対数方程式クイズ

$\boxed{1}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2 x=3$　　(2)　$\log_2 x<3$

解答　(1)　$x=8$　　(2)　$0<x<8$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x=2^3=8$

(2)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_2 x<\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2 x<\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x<8$　…… ②

①，② から，解は　$0<x<8$

$\boxed{2}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_3 x=1.5$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} x=-3$

(3)　$\log_3 x<2$　　(4)　$\log_{0.5} x\geqq 2$

解答　(1)　$x=3\sqrt{3}$　　(2)　$x=8$　　(3)　$0<x<9$　　(4)　$0<x\leqq 0.25$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x=3^{1.5}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

(2)　対数の定義から，解は　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=(2^{-1})^{-3}=2^3=8$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_3 x<\log_3 3^2$　すなわち　$\log_3 x<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x<9$　…… ②

①，② から，解は　$0<x<9$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_{0.5} x\geqq\log_{0.5} 0.5^2$　すなわち　$\log_{0.5} x\geqq\log_{0.5} 0.25$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x\leqq 0.25$　…… ②

①，② から，解は　$0<x\leqq 0.25$

$\boxed{3}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2(x-2)=4$　　(2)　$\log_3(x+2)<2$　　(3)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leqq 2$

解答　(1)　$x=18$　　(2)　$-2<x<7$　　(3)　$x\geqq\frac{10}{9}$

解説

(1)　対数の定義から　$x-2=2^4$　　よって　$x=18$

(2)　真数は正であるから，$x+2>0$ より　$x>-2$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_3(x+2)<\log_3 3^2$

すなわち　$\log_3(x+2)<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x+2<9$

これを解いて　$x<7$　…… ②

①，② から，解は　$-2<x<7$

(3)　真数は正であるから，$x-1>0$ より　$x>1$　…… ①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leqq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leqq\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1\geqq\frac{1}{9}$

これを解いて　$x\geqq\frac{10}{9}$　…… ②

①，② から，解は　$x\geqq\frac{10}{9}$

$\boxed{4}$ 次の方程式を解け。

$$\log_2 x+\log_2(x-7)=3$$

解答　$x=8$

解説

真数は正であるから，$x>0$ かつ $x-7>0$ より　$x>7$

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-7)=3$

よって　$x(x-7)=2^3$

整理して　$x^2-7x-8=0$　　すなわち　$(x+1)(x-8)=0$

$x>7$ であるから，解は　$x=8$

$\boxed{5}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x+\log_3(x-8)=2$　　(2)　$\log_2(x-1)+\log_2(x+5)=4$

解答　(1)　$x=9$　　(2)　$x=3$

解説

(1)　真数は正であるから，$x>0$ かつ $x-8>0$ より　$x>8$

方程式を変形すると　$\log_3 x(x-8)=2$　　よって　$x(x-8)=3^2$

整理して　$x^2-8x-9=0$　　すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

$x>8$ であるから，解は　$x=9$

(2)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $x+5>0$ より　$x>1$

方程式を変形すると　$\log_2(x-1)(x+5)=4$　　よって　$(x-1)(x+5)=2^4$

整理して　$x^2+4x-21=0$　　すなわち　$(x-3)(x+7)=0$

$x>1$ であるから，解は　$x=3$

$\boxed{6}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_8(x+2)^2=2$　　(2)　$\log_3(x-2)+\log_3(2x-7)=2$

(3)　$\log_2 x+\log_2(6-x)<3$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqq -1$

解答　(1)　$x=6,\ -10$　　(2)　$x=5$　　(3)　$0<x<2,\ 4<x<6$　　(4)　$2<x\leqq 3$

解説

(1)　対数の定義から　$(x+2)^2=8^2$　　ゆえに　$x+2=\pm 8$

すなわち　$x=-2\pm 8$　　よって　$x=6,\ -10$

(2)　真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $2x-7>0$ より　$x>\frac{7}{2}$

方程式を変形すると　$\log_3(x-2)(2x-7)=2$

よって　$(x-2)(2x-7)=3^2$　　整理して　$2x^2-11x+5=0$

すなわち　$(x-5)(2x-1)=0$

$x>\frac{7}{2}$ であるから，解は　$x=5$

(3)　真数は正であるから，$x>0$ かつ $6-x>0$ より

$0<x<6$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_2 x(6-x)<3$

底 2 は 1 より大きいから　$x(6-x)<2^3$

整理して　$x^2-6x+8>0$　すなわち　$(x-2)(x-4)>0$

これを解いて　$x<2,\ 4<x$　…… ②

①，② から，解は　$0<x<2,\ 4<x<6$

(4)　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $x-2>0$ より

$x>2$　…… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x-2)\geqq -1$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$(x-1)(x-2)\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

整理して　$x^2-3x\leqq 0$　すなわち　$x(x-3)\leqq 0$

これを解いて　$0\leqq x\leqq 3$　…… ②

①，② から，解は　$2<x\leqq 3$

$\boxed{7}$ 次の方程式，不等式を解け。[各 9 点]

(1)　$\log_3 x=4$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-2$　　(3)　$\log_2 x<4$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq -3$

解答　(1)　対数の定義から　$x=3^4$　　よって　$x=81$

(2)　対数の定義から　$x+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ゆえに　$x+1=4$　　よって　$x=3$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

不等式から　$\log_2 x<\log_2 2^4$　　すなわち　$\log_2 x<\log_2 16$

底 2 は 1 より大きいから　$x<16$　…… ②

①，② から，解は　$0<x<16$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$　　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}} 8$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq 8$　…… ②

①，② から，解は　$0<x\leqq 8$

解説

(1)　対数の定義から　$x=3^4$　　よって　$x=81$

(2)　対数の定義から　$x+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ゆえに　$x+1=4$　　よって　$x=3$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

不等式から　$\log_2 x<\log_2 2^4$　　すなわち　$\log_2 x<\log_2 16$

底 2 は 1 より大きいから　$x<16$ ……②

①，② から，解は　$0<x<16$

(4)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}}x \geqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}x \geqq \log_{\frac{1}{2}}8$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x \leqq 8$ ……②

①，② から，解は　$0<x \leqq 8$

$\boxed{8}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_2(x^2-6x)=4$　　(2)　$\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(3)　$\log_2(x^2-x-18)-\log_2(x-1)=3$　　(4)　$\log_3(x-3)=\log_9(x-1)$

(5)　$\log_{x-1}(x^3-2x^2-2x+3)=3$

解答　(1)　$x=-2,\ 8$　(2)　$x=3$　(3)　$x=10$　(4)　$x=5$　(5)　$x=4$

解説

(1)　対数の定義から　$x^2-6x=2^4$

整理すると　$x^2-6x-16=0$

よって　$(x+2)(x-8)=0$

ゆえに　$x=-2,\ 8$

(2)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-2>0$

よって　$x>2$

方程式から　$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

ゆえに　$x(x-2)=3$

整理すると　$x^2-2x-3=0$

よって　$(x+1)(x-3)=0$

$x>2$ であるから　$x=3$

(3)　真数は正であるから

$x^2-x-18>0$　かつ　$x-1>0$ ……①

方程式から　$\log_2(x^2-x-18)=\log_2 8+\log_2(x-1)$

ゆえに　$\log_2(x^2-x-18)=\log_2 8(x-1)$

よって　$x^2-x-18=8(x-1)$

整理すると　$x^2-9x-10=0$

ゆえに　$(x+1)(x-10)=0$

よって　$x=-1,\ 10$

このうち，① を満たすものは　$x=10$

(4)　真数は正であるから　$x-3>0$　かつ　$x-1>0$

よって　$x>3$

このとき，$\log_3(x-3)=\log_{3^2}(x-3)^2$ であるから，方程式は

$\log_9(x-3)^2=\log_9(x-1)$

ゆえに　$(x-3)^2=x-1$

整理すると　$x^2-7x+10=0$

よって　$(x-2)(x-5)=0$

$x>3$ であるから　$x=5$

(5)　真数は正であるから　$x^3-2x^2-2x+3>0$ ……②

底は 1 でない正の数であるから

$x-1>0$　かつ　$x-1 \neq 1$

すなわち　$x>1$　かつ　$x \neq 2$ ……③

対数の定義から　$x^3-2x^2-2x+3=(x-1)^3$

整理すると　$x^2-5x+4=0$

よって　$(x-1)(x-4)=0$

ゆえに　$x=1,\ 4$

このうち，③ を満たすものは　$x=4$

これは ② を満たすから，求める解である。

$\boxed{9}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_2(x^2+3x+4)=1$　　(2)　$\log_3(x-5)+\log_3(2x-3)=2$

(3)　$\log_2(x^2+5x+2)-\log_2(2x+3)=2$　　(4)　$\log_2 x+\log_4(x+3)=1$

(5)　$\log_x 5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$　　(6)　$\log_{2x}(x^3+6x^2-x-2)=2$

解答　(1)　$x=-1,\ -2$　(2)　$x=6$　(3)　$x=5$　(4)　$x=1$　(5)　$x=125$

(6)　$x=1$

解説

(1)　対数の定義から　$x^2+3x+4=2^1$

ゆえに　$x^2+3x+2=0$　すなわち　$(x+1)(x+2)=0$

したがって　$x=-1,\ -2$

(2)　真数は正であるから　$x-5>0$　かつ　$2x-3>0$

よって　$x>5$

方程式から　$\log_3(x-5)(2x-3)=\log_3 3^2$

ゆえに　$(x-5)(2x-3)=9$　整理して　$2x^2-13x+6=0$

よって　$(x-6)(2x-1)=0$

$x>5$ であるから　$x=6$

(3)　真数は正であるから　$x^2+5x+2>0$　かつ　$2x+3>0$ ……①

方程式から　$\log_2(x^2+5x+2)=\log_2 4+\log_2(2x+3)$

よって　$\log_2(x^2+5x+2)=\log_2 4(2x+3)$

したがって　$x^2+5x+2=4(2x+3)$

整理して　$x^2-3x-10=0$

ゆえに　$(x+2)(x-5)=0$

よって　$x=-2,\ 5$

このうち，① を満たすものが解であるから　$x=5$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+3>0$

よって　$x>0$

このとき，$\log_2 x=\log_4 x^2$ であるから，方程式は　$\log_4 x^2(x+3)=\log_4 4$

ゆえに　$x^2(x+3)=4$　整理して　$x^3+3x^2-4=0$

したがって　$(x-1)(x+2)^2=0$　$x>0$ であるから　$x=1$

(5)　底は 1 でない正の数であるから　$x>0$　かつ　$x \neq 1$ ……①

方程式から　$x^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{5}$　両辺を 2 乗して　$x=125$

これは ① を満たすから，求める解である。

(6)　真数は正であるから　$x^3+6x^2-x-2>0$ ……①

底は 1 でない正の数であるから　$2x>0$　かつ　$2x \neq 1$

よって　$x>0,\ x \neq \frac{1}{2}$ ……②

方程式から　$x^3+6x^2-x-2=(2x)^2$

整理して　$x^3+2x^2-x-2=0$

ゆえに　$(x+1)(x-1)(x+2)=0$

したがって　$x=\pm 1,\ -2$

このうち，② を満たすものは　$x=1$

これは ① を満たすから，求める解である。

$\boxed{10}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2 x=-5$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}}x=4$　　(3)　$\log_4(x-3)=\frac{1}{2}$

(4)　$\log_3(3x-1)=2.5$　　(5)　$\log_{10}x<3$　　(6)　$\log_{\frac{1}{3}}x>2$

(7)　$\log_{0.5}x \leqq -2$　　(8)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$　　(9)　$\log_3(1-2x) \leqq 0$

解答　(1)　$x=\frac{1}{32}$　(2)　$x=\frac{1}{81}$　(3)　$x=5$　(4)　$x=3\sqrt{3}+\frac{1}{3}$

(5)　$0<x<1000$　(6)　$0<x<\frac{1}{9}$　(7)　$x \geqq 4$　(8)　$1<x<\frac{4}{3}$

(9)　$0 \leqq x<\frac{1}{2}$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x=2^{-5}=\frac{1}{32}$

(2)　対数の定義から，解は　$x=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(3)　対数の定義から　$x-3=4^{\frac{1}{2}}$

よって　$x=5$

(4)　対数の定義から　$3x-1=3^{2.5}$ ……①

ここで　$3^{2.5}=3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$

よって，① から　$3x-1=9\sqrt{3}$

これを解いて　$x=3\sqrt{3}+\frac{1}{3}$

(5)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

与えられた不等式は　$\log_{10}x<\log_{10}10^3$

すなわち　$\log_{10}x<\log_{10}1000$

底 10 は 1 より大きいから　$x<1000$ ……②

①，② から，解は　$0<x<1000$

(6)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<\frac{1}{9}$ ……②

①，② から，解は　$0<x<\frac{1}{9}$

(7)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

与えられた不等式は　$\log_{0.5}x \leqq \log_{0.5}0.5^{-2}$　すなわち　$\log_{0.5}x \leqq \log_{0.5}4$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x \geqq 4$ ……②

①，② から，解は　$x \geqq 4$

(8)　真数は正であるから　$x-1>0$　ゆえに　$x>1$ ……①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1<\frac{1}{3}$　　よって　$x<\frac{4}{3}$ ……②

①，② から，解は　$1<x<\frac{4}{3}$

(9)　真数は正であるから　$1-2x>0$　　ゆえに　$x<\frac{1}{2}$ ……①

与えられた不等式は　$\log_3(1-2x)\leqq\log_3 3^0$

すなわち　$\log_3(1-2x)\leqq\log_3 1$

底 3 は 1 より大きいから　$1-2x\leqq 1$

よって　$x\geqq 0$ ……②

①，② から，解は　$0\leqq x<\frac{1}{2}$

11 次の方程式を解け。

(1)　$\log_{10}(x+2)(x+5)=1$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}}(9+x-x^2)=-1$

解答　(1)　$x=0,\ -7$　　(2)　$x=-2,\ 3$

解説

(1)　対数の定義から　$(x+2)(x+5)=10^1$

整理して　$x^2+7x=0$　すなわち　$x(x+7)=0$

これを解いて　$x=0,\ -7$

(2)　対数の定義から　$9+x-x^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

整理して　$x^2-x-6=0$　すなわち　$(x+2)(x-3)=0$

これを解いて　$x=-2,\ 3$

12 次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(2)　$\log_4(2x+3)+\log_4(4x+1)=2\log_4 5$

(3)　$\log_2(3-x)=\log_4(2x+18)$

解答　(1)　$x=1$　　(2)　$x=1$　　(3)　$x=-1$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+3>0$

よって　$x>0$ ……①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x+3)=2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$　　すなわち　$(x-1)(x+4)=0$

① から，解は　$x=1$

(2)　真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $4x+1>0$

よって　$x>-\frac{1}{4}$ ……①

方程式を変形すると　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 5^2$

すなわち　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 25$

ゆえに　$(2x+3)(4x+1)=25$

整理して　$4x^2+7x-11=0$　　すなわち　$(x-1)(4x+11)=0$

① から，解は　$x=1$

(3)　真数は正であるから　$3-x>0$　かつ　$2x+18>0$

よって　$-9<x<3$ ……①

方程式を変形すると　$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4}$

すなわち　$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{2}$

両辺に 2 を掛けて　$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18)$

すなわち　$\log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$

ゆえに　$(3-x)^2=2x+18$

整理して　$x^2-8x-9=0$　　すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

① から，解は　$x=-1$

13 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_3 x=3$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} x=4$　　(3)　$\log_{16}(x-2)=0.5$

(4)　$\log_5 x<3$　　(5)　$\log_{\frac{1}{3}} x\geqq 2$　　(6)　$\log_{0.5}(x+3)\leqq -2$

解答　(1)　$x=27$　　(2)　$x=\frac{1}{16}$　　(3)　$x=6$　　(4)　$0<x<125$　　(5)　$0<x\leqq\frac{1}{9}$

(6)　$x\geqq 1$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x=3^3=27$

(2)　対数の定義から，解は　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(3)　対数の定義から　$x-2=16^{\frac{1}{2}}$　　よって，解は　$x=6$

(4)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式から　$\log_5 x<\log_5 5^3$　　すなわち　$\log_5 x<\log_5 125$

底 5 は 1 より大きいから　$x<125$ ……②

①，② から，解は　$0<x<125$

(5)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{3}} x\geqq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$　　すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x\geqq\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x\leqq\frac{1}{9}$ ……②

①，② から，解は　$0<x\leqq\frac{1}{9}$

(6)　真数は正であるから　$x+3>0$　　すなわち　$x>-3$ ……①

不等式から　$\log_{0.5}(x+3)\leqq\log_{0.5}0.5^{-2}$　　すなわち　$\log_{0.5}(x+3)\leqq\log_{0.5}4$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x+3\geqq 4$　　すなわち　$x\geqq 1$ ……②

①，② から，解は　$x\geqq 1$

14 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_3 x=2$　　(2)　$\log_5 x=-1$

(3)　$\log_{\frac{1}{3}} x=4$　　(4)　$\log_{10} x<3$

(5)　$\log_3 x\leqq -2$　　(6)　$\log_{\frac{1}{3}} x<-1$

解答　(1)　$x=9$　　(2)　$x=\frac{1}{5}$　　(3)　$x=\frac{1}{81}$　　(4)　$0<x<1000$　　(5)　$0<x\leqq\frac{1}{9}$

(6)　$x>3$

解説

(1)　対数の定義から　$x=3^2=9$

(2)　対数の定義から　$x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

(3)　対数の定義から　$x=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(4)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\log_{10} x<\log_{10}10^3$　　すなわち　$\log_{10} x<\log_{10}1000$

底 10 は 1 より大きいから　$x<1000$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x<1000$

(5)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\log_3 x\leqq\log_3 3^{-2}$　　すなわち　$\log_3 x\leqq\log_3\frac{1}{9}$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq\frac{1}{9}$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x\leqq\frac{1}{9}$

(6)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$　　すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}3$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>3$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$x>3$

15 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2(x+1)=5$　　(2)　$\log_2(x+2)(x-5)=3$

(3)　$\log_4(x+3)\geqq\frac{1}{2}$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>3$

解答　(1)　$x=31$　　(2)　$x=-3,\ 6$　　(3)　$x\geqq -1$　　(4)　$2<x<\frac{17}{8}$

解説

(1)　対数の定義から　$x+1=2^5$

よって　$x=2^5-1=31$

(2)　対数の定義から　$(x+2)(x-5)=2^3$

よって　$x^2-3x-18=0$

これを解いて　$x=-3,\ 6$

(3)　真数は正であるから　$x+3>0$　　すなわち　$x>-3$ ……①

不等式を変形すると　$\log_4(x+3)\geqq\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

底 4 は 1 より大きいから　$x+3\geqq 2$　　すなわち　$x\geqq -1$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$x\geqq -1$

(4)　真数は正であるから　$x-2>0$　　すなわち　$x>2$ ……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x-2<\frac{1}{8}$　すなわち　$x<\frac{17}{8}$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$2<x<\frac{17}{8}$

$\boxed{16}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x+2)=1$　　(2)　$\log_3(2x+1)+\log_3(x-3)=2$

解答　(1)　$x=3$　(2)　$x=4$

解説

(1)　真数は正であるから　$x-1>0$　かつ　$x+2>0$

すなわち　$x>1$ …… ①

方程式を変形すると　$\log_{10}(x-1)(x+2)=1$

よって　$(x-1)(x+2)=10^1$

式を整理すると　$x^2+x-12=0$　すなわち　$(x+4)(x-3)=0$

① より　$x-3=0$　したがって　$x=3$

(2)　真数は正であるから　$2x+1>0$　かつ　$x-3>0$

すなわち　$x>3$ …… ①

方程式を変形すると　$\log_3(2x+1)(x-3)=2$

よって　$(2x+1)(x-3)=3^2$

式を整理すると　$2x^2-5x-12=0$　すなわち　$(2x+3)(x-4)=0$

① より　$x-4=0$　したがって　$x=4$

$\boxed{17}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_5 x=2$　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} x=-4$　(3)　$\log_2 x=\frac{1}{2}$

(4)　$\log_4 x<2$　(5)　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　(6)　$\log_{\frac{1}{6}} x<-1$

解答　(1)　$x=25$　(2)　$x=81$　(3)　$x=\sqrt{2}$　(4)　$0<x<16$　(5)　$0<x\leqq\frac{1}{8}$

(6)　$x>6$

解説

(1)　対数の定義から　$x=5^2=25$

(2)　対数の定義から　$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=(3^{-1})^{-4}=3^4=81$

(3)　対数の定義から　$x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

(4)　真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_4 x<\log_4 4^2$

すなわち　$\log_4 x<\log_4 16$

底 4 は 1 より大きいから　$x<16$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x<16$

(5)　真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq\frac{1}{8}$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$0<x\leqq\frac{1}{8}$

(6)　真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}} 6$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$x>6$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x>6$

$\boxed{18}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_{0.2} x=-2$　(2)　$\log_2(x+1)=3$　(3)　$\log_{27} x>\frac{1}{3}$

(4)　$\log_3(x-4)<1$　(5)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<0$

解答　(1)　$x=25$　(2)　$x=7$　(3)　$x>3$　(4)　$4<x<7$　(5)　$x>-1$

解説

(1)　対数の定義から　$x=0.2^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=(5^{-1})^{-2}=5^2=25$

(2)　対数の定義から　$x+1=2^3$

よって，$x+1=8$ であるから　$x=7$

(3)　真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{27} x>\log_{27} 27^{\frac{1}{3}}$

よって，$\log_{27} x>\log_{27}(3^3)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$\log_{27} x>\log_{27} 3$

底 27 は 1 より大きいから　$x>3$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x>3$

(4)　真数は正であるから　$x-4>0$

すなわち　$x>4$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_3(x-4)<\log_3 3$

底 3 は 1 より大きいから　$x-4<3$

すなわち　$x<7$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$4<x<7$

(5)　真数は正であるから　$x+2>0$

すなわち　$x>-2$ …… ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\log_{\frac{1}{3}} 1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x+2>1$

すなわち　$x>-1$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$x>-1$

$\boxed{19}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　(2)　$\log_3(x-3)+\log_3(2x+1)=2$

(3)　$(\log_2 x)^2+\log_2 x-6=0$　(4)　$(\log_3 x)^2-\log_3 x^2-3=0$

解答　(1)　$x=1$　(2)　$x=4$　(3)　$x=\frac{1}{8}$，4　(4)　$x=\frac{1}{3}$，27

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+3>0$

すなわち　$x>0$ …… ①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理すると　$x^2+3x-4=0$

よって　$(x-1)(x+4)=0$

① より　$x=1$

(2)　真数は正であるから　$x-3>0$　かつ　$2x+1>0$

すなわち　$x>3$ …… ①

方程式を変形すると　$\log_3(x-3)(2x+1)=\log_3 3^2$

ゆえに　$(x-3)(2x+1)=3^2$

整理すると　$2x^2-5x-12=0$

よって　$(x-4)(2x+3)=0$

① より　$x=4$

(3)　真数は正であるから　$x>0$ …… ①

$\log_2 x=t$ とおくと，方程式は　$t^2+t-6=0$

ゆえに　$(t-2)(t+3)=0$

よって　$t=-3$，2

すなわち　$\log_2 x=-3$，2

$\log_2 x=-3$ のとき　$x=2^{-3}=\frac{1}{8}$

$\log_2 x=2$ のとき　$x=2^2=4$

① より　$x=\frac{1}{8}$，4

(4)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x^2>0$

すなわち　$x>0$ …… ①

方程式を変形すると　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t^2-2t-3=0$

ゆえに　$(t+1)(t-3)=0$

よって　$t=-1$，3

すなわち　$\log_3 x=-1$，3

$\log_3 x=-1$ のとき　$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$\log_3 x=3$ のとき　$x=3^3=27$

① より　$x=\frac{1}{3}$，27

$\boxed{20}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x=2$　(2)　$\log_5 x=-1$　(3)　$\log_{\frac{1}{3}} x=4$

(4)　$\log_2 x=\frac{1}{2}$　(5)　$\log_{\frac{1}{2}} x=0$　(6)　$\log_{\frac{1}{4}} x=-2$

解答　(1)　$x=9$　(2)　$x=\frac{1}{5}$　(3)　$x=\frac{1}{81}$　(4)　$x=\sqrt{2}$　(5)　$x=1$

(6)　$x=16$

解説

(1)　対数の定義から　$x=3^2=9$

(2)　対数の定義から　　$x=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

(3)　対数の定義から　　$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$

(4)　対数の定義から　　$x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

(5)　対数の定義から　　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

(6)　対数の定義から　　$x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}=16$