指数関数の最大･最小クイズ

1 関数 $y=4^x-2^{x+1}$ の最小値を求めよ。

解答 $x=0$ で最小値 -1

解説

$2^x=t$ とおくと　$y=(2^x)^2-2\cdot 2^x=t^2-2t=(t-1)^2-1$

$t>0$ であるから，y は，$t=1$ で最小値 -1 をとる。

$t=1$ のとき　$2^x=1$　ゆえに　$x=0$

よって，$x=0$ で最小値 -1 をとる。

2 関数 $y=9^x-2\cdot 3^{x+1}+1$ の最大値，最小値があれば，それを求めよ。[15 点]

解答 $y=(3^x)^2-6\cdot 3^x+1$　　$3^x=t$ とおくと　$t>0$ ……①

また　$y=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

① の範囲で，y は $t=3$，すなわち $x=1$ で最小値 -8 をとる。

また，最大値はない。

解説

$y=(3^x)^2-6\cdot 3^x+1$　　$3^x=t$ とおくと　$t>0$ ……①

また　$y=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

① の範囲で，y は $t=3$，すなわち $x=1$ で最小値 -8 をとる。

また，最大値はない。

3 関数 $y=9^x+9^{-x}-2(3^x+3^{-x})+4$ について，次の問いに答えよ。[(1) 10 点 (2) 5点 (3) 15点]

(1) $3^x+3^{-x}=t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y を t で表せ。

(3) y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答 (1) $3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}$　　ゆえに　$t\geqq 2$ ……①

(2) $9^x+9^{-x}=(3^x)^2+(3^{-x})^2=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}=t^2-2$

よって　$y=(t^2-2)-2t+4=t^2-2t+2$

(3) $y=(t-1)^2+1$ であるから，①の範囲において y は $t=2$ で最小値 2 をとる。

$t=2$ のとき　$3^x+3^{-x}=2$

両辺に 3^x を掛けて　$(3^x)^2+1=2\cdot 3^x$

よって　$(3^x)^2-2\cdot 3^x+1=0$　　ゆえに　$(3^x-1)^2=0$

よって　$3^x=1$　　したがって　$x=0$

以上により　$x=0$ で最小値 2 をとる。

解説

(1) $3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}$　　ゆえに　$t\geqq 2$ ……①

(2) $9^x+9^{-x}=(3^x)^2+(3^{-x})^2=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}=t^2-2$

よって　$y=(t^2-2)-2t+4=t^2-2t+2$

(3) $y=(t-1)^2+1$ であるから，①の範囲において y は $t=2$ で最小値 2 をとる。

$t=2$ のとき　$3^x+3^{-x}=2$

両辺に 3^x を掛けて　$(3^x)^2+1=2\cdot 3^x$

よって　$(3^x)^2-2\cdot 3^x+1=0$　　ゆえに　$(3^x-1)^2=0$

よって　$3^x=1$　　したがって　$x=0$

以上により　$x=0$ で最小値 2 をとる。

4 関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-8\left(\frac{1}{2}\right)^x+10$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ について

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とするとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関数 y の最大値と最小値を求めよ。

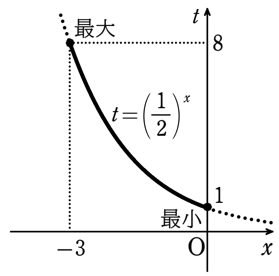
解答 (1) $1\leqq t\leqq 8$　(2) $x=-3$ で最大値 10，$x=-2$ で最小値 -6

解説

(1) 底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから，関数 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数である。

よって，$-3\leqq x\leqq 0$ のとき　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\geqq t\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^0$

すなわち　$1\leqq t\leqq 8$



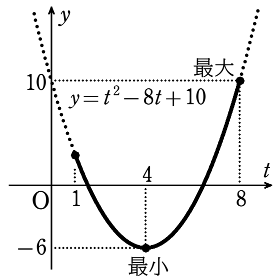
(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2=t^2$ であるから，y を t の式で表すと

$y=t^2-8t+10=(t-4)^2-6$

$1\leqq t\leqq 8$ の範囲において，y は

$t=8$ で最大値 10，$t=4$ で最小値 -6

をとる。



$t=8$ のとき　$\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$　すなわち　$2^{-x}=2^3$

ゆえに　$x=-3$

$t=4$ のとき　$\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$　すなわち　$2^{-x}=2^2$

ゆえに　$x=-2$

よって，y は　$x=-3$ で最大値 10，

$x=-2$ で最小値 -6　をとる。

5 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=9^x-6\cdot 3^x+10$　　(2) $y=4^x-2^{x+2}+1$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

解答 (1) $x=1$ で最小値 1，最大値はない

(2) $x=2$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 -3

解説

(1) $3^x=t$ とおくと　$t>0$ ……①

y を t の式で表すと

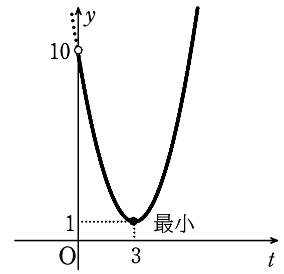
$y=(3^x)^2-6\cdot 3^x+10=t^2-6t+10=(t-3)^2+1$

① の範囲において，y は

$t=3$ で最小値 1 をとる。最大値はない。

$t=3$ のとき　$3^x=3$　よって　$x=1$

したがって　$x=1$ で最小値 1，最大値はない。



(2) $2^x=t$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 2$ のとき

$2^{-1}\leqq t\leqq 2^2$　すなわち　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 4$ ……①

y を t の式で表すと

$y=(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

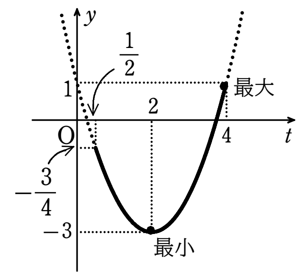
① の範囲において，y は

$t=4$ で最大値 1，$t=2$ で最小値 -3 をとる。

$t=4$ のとき　$2^x=4$　よって　$x=2$

$t=2$ のとき　$2^x=2$　よって　$x=1$

したがって　$x=2$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 -3



6 関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2^{2+x}-2^{2-x}+2$ について，次の問いに答えよ。

(1) $2^x+2^{-x}=t$ とおいて，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) 関数 $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答 (1) $f(x)=t^2-4t$　(2) $x=0$ で最小値 -4

解説

(1) $4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

$2^{2+x}+2^{2-x}=2^2\cdot 2^x+2^2\cdot 2^{-x}=2^2(2^x+2^{-x})=4t$

よって　$f(x)=(t^2-2)-4t+2$　　ゆえに　$f(x)=t^2-4t$

(2) $2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$　　ゆえに　$t\geqq 2$

また　$f(x)=(t-2)^2-4$

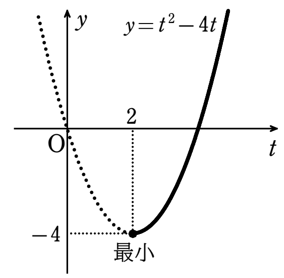
$t\geqq 2$ の範囲において，$f(x)$ は $t=2$ で最小値 -4 をとる。

このとき　$2^x=2^{-x}$

よって　$x=-x$

したがって　$x=0$

ゆえに，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 -4 をとる。



7 (1) 関数 $y=4^{x+1}-2^{x+2}+2$ $(x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 関数 $y=6(2^x+2^{-x})-2(4^x+4^{-x})$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最大値を求めよ。

解答 (1) $x=2$ のとき最大値 50，$x=-1$ のとき最小値 1

(2) $y=-2t^2+6t+4$，$x=0$ のとき最大値 8

解説

(1) $2^x=t$ とおくと　$t>0$　　$x\leqq 2$ であるから　$0<t\leqq 2^2$

したがって　$0<t\leqq 4$　……①

y を t の式で表すと　$y=4(2^x)^2-4\cdot 2^x+2=4t^2-4t+2=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$

①の範囲において，y は $t=4$ で最大，$t=\frac{1}{2}$ で最小となる。

$t=4$ のとき　$2^x=4$　ゆえに　$x=2$

$t=\frac{1}{2}$ のとき　$2^x=\frac{1}{2}$　ゆえに　$x=-1$

よって　$x=2$ のとき最大値 50，$x=-1$ のとき最小値 1

(2) $4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$

したがって　$y=6t-2(t^2-2)=-2t^2+6t+4$　……①

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)より

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

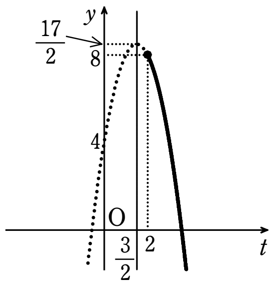
すなわち　$t\geqq 2$　……②

ここで，等号は $2^x=2^{-x}$，すなわち $x=-x$ から $x=0$ のとき成り立つ。

①から　$y=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$

②の範囲において，y は $t=2$ のとき最大値 8 をとる。

したがって　$x=0$ のとき最大値 8



8 (1) 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(ア) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$　$(-1\leqq x\leqq 2)$　　(イ) $y=4^x-2^{x+2}$　$(-1\leqq x\leqq 3)$

(2) $a>0$，$a\neq 1$ とする。関数 $y=a^{2x}+a^{-2x}-2(a^x+a^{-x})+2$ について，$a^x+a^{-x}=t$ とおく。y を t を用いて表し，y の最小値を求めよ。

解答　(1) (ア) $x=-1$ のとき最大値 $\frac{4}{3}$，$x=2$ のとき最小値 $\frac{9}{16}$

(イ) $x=3$ のとき最大値 32，$x=1$ のとき最小値 -4

(2) $x=0$ のとき最小値 0

解説

(1) (ア) 底 $\frac{3}{4}$ は 1 より小さいから，$y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ は減少関数である。

よって　$x=-1$ のとき最大値 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$，

$x=2$　のとき最小値 $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{9}{16}$

(イ) $2^x=t$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 3$ であるから

$2^{-1}\leqq t\leqq 2^3$　すなわち　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 8$　……①

y を t の式で表すと　$y=(2^x)^2-2^2\cdot 2^x=t^2-4t=(t-2)^2-4$

①の範囲において，y は $t=8$ で最大，$t=2$ で最小となる。

$t=8$ のとき　$2^x=8$　ゆえに　$x=3$

$t=2$ のとき　$2^x=2$　ゆえに　$x=1$

よって　$x=3$ のとき最大値 32，$x=1$ のとき最小値 -4

(2) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2$ であるから，y を t の式で表すと

$y=(t^2-2)-2t+2=t^2-2t$　……①

また，$a^x>0$，$a^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a^x+a^{-x}\geqq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$　すなわち　$t\geqq 2$　……②

等号は $a^x=a^{-x}$，すなわち $x=-x$ から $x=0$ のとき成り立つ。

①から　$y=(t-1)^2-1$

②の範囲において，y は $t=2$ のとき最小値 0 をとる。

したがって　$x=0$ のとき最小値 0

9 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=2^{2x}-4\cdot 2^x+1$　　(2) $y=-4^x+2^x+2$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

解答　(1) $x=1$ で最小値 -3，最大値はない

(2) $x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

解説

(1) $y=(2^x)^2-4\cdot 2^x+1$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，関数は　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

$t>0$ であるから，y は $t=2$ で最小値 -3 をとる。

$t=2$ のとき　$2^x=2$　ゆえに　$x=1$

よって，y は $x=1$ で最小値 -3 をとる。また，最大値はない。

(2) $y=-(2^x)^2+2^x+2$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

$2^x=t$ とおく。

$-1\leqq x\leqq 2$ から　$2^{-1}\leqq 2^x\leqq 2^2$

よって　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 4$　……①

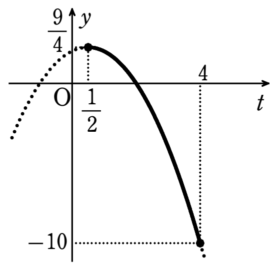
また　$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

①の範囲で y は

$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$，

$t=4$ で最小値 -10

をとる。



$t=\frac{1}{2}$ のとき　$2^x=\frac{1}{2}$　ゆえに　$x=-1$

$t=4$ のとき　$2^x=4$　ゆえに　$x=2$

よって，y は

$x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

をとる。

10 関数 $y=4(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})$ の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=0$ で最大値 6

解説

$2^x+2^{-x}=t$ とおく。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係により　$t\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$

すなわち　$t\geqq 2$　……①

ここで　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

よって　$y=4t-(t^2-2)=-(t-2)^2+6$

①の範囲において，y は $t=2$ で最大値 6 をとる。

$t=2$ のとき　$2^x=2^{-x}$

ゆえに　$(2^x)^2=1$　よって　$x=0$

したがって，y は $x=0$ で最大値 6 をとる。

11 関数 $y=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値と，最小値を与える x の値を求めよ。

解答　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最小値 -2

解説

$2^x+2^{-x}=t$ とおく。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係により

$t\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$ (等号成立は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき)

すなわち　$t\geqq 2$　……①

ここで

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$，$-2^{3+x}-2^{3-x}=-8(2^x+2^{-x})=-8t$

であるから　$y=(t^2-2)-8t+16=t^2-8t+14=(t-4)^2-2$

①から，y は $t=4$ で最小値 -2 をとる。

$t=4$ のとき，$2^x+2^{-x}=4$ から

$(2^x)^2+1=4\cdot 2^x$　すなわち　$(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$

$2^x=X$ とおくと，$X>0$ で　$X^2-4X+1=0$

よって　$X=2\pm\sqrt{3}$ ($X>0$ を満たす)

すなわち　$2^x=2\pm\sqrt{3}$　ゆえに　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

以上から，y は $x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最小値 -2 をとる。

12 $y=9^x+9^{-x}-6(3^x+3^{-x})+12$ の最小値を求めよ。

解答　$x=\log_3\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ で最小値 1

解説

$t=3^x+3^{-x}$ とおく。

$9^x+9^{-x}=3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}$

$=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

ゆえに　$y=(t^2-2)-6t+12$　よって　$y=t^2-6t+10$

$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

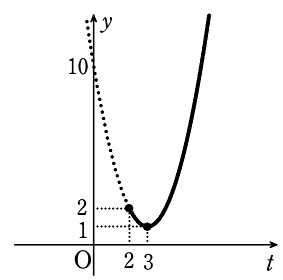
$3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$

等号は $3^x=3^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

ゆえに　$t\geqq 2$　……①

また　$y=(t-3)^2+1$

①の範囲において，y は $t=3$ で最小値 1 をとる。



$t=3$ のとき　$3^x+3^{-x}=3$

両辺に 3^x を掛けて整理すると　$(3^x)^2-3\cdot 3^x+1=0$

$3^x>0$ であるから　$3^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　よって　$x=\log_3\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって　$x=\log_3\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ で最小値 1

13 関数 $y=-9^x+2\cdot3^{x+1}-5$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，3^x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{3}\leqq 3^x\leqq 3$　　(2)　$x=1$ で最大値 4，$x=-1$ で最小値 $-\frac{28}{9}$

解説

(1)　底 3 は 1 より大きいから，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき　　$3^{-1}\leqq 3^x\leqq 3^1$

ゆえに，3^x のとりうる値の範囲は　　$\frac{1}{3}\leqq 3^x\leqq 3$

(2)　関数の式を変形すると　　$y=-(3^x)^2+6\cdot3^x-5$

$3^x=t$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，(1) より $\frac{1}{3}\leqq t\leqq 3$ …… ① であり

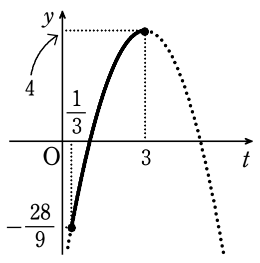
$$y=-t^2+6t-5$$

よって　　$y=-(t-3)^2+4$

① の範囲において，y は

$t=3$ で最大値 4，$t=\frac{1}{3}$ で最小値 $-\frac{28}{9}$

をとる。



$t=3$ のとき　　$3^x=3$

すなわち　　$x=1$

$t=\frac{1}{3}$ のとき　　$3^x=\frac{1}{3}$

すなわち　　$x=-1$

したがって　　$x=1$ で最大値 4，$x=-1$ で最小値 $-\frac{28}{9}$

14 関数 $f(x)=4^{x+\frac{1}{2}}+2^x(2^{-x}-2)$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ は $x=$ ア$\boxed{}$ で最小値 イ$\boxed{}$ をとる。

解答　(ア)　-1　　(イ)　$\frac{1}{2}$

解説

$2^x=t$ とおくと，$-3\leqq x\leqq 0$ から　　$\frac{1}{8}\leqq t\leqq 1$　…… ①

$f(x)$ を t の式で表すと　　$f(x)=2(2^x)^2+1-2\cdot2^x=2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

① の範囲において，$f(x)$ は $t=\frac{1}{2}$ で最小となる。

$t=\frac{1}{2}$ のとき，$2^x=\frac{1}{2}$ から　　$x=-1$

よって，$f(x)$ は $x=$ ア-1 で最小値 イ$\frac{1}{2}$ をとる。

15 関数 $f(x)=3^{x+2}-9^x+1$ の最大値は ア$\boxed{}$ であり，最大値をとるときの x の値は イ$\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\frac{85}{4}$　　(イ)　$2-\log_3 2$

解説

$$f(x)=9\cdot3^x-(3^2)^x+1=-(3^x)^2+9\cdot3^x+1$$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$$f(x)=-t^2+9t+1=-\left(t-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{85}{4}$$

ゆえに，$f(x)$ は $t=\frac{9}{2}$ で最大値 ア$\frac{85}{4}$ をとる。

このとき，$t=\frac{9}{2}$ から　　$3^x=\frac{9}{2}$

したがって　　$x=\log_3\frac{9}{2}=$ イ$2-\log_3 2$

16 関数 $y=4^{x+1}-16^x+7$ $(x\leqq 2)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\frac{1}{2}$ で最大値 11，$x=2$ で最小値 -185

解説

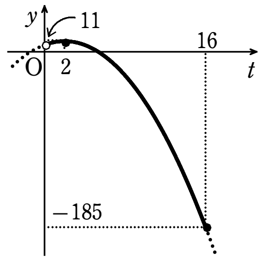
$4^x=t$ とおくと，$x\leqq 2$ における t のとりうる値の範囲は

$0<t\leqq 16$

また　　$y=-(4^x)^2+4\cdot4^x+7=-t^2+4t+7$

$=-(t-2)^2+11$

$0<t\leqq 16$ において，y は $t=2$ で最大値 11，$t=16$ で最小値 -185 をとる。



$t=2$ のとき，$4^x=2$ から　　$x=\frac{1}{2}$

$t=16$ のとき，$4^x=16$ から　　$x=2$

したがって，y は $x=\frac{1}{2}$ で最大値 11，$x=2$ で最小値 -185 をとる。

17 関数 $y=4^x-3\cdot2^{x+1}+10$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=-1$ のとき最大値 $\frac{29}{4}$，$x=\log_2 3$ のとき最小値 1

解説

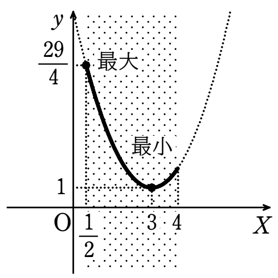
$2^x=X$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 2$ であるから　$2^{-1}\leqq X\leqq 2^2$

したがって　　$\frac{1}{2}\leqq X\leqq 4$　…… ①

y を X の式で表すと

$$y=(2^x)^2-6\cdot2^x+10=X^2-6X+10=(X-3)^2+1$$

よって，① の範囲で y は $X=\frac{1}{2}$ で最大，$X=3$ で最小となる。



$X=\frac{1}{2}$ のとき　　$2^x=\frac{1}{2}$　　　ゆえに　　$x=-1$

$X=3$ のとき　　$2^x=3$　　　ゆえに　　$x=\log_2 3$

よって　　$x=-1$ のとき最大値 $\frac{29}{4}$，$x=\log_2 3$ のとき最小値 1