最高位クイズ

1 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 18^{100} は何桁の整数か。　(2) $10^{0.52}<4$ を示せ。

(3) 18^{100} の最高位の数字を求めよ。

解答　(1) 126 桁　(2) 略　(3) 3

解説

(1) $\log_{10}18^{100}=100\log_{10}(2\times3^2)=100(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=100(0.3010+2\times0.4771)=125.52$

ゆえに　$125<\log_{10}18^{100}<126$

よって　$10^{125}<18^{100}<10^{126}$

したがって，18^{100} は 126 桁の整数である。

(2) $\log_{10}10^{0.52}=0.52$

$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

よって　$\log_{10}10^{0.52}<\log_{10}4$

底 10 は 1 より大きいから　$10^{0.52}<4$

(3) $\log_{10}3=0.4771$ であるから　$\log_{10}3<\log_{10}10^{0.52}$

底 10 は 1 より大きいから　$3<10^{0.52}$

これと (2) の結果から　$3<10^{0.52}<4$

(1) より　$18^{100}=10^{125.52}=10^{0.52}\times10^{125}$

であるから　$3\times10^{125}<18^{100}<4\times10^{125}$

ゆえに，18^{100} の最高位の数字は　3

2 12^{60} は ア□ 桁の整数である。また，その最高位の数は イ□ で，一の位の数は ウ□ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　(ア) 65　(イ) 5　(ウ) 6

解説

(ア) $\log_{10}12^{60}=60\log_{10}(2^2\cdot3)=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)=60(2\times0.3010+0.4771)=64.746$

ゆえに　$64<\log_{10}12^{60}<65$　よって　$10^{64}<12^{60}<10^{65}$

したがって，12^{60} は 65 桁の整数である。

(イ) (ア) から　$\log_{10}12^{60}=64+0.746$　……①

ここで　$\log_{10}5=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

ゆえに　$\log_{10}5<0.746<\log_{10}6$

よって，① から　$64+\log_{10}5<\log_{10}12^{60}<64+\log_{10}6$

すなわち　$5\cdot10^{64}<12^{60}<6\cdot10^{64}$

したがって，12^{60} の最高位の数は　5

別解　(イ) (ア) から

$12^{60}=10^{64.746}=10^{64}\cdot10^{0.746}$

$10^0<10^{0.746}<10^1$ であるから，$10^{0.746}$ の整数部分が 12^{60} の最高位の数である。ここで

$\log_{10}5=0.6990$ より　$10^{0.6990}=5$

$\log_{10}6=0.7781$ より　$10^{0.7781}=6$

$10^{0.6990}<10^{0.746}<10^{0.7781}$ から　$5<10^{0.746}<6$

よって，最高位の数は　5

(ウ) 12^1，12^2，12^3，12^4，12^5，…… の一の位の数は，順に

2，4，8，6，2，……

となり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

$60=4\times15$ であるから，12^{60} の一の位の数は　6

別解　12^{60} の一の位の数は，12^{60} を 10 で割った余りに等しい。

$12\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 10)$，$2^5\equiv32\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 10)$ であるから

$12^{60}\equiv2^{60}\equiv(2^5)^{12}\equiv2^{12}\equiv(2^5)^2\cdot2^2\equiv2^2\cdot2^2\equiv16\equiv6\ (\mathrm{mod}\ 10)$

よって，12^{60} の一の位の数は　6

3 自然数 n が不等式 $38\leqq\log_{10}8^n<39$ を満たすとする。このとき，8^n は ア□ 桁の自然数で，n の値は $n=$ イ□ である。また，8^n の一の位の数は ウ□ で，最高位の数は エ□ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

解答　(ア) 39　(イ) 43　(ウ) 2　(エ) 6

解説

(ア) $38\leqq\log_{10}8^n<39$ から　$10^{38}\leqq8^n<10^{39}$

よって，8^n は 39 桁の自然数である。

(イ) $\log_{10}8^n=\log_{10}2^{3n}=3n\log_{10}2=3n\cdot0.3010=0.903n$

ゆえに　$38\leqq0.903n<39$

よって　$\dfrac{38}{0.903}\leqq n<\dfrac{39}{0.903}$

ゆえに　$42.08\cdots\cdots\leqq n<43.18\cdots\cdots$

したがって，求める自然数 n は　$n=43$

(ウ) 8^1，8^2，8^3，8^4，8^5，…… の一の位の数は，順に

8，4，2，6，8，……

となり，4 つの数 8，4，2，6 を順に繰り返す。

$43=4\times10+3$ であるから，8^{43} の一の位の数は　2

(エ) $\log_{10}8^{43}=129\log_{10}2=38.829=38+0.829$

ここで　$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$，$\log_{10}7=0.8451$

ゆえに　$\log_{10}6<0.829<\log_{10}7$

よって　$6<10^{0.829}<7$

したがって　$6\cdot10^{38}<10^{38.829}<7\cdot10^{38}$

すなわち　$6\cdot10^{38}<8^{43}<7\cdot10^{38}$

したがって，8^{43} の最高位の数は　6

4 8^{44} について，一の位の数字は ア□ であり，最高位の数字は イ□ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　(ア) 6　(イ) 5

解説

(ア) 8^1，8^2，8^3，8^4，8^5，…… の一の位の数字は順に

8，4，2，6，8，……

よって，4 つの数字の列 8，4，2，6 が繰り返し現れる。

$44=4\times11$ であるから，8^{44} の一の位の数字は　6

(イ) $\log_{10}8^{44}=44\log_{10}2^3=44\times3\times0.3010=39.732$

$=39+0.732$

ここで

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$

から　$\log_{10}5<0.732<\log_{10}6$

よって　$5<10^{0.732}<6$

ゆえに　$5\cdot10^{39}<10^{39.732}<6\cdot10^{39}$

すなわち　$5\cdot10^{39}<8^{44}<6\cdot10^{39}$

したがって，8^{44} の最高位の数字は　5

5 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 18^{18} は何桁の数で，最高位の数字と末尾の数字は何か。

(2) 0.15^{70} は小数第何位に初めて 0 以外の数字が現れるか。また，その数字は何か。

解答　(1) 順に　23 桁，3，4　(2) 順に　小数第 58 位，2

解説

(1) $\log_{10}18^{18}=18\log_{10}(2\cdot3^2)=18(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=18(0.3010+2\times0.4771)=22.5936$

よって　$22<\log_{10}18^{18}<23$　ゆえに　$10^{22}<18^{18}<10^{23}$

したがって，18^{18} は 23 桁の数である。

$\log_{10}18^{18}=22.5936=22+0.5936$

ここで，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ から

$\log_{10}3<0.5936<\log_{10}4$

よって　$3<10^{0.5936}<4$

ゆえに　$3\cdot10^{22}<10^{22.5936}<4\cdot10^{22}$

すなわち　$3\cdot10^{22}<18^{18}<4\cdot10^{22}$

したがって，18^{18} の最高位の数字は　3

また，18^1，18^2，18^3，18^4，18^5，…… の一の位の数字は順に

8，4，2，6，8，……

よって，4 つの数字の列 8，4，2，6 が繰り返し現れる。

$18=4\times4+2$ であるから，18^{18} の末尾の数字は　4

別解　(最高位の数字)

$\log_{10}18^{18}=22.5936$ から　$18^{18}=10^{22.5936}=10^{22}\cdot10^{0.5936}$

$10^0<10^{0.5936}<10^1$ であるから，$10^{0.5936}$ の整数部分が 18^{18} の最高位の数字である。

$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=0.6020$ より　$10^{0.4771}=3$，$10^{0.6020}=4$

$10^{0.4771}<10^{0.5936}<10^{0.6020}$ であるから　$3<10^{0.5936}<4$

よって，最高位の数字は　3

(2) $\log_{10}0.15^{70}=70\log_{10}\dfrac{3}{20}=70(\log_{10}3-\log_{10}2-\log_{10}10)=70(0.4771-0.3010-1)$

$=-57.673$

よって　$-58<\log_{10}0.15^{70}<-57$

ゆえに　$10^{-58} < 0.15^{70} < 10^{-57}$

したがって，0.15^{70} は小数第 58 位に初めて 0 以外の数字が現れる。

$$\log_{10} 0.15^{70} = -57.673 = -58 + 0.327$$

ここで，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ から

$$\log_{10} 2 < 0.327 < \log_{10} 3$$

よって　$2 < 10^{0.327} < 3$

ゆえに　$2 \cdot 10^{-58} < 10^{-57.673} < 3 \cdot 10^{-58}$

すなわち　$2 \cdot 10^{-58} < 0.15^{70} < 3 \cdot 10^{-58}$

したがって，0.15^{70} の小数首位の数字は　2

別解　(小数首位の数字)

$\log_{10} 0.15^{70} = -57.673$ から　$0.15^{70} = 10^{-57.673} = 10^{-58} \cdot 10^{0.327}$

$10^0 < 10^{0.327} < 10^1$ であるから，$10^{0.327}$ の整数部分が 0.15^{70} の小数首位の数字である。

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ より　$10^{0.3010} = 2$，$10^{0.4771} = 3$

$10^{0.3010} < 10^{0.327} < 10^{0.4771}$ であるから　$2 < 10^{0.327} < 3$

よって，小数首位の数字は　2

6 $4^n + 3$ が 9 桁の数になる自然数 n を求めよ。また，そのとき，$4^n + 3$ の最高位の数を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とせよ。

解答　$n = 14$，最高位の数 2

解説

4^n の一の位の数は 4 または 6 であるから，4^n と $4^n + 3$ は桁数も最高位の数も同じである。

4^n が 9 桁の数であるとき　$10^8 \leqq 4^n < 10^9$

各辺の常用対数をとると

$8 \leqq \log_{10} 4^n < 9$　すなわち　$8 \leqq 2n \log_{10} 2 < 9$

よって　$\dfrac{8}{2 \times 0.3010} \leqq n < \dfrac{9}{2 \times 0.3010}$

したがって　$13.2 \cdots \leqq n < 14.9 \cdots$　ゆえに　$n = 14$

4^{14} と $4^{14} + 3$ は同じ桁数であるから　$n = 14$

次に，$4^{14} + 3$ と 4^{14} の最高位の数は同じであるから，4^{14} の最高位の数を求める。

$$\log_{10} 4^{14} = 14 \log_{10} 4 = 2 \times 14 \times 0.3010 = 8.428$$
$$= 8 + 0.428$$

ここで，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ から

$\log_{10} 2 < 0.428 < \log_{10} 3$　よって　$2 < 10^{0.428} < 3$

ゆえに　$2 \cdot 10^8 < 10^{8.428} < 3 \cdot 10^8$　すなわち　$2 \cdot 10^8 < 4^{14} < 3 \cdot 10^8$

したがって，最高位の数は　2

別解　(最高位の数)

$\log_{10} 4^{14} = 8.428$ から　$4^{14} = 10^8 \cdot 10^{0.428}$

$10^0 < 10^{0.428} < 10^1$ から，$10^{0.428}$ の整数部分が 4^{14} の最高位の数である。

$10^{0.3010} < 10^{0.428} < 10^{0.4771}$ であるから　$2 < 10^{0.428} < 3$

よって，最高位の数は　2

7 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。2^{2011} は何桁の整数か。また，2^{2011} の最高位の数字を求めよ。

解答　順に　606 桁，2

解説

(前半)　$\log_{10} 2^{2011} = 2011 \times \log_{10} 2 = 2011 \times 0.3010 = 605.311$

よって　$605 < \log_{10} 2^{2011} < 606$　ゆえに　$10^{605} < 2^{2011} < 10^{606}$

したがって，2^{2011} は 606 桁の整数である。

(後半)　2^{2011} の最高位の数字を a とすると，2^{2011} は 606 桁の整数であるから

$$a \times 10^{605} \leqq 2^{2011} < (a+1) \times 10^{605}$$

各辺の常用対数をとると

$$\log_{10}(a \times 10^{605}) \leqq \log_{10} 2^{2011} < \log_{10}\{(a+1) \times 10^{605}\}$$

よって　$\log_{10} a + 605 \leqq 605.311 < \log_{10}(a+1) + 605$

ゆえに　$\log_{10} a \leqq 0.311 < \log_{10}(a+1)$　…… ①

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから，① を満たす自然数 a は　$a = 2$

したがって，2^{2011} の最高位の数字は　2

別解　(後半)　(前半) の $\log_{10} 2^{2011} = 605.311$ から　$2^{2011} = 10^{605.311} = 10^{605} \cdot 10^{0.311}$

10^{605} は 10 の倍数で，$1 = 10^0 < 10^{0.311} < 10^1$ であるから，$10^{0.311}$ の整数部分が 2^{2011} の最高位の数字である。

ここで，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ から　$10^{0.3010} = 2$，$10^{0.4771} = 3$

$10^{0.3010} < 10^{0.311} < 10^{0.4771}$ であるから　$2 < 10^{0.311} < 3$

したがって，2^{2011} の最高位の数字は　2

8 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　6^{20} は何桁の整数か。　(2)　6^{20} の最高位の数字を求めよ。

解答　(1)　16 桁　(2)　3

解説

(1)　$\log_{10} 6^{20} = 20 \log_{10}(2 \times 3) = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 20(0.3010 + 0.4771)$

$$= 20 \times 0.7781 = 15.562$$

ゆえに　$15 < \log_{10} 6^{20} < 16$

よって　$10^{15} < 6^{20} < 10^{16}$

したがって，6^{20} は 16 桁の整数である。

(2)　(1) より　$\log_{10} 6^{20} = 15 + 0.562$

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$$

したがって　$\log_{10} 3 < 0.562 < \log_{10} 4$

よって　$3 < 10^{0.562} < 4$

ゆえに　$3 \times 10^{15} < 10^{15.562} < 4 \times 10^{15}$

すなわち　$3 \times 10^{15} < 6^{20} < 4 \times 10^{15}$

したがって，6^{20} の最高位の数字は　3

9 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，3^{70} の最高位の数字を求めよ。

解答　2

解説

$$\log_{10} 3^{70} = 70 \log_{10} 3 = 70 \times 0.4771 = 33.397$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ から　$\log_{10} 2 < 0.397 < \log_{10} 3$

よって　$2 < 10^{0.397} < 3$

ゆえに　$2 \times 10^{33} < 10^{33.397} < 3 \times 10^{33}$

すなわち　$2 \times 10^{33} < 3^{70} < 3 \times 10^{33}$

したがって，3^{70} の最高位の数字は　2

10 (1)　7^{81} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

(2)　7^{81} の最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

解答　(1)　69 桁　(2)　2

解説

(1)　$\log_{10} 7^{81} = 81 \log_{10} 7 = 81 \times 0.8451 = 68.4531$

$68 < \log_{10} 7^{81} < 69$ であるから　$10^{68} < 7^{81} < 10^{69}$

よって，7^{81} は 69 桁の数である。

(2)　7^{81} の最高位の数字を a とすると，(1) から

$$a \times 10^{68} \leqq 7^{81} < (a+1) \times 10^{68}$$

各辺の常用対数をとると

$$\log_{10} a + 68 \leqq 68.4531 < \log_{10}(a+1) + 68$$

したがって

$$\log_{10} a \leqq 0.4531 < \log_{10}(a+1) \quad \cdots\cdots ①$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから，$a = 2$ は ① を満たす。

したがって，7^{81} の最高位の数字は 2 である。

別解　(1) から　$7^{81} = 10^{68.4531} = 10^{68} \times 10^{0.4531}$

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ から　$\log_{10} 2 < 0.4531 < \log_{10} 3$

よって　$2 < 10^{0.4531} < 3$

したがって，7^{81} の最高位の数字は 2 である。

11 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　$\log_{10} 4$，$\log_{10} 5$，$\log_{10} 6$ の値を求めよ。

(2)　6^{33} は何桁の数か。

(3)　$2 = 10^{0.3010}$ などと表せることを利用して，6^{33} の最高位の数字を求めよ。

解答　(1)　$\log_{10} 4 = 0.6020$，$\log_{10} 5 = 0.6990$，$\log_{10} 6 = 0.7781$　(2)　26 桁　(3)　4

解説

(1)　$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

$\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

(2)　$\log_{10} 6^{33} = 33 \log_{10} 6 = 33 \times 0.7781 = 25.6773$

$25 < \log_{10} 6^{33} < 26$ であるから　$10^{25} < 6^{33} < 10^{26}$

よって，6^{33} は 26 桁の数である。

(3)　(2) より，$\log_{10} 6^{33} = 25.6773$ であるから　$6^{33} = 10^{25.6773} = 10^{0.6773} \cdot 10^{25}$

$10^0 < 10^{0.6773} < 10^1$ であるから，$10^{0.6773}$ の整数部分が 6^{33} の最高位の数字である。

ここで，$\log_{10} 4 = 0.6020$ より　$4 = 10^{0.6020}$

$\log_{10} 5 = 0.6990$ より　$5 = 10^{0.6990}$

$10^{0.6020} < 10^{0.6773} < 10^{0.6990}$ であるから　$4 < 10^{0.6773} < 5$

よって，6^{33} の最高位の数字は　4

12 45^{50} は ア$\boxed{}$ 桁の数で，最高位の数字は イ$\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

解答 （ア） 83 （イ） 4

解説

$\log_{10}45^{50}=50\log_{10}45=50\log_{10}(5\cdot3^2)$

$=50(\log_{10}5+2\log_{10}3)=50\left(\log_{10}\dfrac{10}{2}+2\log_{10}3\right)$

$=50\{(1-\log_{10}2)+2\log_{10}3\}=50(0.6990+0.9542)=82.66$

ゆえに　$82<\log_{10}45^{50}<83$

よって，45^{50} は ア83 桁の数である。

また　$\log_{10}45^{50}=82+0.66$

ここで，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$，$\log_{10}5=1-\log_{10}2=0.6990$ であるから

$\log_{10}4<0.66<\log_{10}5$　すなわち　$4<10^{0.66}<5$

ゆえに，$4\cdot10^{82}<10^{82.66}<5\cdot10^{82}$ であるから　$4\cdot10^{82}<45^{50}<5\cdot10^{82}$

したがって，45^{50} の最高位の数字は イ4 である。

13 6^{74} の桁数および最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=0.6021$，$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}6=0.7782$，$\log_{10}7=0.8451$，$\log_{10}8=0.9031$，$\log_{10}9=0.9542$ とする。

解答 桁数は 58 桁，最高位の数字は 3

解説

$\log_{10}6^{74}=74\log_{10}6=74\times0.7782=57.5868$

よって　$57<\log_{10}6^{74}<58$　ゆえに　$10^{57}<6^{74}<10^{58}$

したがって，6^{74} は 58 桁の整数である。

また　$\log_{10}6^{74}=57+0.5868$

$\log_{10}3<0.5868<\log_{10}4$ より，$3<10^{0.5868}<4$ であるから

$3\cdot10^{57}<10^{57+0.5868}<4\cdot10^{57}$　よって　$3\cdot10^{57}<6^{74}<4\cdot10^{57}$

したがって，最高位の数字は 3 である。

14 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 5^{2018} の桁数を求めよ。

(2) 5^{2018} の最高位の数字を求めよ。

(3) $5^n>2^{30}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

解答 (1) 1411 (2) 3 (3) $n=13$

解説

(1) $\log_{10}5^{2018}=2018\log_{10}5=2018(\log_{10}10-\log_{10}2)$

$=2018(1-0.3010)=2018\times0.6990=1410.582$

ゆえに　$1410<\log_{10}5^{2018}<1411$

よって　$10^{1410}<5^{2018}<10^{1411}$

したがって，5^{2018} の桁数は　1411

(2) (1) から　$\log_{10}5^{2018}=1410+0.582$

ここで　$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

ゆえに　$\log_{10}3<0.582<\log_{10}4$

すなわち　$3<10^{0.582}<4$

よって　$3\cdot10^{1410}<10^{1410.582}<4\cdot10^{1410}$

すなわち　$3\cdot10^{1410}<5^{2018}<4\cdot10^{1410}$

したがって，5^{2018} の最高位の数字は　3

(3) $5^n>2^{30}$ の両辺の常用対数をとると　$\log_{10}5^n>\log_{10}2^{30}$

すなわち　$n\log_{10}5>30\log_{10}2$

ゆえに　$n(\log_{10}10-\log_{10}2)>30\log_{10}2$

よって　$n(1-0.3010)>30\times0.3010$

これを解いて　$n>\dfrac{9.03}{0.6990}=12.9\cdots\cdots$

したがって，求める最小の自然数 n は　$n=13$

15 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とするとき，15^{50} は ア$\boxed{}$ 桁の整数である。また，15^{50} の最高位の数字は イ$\boxed{}$ である。

解答 （ア） 59 （イ） 6

解説

$\log_{10}15^{50}=50\log_{10}15=50\log_{10}(3\cdot5)=50(\log_{10}3+\log_{10}5)$

$=50(\log_{10}3+1-\log_{10}2)=50(0.4771+1-0.3010)=58.805$

ゆえに　$58<\log_{10}15^{50}<59$

よって　$10^{58}<15^{50}<10^{59}$

したがって，15^{50} は ア59 桁の整数である。

また　$\log_{10}15^{50}=58+0.805$　…… ①

ここで，$\log_{10}7=0.8451$ であり，

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

であるから　$\log_{10}6<0.805<\log_{10}7$

よって，① から　$58+\log_{10}6<\log_{10}15^{50}<58+\log_{10}7$

すなわち　$6\cdot10^{58}<15^{50}<7\cdot10^{58}$

したがって，15^{50} の最高位の数字は イ6 である。

別解 （イ） （ア）から　$15^{50}=10^{58.805}=10^{58}\cdot10^{0.805}$

$10^0<10^{0.805}<10^1$ であるから，$10^{0.805}$ の整数部分が 15^{50} の最高位の数字である。

ここで，$\log_{10}7=0.8451$ より　$10^{0.8451}=7$

$\log_{10}6=0.7781$ より　$10^{0.7781}=6$

$10^{0.7781}<10^{0.805}<10^{0.8451}$ から　$6<10^{0.805}<7$

よって，15^{50} の最高位の数字は イ6 である。

16 $N=2^{100}$ について，次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$，$\log_{10}11=1.0414$，$\log_{10}13=1.1139$ とする。

(1) N の桁数を求めよ。

(2) N の最高位の数字を求めよ。

(3) N の最高位から 1 つ下の位の数字を求めよ。

解答 (1) 31 (2) 1 (3) 2

解説

(1) $\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2=100\times0.3010=30.10$

ゆえに　$30<\log_{10}2^{100}<31$　よって　$10^{30}<2^{100}<10^{31}$

したがって，2^{100} の桁数は　31

(2) (1) から　$\log_{10}2^{100}=30+0.10$

ゆえに　$\log_{10}1<0.10<\log_{10}2$　すなわち　$1<10^{0.10}<2$

よって　$1\cdot10^{30}<10^{30.10}<2\cdot10^{30}$　すなわち　$1\cdot10^{30}<2^{100}<2\cdot10^{30}$

したがって，2^{100} の最高位の数字は　1

(3) (1) から　$\log_{10}2^{100}=29+1.10$

ここで　$\log_{10}12=2\log_{10}2+\log_{10}3=2\times0.3010+0.4771=1.0791$

ゆえに　$\log_{10}12<1.10<\log_{10}13$　すなわち　$12<10^{1.10}<13$

よって　$12\cdot10^{29}<10^{30.10}<13\cdot10^{29}$　すなわち　$12\cdot10^{29}<2^{100}<13\cdot10^{29}$

したがって，2^{100} の最高位から 1 つ下の位の数字は　2

17 0.4^{50} は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。また，その数字は何か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。[20 点]

解答 $\log_{10}0.4^{50}=50\log_{10}(2^2\div10)=50(2\log_{10}2-1)$

$=50(2\cdot0.3010-1)=-19.9$　…… ①

よって　$-20<\log_{10}0.4^{50}<-19$　ゆえに　$10^{-20}<0.4^{50}<10^{-19}$

よって，0.4^{50} は小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れる。

また，①から　$0.4^{50}=10^{-19.9}=10^{-20+0.1}=10^{-20}\times10^{0.1}$　…… ②

$0<0.1<0.3010$ であるから　$\log_{10}1<0.1<\log_{10}2$

ゆえに　$1<10^{0.1}<2$

すなわち，②から　$1\times10^{-20}<0.4^{50}<2\times10^{-20}$

よって，最初に現れる 0 でない数字は　1

解説

$\log_{10}0.4^{50}=50\log_{10}(2^2\div10)=50(2\log_{10}2-1)$

$=50(2\cdot0.3010-1)=-19.9$　…… ①

よって　$-20<\log_{10}0.4^{50}<-19$　ゆえに　$10^{-20}<0.4^{50}<10^{-19}$

よって，0.4^{50} は小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れる。

また，①から　$0.4^{50}=10^{-19.9}=10^{-20+0.1}=10^{-20}\times10^{0.1}$　…… ②

$0<0.1<0.3010$ であるから　$\log_{10}1<0.1<\log_{10}2$

ゆえに　$1<10^{0.1}<2$

すなわち，②から　$1\times10^{-20}<0.4^{50}<2\times10^{-20}$

よって，最初に現れる 0 でない数字は　1

18 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第 ア$\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れ，その値は イ$\boxed{}$ である。

解答 （ア） 42 （イ） 1

解説

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}=20\log_{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=60\log_{10}\dfrac{2}{10}=60(\log_{10}2-1)=60(0.3010-1)=-41.94$

ゆえに　$-42<\log_{10}\left(\frac{1}{125}\right)^{20}<-41$

よって　$10^{-42}<\left(\frac{1}{125}\right)^{20}<10^{-41}$

したがって，$\left(\frac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第 ${}^{ア}42$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

また　$\log_{10}\left(\frac{1}{125}\right)^{20}=-41.94=-42+0.06$　…… ①

ここで　$\log_{10}1=0$，$\log_{10}2=0.3010$　ゆえに　$\log_{10}1<0.06<\log_{10}2$

よって，① から　$-42+\log_{10}1<\log_{10}\left(\frac{1}{125}\right)^{20}<-42+\log_{10}2$

すなわち　$1\cdot 10^{-42}<\left(\frac{1}{125}\right)^{20}<2\cdot 10^{-42}$

したがって，$\left(\frac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は ${}^{イ}1$ である。