対数不等式クイズ

$\boxed{1}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x=3$　　(2) $\log_2 x<3$

解答 (1) $x=8$　(2) $0<x<8$

解説

(1) 対数の定義から，解は　$x=2^3=8$

(2) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_2 x<\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2 x<\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x<8$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<8$

$\boxed{2}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_3 x=1.5$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x=-3$

(3) $\log_3 x<2$　　(4) $\log_{0.5} x\geqq 2$

解答 (1) $x=3\sqrt{3}$　(2) $x=8$　(3) $0<x<9$　(4) $0<x\leqq 0.25$

解説

(1) 対数の定義から，解は　$x=3^{1.5}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

(2) 対数の定義から，解は　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=(2^{-1})^{-3}=2^3=8$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_3 x<\log_3 3^2$　すなわち　$\log_3 x<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x<9$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<9$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_{0.5} x\geqq\log_{0.5}0.5^2$　すなわち　$\log_{0.5} x\geqq\log_{0.5}0.25$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x\leqq 0.25$ …… ②

①，② から，解は　$0<x\leqq 0.25$

$\boxed{3}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2(x-2)=4$　　(2) $\log_3(x+2)<2$　　(3) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leqq 2$

解答 (1) $x=18$　(2) $-2<x<7$　(3) $x\geqq\frac{10}{9}$

解説

(1) 対数の定義から　$x-2=2^4$　よって　$x=18$

(2) 真数は正であるから，$x+2>0$ より　$x>-2$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_3(x+2)<\log_3 3^2$

すなわち　$\log_3(x+2)<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x+2<9$

これを解いて　$x<7$ …… ②

①，② から，解は　$-2<x<7$

(3) 真数は正であるから，$x-1>0$ より　$x>1$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leqq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leqq\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1\geqq\frac{1}{9}$

これを解いて　$x\geqq\frac{10}{9}$ …… ②

①，② から，解は　$x\geqq\frac{10}{9}$

$\boxed{4}$ 次の方程式，不等式を解け。[各 9 点]

(1) $\log_3 x=4$　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-2$　(3) $\log_2 x<4$　(4) $\log_{\frac{1}{2}} x\geqq -3$

解答 (1) 対数の定義から　$x=3^4$　よって　$x=81$

(2) 対数の定義から　$x+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ゆえに　$x+1=4$　よって　$x=3$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式から　$\log_2 x<\log_2 2^4$　すなわち　$\log_2 x<\log_2 16$

底 2 は 1 より大きいから　$x<16$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<16$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}8$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq 8$ …… ②

①，② から，解は　$0<x\leqq 8$

解説

(1) 対数の定義から　$x=3^4$　よって　$x=81$

(2) 対数の定義から　$x+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ゆえに　$x+1=4$　よって　$x=3$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式から　$\log_2 x<\log_2 2^4$　すなわち　$\log_2 x<\log_2 16$

底 2 は 1 より大きいから　$x<16$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<16$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}8$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq 8$ …… ②

①，② から，解は　$0<x\leqq 8$

$\boxed{5}$ 次の方程式・不等式を解け。

(1) $\log_3 x=2$　(2) $\log_4(x-1)=-1$　(3) $\log_{\sqrt{2}} x\geqq 4$　(4) $\log_{\frac{1}{3}} x>2$

解答 (1) $x=9$　(2) $x=\frac{5}{4}$　(3) $x\geqq 4$　(4) $0<x<\frac{1}{9}$

解説

(1) 対数の定義から　$x=3^2$　すなわち　$x=9$

(2) 対数の定義から　$x-1=4^{-1}$　すなわち　$x-1=\frac{1}{4}$

したがって　$x=\frac{5}{4}$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_{\sqrt{2}} x\geqq\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4$

底 $\sqrt{2}$ は 1 より大きいから　$x\geqq(\sqrt{2})^4$　すなわち　$x\geqq 4$ …… ②

①，② から，解は　$x\geqq 4$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_{\frac{1}{3}} x>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<\left(\frac{1}{3}\right)^2$　すなわち　$x<\frac{1}{9}$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<\frac{1}{9}$

$\boxed{6}$ 次の方程式・不等式を解け。

(1) $\log_2(3x+2)=5$　(2) $\log_3 x<2$　(3) $\log_{0.2} x\leqq -1$

解答 (1) $x=10$　(2) $0<x<9$　(3) $x\geqq 5$

解説

(1) 対数の定義から　$3x+2=2^5$

これを解いて　$x=10$

(2) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_3 x<\log_3 3^2$

底 3 は 1 より大きいから　$x<3^2$　すなわち　$x<9$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<9$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_{0.2} x\leqq\log_{0.2}0.2^{-1}$

底 0.2 は 1 より小さいから　$x\geqq 0.2^{-1}$　すなわち　$x\geqq 5$ …… ②

①，② から，解は　$x\geqq 5$

$\boxed{7}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x=-5$　(2) $\log_{\frac{1}{3}} x=4$　(3) $\log_4(x-3)=\frac{1}{2}$

(4) $\log_3(3x-1)=2.5$　(5) $\log_{10} x<3$　(6) $\log_{\frac{1}{3}} x>2$

(7) $\log_{0.5} x\leqq -2$　(8) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$　(9) $\log_3(1-2x)\leqq 0$

解答 (1) $x=\frac{1}{32}$　(2) $x=\frac{1}{81}$　(3) $x=5$　(4) $x=3\sqrt{3}+\frac{1}{3}$

(5) $0<x<1000$　(6) $0<x<\frac{1}{9}$　(7) $x\geqq 4$　(8) $1<x<\frac{4}{3}$

(9)　$0 \leqq x < \frac{1}{2}$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

(2)　対数の定義から，解は　$x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

(3)　対数の定義から　$x - 3 = 4^{\frac{1}{2}}$

よって　$x = 5$

(4)　対数の定義から　$3x - 1 = 3^{2.5}$　…… ①

ここで　$3^{2.5} = 3^{\frac{5}{2}} = 9\sqrt{3}$

よって，① から　$3x - 1 = 9\sqrt{3}$

これを解いて　$x = 3\sqrt{3} + \frac{1}{3}$

(5)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_{10} x < \log_{10} 10^3$

すなわち　$\log_{10} x < \log_{10} 1000$

底 10 は 1 より大きいから　$x < 1000$　…… ②

①，② から，解は　$0 < x < 1000$

(6)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x < \frac{1}{9}$　…… ②

①，② から，解は　$0 < x < \frac{1}{9}$

(7)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_{0.5} x \leqq \log_{0.5} 0.5^{-2}$　すなわち　$\log_{0.5} x \leqq \log_{0.5} 4$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x \geqq 4$　…… ②

①，② から，解は　$x \geqq 4$

(8)　真数は正であるから　$x - 1 > 0$　ゆえに　$x > 1$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}} (x-1) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x - 1 < \frac{1}{3}$　よって　$x < \frac{4}{3}$　…… ②

①，② から，解は　$1 < x < \frac{4}{3}$

(9)　真数は正であるから　$1 - 2x > 0$　ゆえに　$x < \frac{1}{2}$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_3 (1-2x) \leqq \log_3 3^0$

すなわち　$\log_3 (1-2x) \leqq \log_3 1$

底 3 は 1 より大きいから　$1 - 2x \leqq 1$

よって　$x \geqq 0$　…… ②

①，② から，解は　$0 \leqq x < \frac{1}{2}$

8 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_5 x = 2$　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} x = -4$　(3)　$\log_2 x = \frac{1}{2}$

(4)　$\log_4 x < 2$　(5)　$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq 3$　(6)　$\log_{\frac{1}{6}} x < -1$

解答　(1)　$x = 25$　(2)　$x = 81$　(3)　$x = \sqrt{2}$　(4)　$0 < x < 16$　(5)　$0 < x \leqq \frac{1}{8}$

(6)　$x > 6$

解説

(1)　対数の定義から　$x = 5^2 = 25$

(2)　対数の定義から　$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = (3^{-1})^{-4} = 3^4 = 81$

(3)　対数の定義から　$x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

(4)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_4 x < \log_4 4^2$

すなわち　$\log_4 x < \log_4 16$

底 4 は 1 より大きいから　$x < 16$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0 < x < 16$

(5)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x \leqq \frac{1}{8}$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0 < x \leqq \frac{1}{8}$

(6)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{6}} x < \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}} x < \log_{\frac{1}{6}} 6$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$x > 6$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x > 6$

9 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_{0.2} x = -2$　(2)　$\log_2 (x+1) = 3$　(3)　$\log_{27} x > \frac{1}{3}$

(4)　$\log_3 (x-4) < 1$　(5)　$\log_{\frac{1}{3}} (x+2) < 0$

解答　(1)　$x = 25$　(2)　$x = 7$　(3)　$x > 3$　(4)　$4 < x < 7$　(5)　$x > -1$

解説

(1)　対数の定義から　$x = 0.2^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$

(2)　対数の定義から　$x + 1 = 2^3$

よって，$x + 1 = 8$ であるから　$x = 7$

(3)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{27} x > \log_{27} 27^{\frac{1}{3}}$

よって，$\log_{27} x > \log_{27} (3^3)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$\log_{27} x > \log_{27} 3$

底 27 は 1 より大きいから　$x > 3$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x > 3$

(4)　真数は正であるから　$x - 4 > 0$

すなわち　$x > 4$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_3 (x-4) < \log_3 3$

底 3 は 1 より大きいから　$x - 4 < 3$

すなわち　$x < 7$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$4 < x < 7$

(5)　真数は正であるから　$x + 2 > 0$

すなわち　$x > -2$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}} (x+2) < \log_{\frac{1}{3}} 1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x + 2 > 1$

すなわち　$x > -1$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x > -1$

10 次の不等式を解け。

(1)　$\log_{10} x < 3$　(2)　$\log_3 x \leqq -2$　(3)　$\log_{\frac{1}{3}} x < -1$

(4)　$\log_4 x > 1$　(5)　$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq 2$　(6)　$\log_{\frac{1}{5}} x > 0$

解答　(1)　$0 < x < 1000$　(2)　$0 < x \leqq \frac{1}{9}$　(3)　$x > 3$　(4)　$x > 4$　(5)　$0 < x \leqq \frac{1}{4}$

(6)　$0 < x < 1$

解説

(1)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{10} x < \log_{10} 10^3$

すなわち　$\log_{10} x < \log_{10} 1000$

底 10 は 1 より大きいから　$x < 1000$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0 < x < 1000$

(2)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_3 x \leqq \log_3 3^{-2}$

すなわち　$\log_3 x \leqq \log_3 \frac{1}{9}$

底 3 は 1 より大きいから　$x \leqq \frac{1}{9}$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0 < x \leqq \frac{1}{9}$

(3)　真数は正であるから　$x > 0$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 3$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x > 3$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x > 3$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_4 x > \log_4 4$

底4は1より大きいから　$x>4$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x>4$

(5) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x \geqq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから　$x \leqq \frac{1}{4}$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x\leqq\frac{1}{4}$

(6) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} 1$

底 $\frac{1}{5}$ は1より小さいから　$x<1$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x<1$

$\boxed{11}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_4(x+3)\geqq\frac{1}{2}$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>3$

解答　(1) $x\geqq-1$　(2) $2<x<\frac{17}{8}$

解説

(1) 真数は正であるから　$x+3>0$

すなわち　$x>-3$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_4(x+3)\geqq\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

底4は1より大きいから　$x+3\geqq2$

すなわち　$x\geqq-1$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x\geqq-1$

(2) 真数は正であるから　$x-2>0$

すなわち　$x>2$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから　$x-2<\frac{1}{8}$

すなわち　$x<\frac{17}{8}$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$2<x<\frac{17}{8}$

$\boxed{12}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_{10} x<3$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}} x<-1$

(3) $\log_2(x+2)<2$　　(4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-4)>-2$

解答　(1) $0<x<1000$　(2) $x>3$　(3) $-2<x<2$　(4) $4<x<13$

解説

(1) $\log_{10} x<3$

真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{10} x<\log_{10} 10^3$

底10は1より大きいから　$x<1000$ …… ②

①，② から　$0<x<1000$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x<-1$

真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} 3$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから　$x>3$ …… ②

①，② から　$x>3$

(3) $\log_2(x+2)<2$

真数は正であるから　$x+2>0$

すなわち　$x>-2$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_2(x+2)<\log_2 2^2$

底2は1より大きいから　$x+2<4$

すなわち　$x<2$ …… ②

①，② から　$-2<x<2$

(4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-4)>-2$

真数は正であるから　$x-4>0$

すなわち　$x>4$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから　$x-4<9$

すなわち　$x<13$ …… ②

①，② から　$4<x<13$

$\boxed{13}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_2 x\leqq4$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\geqq2$

解答　(1) $0<x\leqq16$　(2) $2<x\leqq\frac{19}{9}$

解説

(1) $\log_2 x\leqq4$

真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_2 x\leqq\log_2 2^4$

底2は1より大きいから　$x\leqq16$ …… ②

①，② から　$0<x\leqq16$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\geqq2$

真数は正であるから　$x-2>0$

すなわち　$x>2$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\geqq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから　$x-2\leqq\frac{1}{9}$

すなわち　$x\leqq\frac{19}{9}$ …… ②

①，② から　$2<x\leqq\frac{19}{9}$