\log_3 x^{3\log_3 x}\geqq\log_3\left(\dfrac{27}{x^2}\right)^3$　……①

$\log_3 x^{3\log_3 x}=3\log_3 x\times\log_3 x=3(\log_3 x)^2$,

$\log_3\left(\dfrac{27}{x^2}\right)^3=3\log_3\dfrac{27}{x^2}=3(\log_3 3^3-\log_3 x^2)=3(3-2\log_3 x)=9-6\log_3 x$

であるから，① は　$3(\log_3 x)^2\geqq 9-6\log_3 x$

整理して　$(\log_3 x)^2+2\log_3 x-3\geqq 0$

ゆえに　$(\log_3 x+3)(\log_3 x-1)\geqq 0$

よって　$\log_3 x\leqq -3,\ 1\leqq\log_3 x$

ゆえに　$\log_3 x\leqq\log_3 3^{-3},\ \log_3 3\leqq\log_3 x$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq 3^{-3},\ 3\leqq x$

すなわち　$x\leqq\dfrac{1}{27},\ 3\leqq x$

$x>0$ であるから，解は　${}^{ア}0<x\leqq\dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}27},\ x\geqq{}^{エ}3$

22 $a>0,\ a\fallingdotseq 1$ のとき，x の不等式 $\log_a(x+2)\geqq\log_{a^2}(3x+16)$ を解け。

解答 $0<a<1$ のとき　$-2<x\leqq 3$,
$1<a$ のとき　$x\geqq 3$

解説

真数は正であるから　$x+2>0,\ 3x+16>0$　　よって　$x>-2$

$\log_{a^2}(3x+16)=\dfrac{\log_a(3x+16)}{\log_a a^2}=\dfrac{1}{2}\log_a(3x+16)$ であるから，与式は

$\log_a(x+2)\geqq\dfrac{1}{2}\log_a(3x+16)$　　よって　$\log_a(x+2)^2\geqq\log_a(3x+16)$

[1]　$0<a<1$ のとき

$(x+2)^2\leqq 3x+16$　　よって　$x^2+x-12\leqq 0$

すなわち　$(x+4)(x-3)\leqq 0$　　ゆえに　$-4\leqq x\leqq 3$

$x>-2$ であるから　$-2<x\leqq 3$

[2]　$1<a$ のとき

$(x+2)^2\geqq 3x+16$　　よって　$(x+4)(x-3)\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq -4,\ 3\leqq x$

$x>-2$ であるから　$x\geqq 3$

[1]，[2] から，$0<a<1$ のとき　$-2<x\leqq 3$,
$1<a$ のとき　$x\geqq 3$

23 次の不等式を解け。

(1)　$2^{2x}-2^{x+1}-48<0$　　(2)　$\log_9(\log_2 x-1)\leqq\dfrac{1}{2}$

解答 (1)　$x<3$　(2)　$2<x\leqq 16$

解説

(1)　$2^x=t$ とおくと，与えられた不等式は　$t^2-2t-48<0$

よって　$(t+6)(t-8)<0$　　ゆえに　$-6<t<8$

$t>0$ であるから　$0<t<8$

したがって　$0<2^x<8$

ゆえに　$0<2^x<2^3$　　よって　$x<3$

(2)　真数は正であるから　$x>0,\ \log_2 x-1>0$

ゆえに　$x>0,\ x>2$

共通範囲をとって　$x>2$　……①

$\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ であるから，不等式は　$\log_9(\log_2 x-1)\leqq\log_9 3$

底 9 は 1 より大きいから　$\log_2 x-1\leqq 3$

よって　$\log_2 x\leqq\log_2 2^4$

底 2 は 1 より大きいから　$x\leqq 2^4$

すなわち　$x\leqq 16$　……②

①，② から　$2<x\leqq 16$

24 $\log_3 x+2\log_9(x-6)<3$ を解け。

解答 $6<x<9$

解説

真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-6>0$

すなわち　$x>6$

与式から　$\log_3 x+2\cdot\dfrac{\log_3(x-6)}{\log_3 9}<\log_3 27$

すなわち　$\log_3 x(x-6)<\log_3 27$

底 3 は 1 より大きいから　$x(x-6)<27$

整理して因数分解すると　$(x+3)(x-9)<0$

よって　$-3<x<9$

$x>6$ から　$6<x<9$

25 不等式 $\log_2(x-2)+\log_2(5-x)\leqq 1$ を解け。

解答 $2<x\leqq 3,\ 4\leqq x<5$

解説

真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $5-x>0$ より

$2<x<5$　……①

与えられた不等式から　$\log_2(x-2)(5-x)\leqq\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-2)(5-x)\leqq 2$

整理すると　$x^2-7x+12\geqq 0$

すなわち　$(x-3)(x-4)\geqq 0$

よって　$x\leqq 3,\ 4\leqq x$　……②

①，② から，解は　$2<x\leqq 3,\ 4\leqq x<5$

26 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{1}{2}}x-1>0$ の解は $\boxed{ア}<x<\boxed{イ}$ である。

解答 (ア) 3　(イ) 6

解説

真数は正であるから　$x-3>0,\ x>0$

共通範囲を求めて　$x>3$　……①

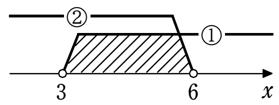
不等式から　$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$

よって　$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}x$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　　$x-3<\frac{1}{2}x$

よって　　$x<6$　……②

①，②から　　${}^{ア}3<x<{}^{イ}6$



27 不等式 $4\log_4(x+1)-\log_2(5-x)<3$ の解は $\boxed{アイ}<x<\boxed{ウ}$ である。

解答　(アイ)　-1　　(ウ)　3

解説

真数は正であるから　　$x+1>0$，$5-x>0$

共通範囲を求めて　　$-1<x<5$　……①

不等式から　　$4\cdot\dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}<\log_2(5-x)+3$

すなわち　　$4\cdot\dfrac{\log_2(x+1)}{2}<\log_2(5-x)+\log_2 2^3$

よって　　$\log_2(x+1)^2<\log_2 8(5-x)$

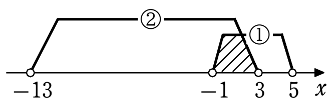
底 2 は 1 より大きいから　　$(x+1)^2<8(5-x)$

すなわち　　$x^2+10x-39<0$

よって　　$(x+13)(x-3)<0$

ゆえに　　$-13<x<3$　……②

①，②より　　${}^{アイ}-1<x<{}^{ウ}3$



28 不等式 $2\log_3 x-4\log_x 27\leqq 5$ ……① が成り立つような x の値の範囲は

$\boxed{ア}<x\leqq\dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$\boxed{エ}<x\leqq\boxed{オカ}$ である。

解答　(ア)　0　　$\dfrac{\sqrt{(イ)}}{(ウ)}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　　(エ)　1　　(オカ)　81

解説

真数は正であるから　　$x>0$

x は対数の底であるから　　$x>0$　かつ　$x\neq 1$

共通範囲を求めて　　$x>0$　かつ　$x\neq 1$

ここで　　$\log_x 27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 x}=\dfrac{3}{\log_3 x}$

よって，① から　　$2\log_3 x-\dfrac{12}{\log_3 x}-5\leqq 0$　……②

[1]　$\log_3 x>0$　すなわち　$x>1$ のとき

② の両辺に $\log_3 x$ を掛けて　　$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12\leqq 0$

すなわち　　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\leqq 0$

$\log_3 x>0$ より $2\log_3 x+3>0$ であるから　　$\log_3 x-4\leqq 0$

よって　　$\log_3 x\leqq 4$　　　ゆえに　　$x\leqq 81$

$x>1$ との共通範囲は　　$1<x\leqq 81$

[2]　$\log_3 x<0$　すなわち　$0<x<1$ のとき

② の両辺に $\log_3 x$ を掛けて　　$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12\geqq 0$

すなわち　　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\geqq 0$

$\log_3 x<0$ より $\log_3 x-4<0$ であるから　　$2\log_3 x+3\leqq 0$

よって　　$\log_3 x\leqq -\dfrac{3}{2}$　　　ゆえに　　$x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$0<x<1$ との共通範囲は　　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

[1]，[2] から，求める x の値の範囲は

$${}^{ア}0<x\leqq\frac{\sqrt{{}^{イ}3}}{{}^{ウ}9},\quad {}^{エ}1<x\leqq{}^{オカ}81$$

29 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$9\cdot 2^x=3^x$　　　(2)　$5^x=3^{2x-1}$　　　(3)　$2^{x+2}<5^{x-3}$

解答　(1)　$x=\dfrac{2\log_2 3}{\log_2 3-1}$　　(2)　$x=\dfrac{1}{2-\log_3 5}$　　(3)　$x>\dfrac{3\log_2 5+2}{\log_2 5-1}$

解説

(1)　方程式の両辺は正の数であるから，2 を底とする対数をとると

$\log_2(9\cdot 2^x)=\log_2 3^x$　　　すなわち　　$\log_2 3^2+x=x\log_2 3$

よって　　$(\log_2 3-1)x=2\log_2 3$

したがって　$x=\dfrac{2\log_2 3}{\log_2 3-1}$

参考　方程式の両辺の 3 を底とする対数をとると，解は $x=\dfrac{2}{1-\log_3 2}$ となる。

(2)　方程式の両辺は正の数であるから，3 を底とする対数をとると

$\log_3 5^x=\log_3 3^{2x-1}$　　　すなわち　　$x\log_3 5=2x-1$

よって　　$(2-\log_3 5)x=1$

したがって　$x=\dfrac{1}{2-\log_3 5}$

参考　方程式の両辺の 5 を底とする対数をとると，解は $x=\dfrac{\log_5 3}{2\log_5 3-1}$ となる。

(3)　不等式の両辺は正の数であるから，2 を底とする対数をとると

$\log_2 2^{x+2}<\log_2 5^{x-3}$　　　すなわち　　$x+2<(x-3)\log_2 5$

よって　　$(\log_2 5-1)x>3\log_2 5+2$

$\log_2 5-1>0$ であるから　　$x>\dfrac{3\log_2 5+2}{\log_2 5-1}$

参考　不等式の両辺の 5 を底とする対数をとると，解は $x>\dfrac{2\log_5 2+3}{1-\log_5 2}$ となる。