対数方程式クイズ(難)

$\boxed{1}$ 次の方程式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2-\log_3 x^2=0$　　(2) $(\log_2 x)^2+\log_2 4x=4$

解答 (1) $x=1,\ 9$　(2) $x=2,\ \frac{1}{4}$

解説

(1) 方程式を変形すると　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x=0$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t^2-2t=0$

よって　$t(t-2)=0$　ゆえに　$t=0,\ 2$

$t=0$ すなわち $\log_3 x=0$ のとき　$x=1$

$t=2$ すなわち $\log_3 x=2$ のとき　$x=3^2=9$

したがって　$x=1,\ 9$

(2) 方程式を変形すると　$(\log_2 x)^2+\log_2 x+2=4$

すなわち　$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$ とおくと　$t^2+t-2=0$

よって　$(t-1)(t+2)=0$　ゆえに　$t=1,\ -2$

$t=1$ すなわち $\log_2 x=1$ のとき　$x=2$

$t=-2$ すなわち $\log_2 x=-2$ のとき　$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

したがって　$x=2,\ \frac{1}{4}$

$\boxed{2}$ 次の方程式，不等式を解け。[各 15 点]

(1) $2\log_2 x-\log_2(x+3)=2$　　(2) $\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+\log_{\frac{1}{6}} x\geqq -1$

解答 (1) 真数は正であるから　$x>0,\ x+3>0$

ゆえに　$x>0$ …… ①

方程式から　$\log_2 x^2-\log_2(x+3)=\log_2 2^2$

よって　$\log_2 x^2=\log_2(x+3)+\log_2 4$

ゆえに　$x^2=4(x+3)$

整理すると　$x^2-4x-12=0$

したがって　$(x-6)(x+2)=0$

① から　$x=6$

(2) 真数は正であるから　$x-1>0,\ x>0$

ゆえに　$x>1$ …… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq\log_{\frac{1}{6}}6$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$(x-1)x\leqq 6$

ゆえに　$(x+2)(x-3)\leqq 0$

よって　$-2\leqq x\leqq 3$

① から　$1<x\leqq 3$

解説

(1) 真数は正であるから　$x>0,\ x+3>0$

ゆえに　$x>0$ …… ①

方程式から　$\log_2 x^2-\log_2(x+3)=\log_2 2^2$

よって　$\log_2 x^2=\log_2(x+3)+\log_2 4$

ゆえに　$x^2=4(x+3)$

整理すると　$x^2-4x-12=0$

したがって　$(x-6)(x+2)=0$

① から　$x=6$

(2) 真数は正であるから　$x-1>0,\ x>0$

ゆえに　$x>1$ …… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)x\geqq\log_{\frac{1}{6}}6$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$(x-1)x\leqq 6$

ゆえに　$(x+2)(x-3)\leqq 0$

よって　$-2\leqq x\leqq 3$

① から　$1<x\leqq 3$

$\boxed{3}$ 方程式 $\log_x 2+\log_2 x=\frac{5}{2}$ を解け。[15 点]

解答 底，真数の条件から　$x>0,\ x\fallingdotseq 1$ …… ①

方程式から　$\frac{\log_2 2}{\log_2 x}+\log_2 x=\frac{5}{2}$

両辺に $2\log_2 x$（$\fallingdotseq 0$）を掛けて整理すると　$2(\log_2 x)^2-5\log_2 x+2=0$

よって　$(2\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=0$　ゆえに　$\log_2 x=\frac{1}{2},\ 2$

したがって　$x=2^{\frac{1}{2}},\ 2^2$　すなわち　$x=\sqrt{2},\ 4$

これは ① を満たす。

解説

底，真数の条件から　$x>0,\ x\fallingdotseq 1$ …… ①

方程式から　$\frac{\log_2 2}{\log_2 x}+\log_2 x=\frac{5}{2}$

両辺に $2\log_2 x$（$\fallingdotseq 0$）を掛けて整理すると　$2(\log_2 x)^2-5\log_2 x+2=0$

よって　$(2\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=0$　ゆえに　$\log_2 x=\frac{1}{2},\ 2$

したがって　$x=2^{\frac{1}{2}},\ 2^2$　すなわち　$x=\sqrt{2},\ 4$

これは ① を満たす。

$\boxed{4}$ 次の方程式を解け。[各 15 点]

(1) $\begin{cases}2^x+2^y=5\\2^{x+y}=4\end{cases}$　　(2) $\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\left(\log_3\frac{x}{9}\right)=-6$

解答 (1) $2^x=X,\ 2^y=Y$ とおくと　$X>0,\ Y>0$

また，方程式は　$\begin{cases}X+Y=5\\XY=4\end{cases}$

ゆえに，$X,\ Y$ は2 次方程式 $t^2-5t+4=0$ の 2 つの解である。

この 2 次方程式を解いて　$(t-1)(t-4)=0$　よって　$t=1,\ 4$

ゆえに，$X=1,\ Y=4$ のとき　$2^x=1,\ 2^y=4$ から　$x=0,\ y=2$

$X=4,\ Y=1$ のとき　$2^x=4,\ 2^y=1$ から　$x=2,\ y=0$

(2) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

与えられた方程式は　$(\log_3 3-\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 9)=-6$

$\log_3 x=t$ とおくと　$(1-t)(t-2)=-6$　よって　$t^2-3t-4=0$

これを解いて　$(t+1)(t-4)=0$　ゆえに　$t=-1,\ 4$

よって　$\log_3 x=-1,\ 4$　ゆえに　$x=\frac{1}{3},\ 81$（①を満たす）

解説

(1) $2^x=X,\ 2^y=Y$ とおくと　$X>0,\ Y>0$

また，方程式は　$\begin{cases}X+Y=5\\XY=4\end{cases}$

ゆえに，$X,\ Y$ は2 次方程式 $t^2-5t+4=0$ の 2 つの解である。

この 2 次方程式を解いて　$(t-1)(t-4)=0$　よって　$t=1,\ 4$

ゆえに，$X=1,\ Y=4$ のとき　$2^x=1,\ 2^y=4$ から　$x=0,\ y=2$

$X=4,\ Y=1$ のとき　$2^x=4,\ 2^y=1$ から　$x=2,\ y=0$

(2) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

与えられた方程式は　$(\log_3 3-\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 9)=-6$

$\log_3 x=t$ とおくと　$(1-t)(t-2)=-6$　よって　$t^2-3t-4=0$

これを解いて　$(t+1)(t-4)=0$　ゆえに　$t=-1,\ 4$

よって　$\log_3 x=-1,\ 4$　ゆえに　$x=\frac{1}{3},\ 81$（①を満たす）

$\boxed{5}$ 次の方程式を解け。

(1) $\log_2(x^2-6x)=4$　　(2) $\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(3) $\log_2(x^2-x-18)-\log_2(x-1)=3$　　(4) $\log_3(x-3)=\log_9(x-1)$

(5) $\log_{x-1}(x^3-2x^2-2x+3)=3$

解答 (1) $x=-2,\ 8$　(2) $x=3$　(3) $x=10$　(4) $x=5$　(5) $x=4$

解説

(1) 対数の定義から　$x^2-6x=2^4$

整理すると　$x^2-6x-16=0$

よって　$(x+2)(x-8)=0$

ゆえに　$x=-2,\ 8$

(2) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-2>0$

よって　$x>2$

方程式から　$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

ゆえに　$x(x-2)=3$

整理すると　$x^2-2x-3=0$

よって　$(x+1)(x-3)=0$

$x>2$ であるから　$x=3$

(3) 真数は正であるから

$x^2-x-18>0$　かつ　$x-1>0$ …… ①

方程式から　$\log_2(x^2-x-18)=\log_2 8+\log_2(x-1)$

ゆえに　$\log_2(x^2-x-18)=\log_2 8(x-1)$

よって　$x^2-x-18=8(x-1)$

整理すると　$x^2-9x-10=0$

ゆえに　$(x+1)(x-10)=0$

よって　$x=-1,\ 10$

このうち，① を満たすものは　$x=10$

(4)　真数は正であるから　$x-3>0$　かつ　$x-1>0$

よって　$x>3$

このとき，$\log_3(x-3)=\log_{3^2}(x-3)^2$ であるから，方程式は

$$\log_9(x-3)^2=\log_9(x-1)$$

ゆえに　$(x-3)^2=x-1$

整理すると　$x^2-7x+10=0$

よって　$(x-2)(x-5)=0$

$x>3$ であるから　$x=5$

(5)　真数は正であるから　$x^3-2x^2-2x+3>0$　……②

底は 1 でない正の数であるから

$$x-1>0 \quad \text{かつ} \quad x-1 \neq 1$$

すなわち　$x>1$　かつ　$x\neq 2$ ……③

対数の定義から　$x^3-2x^2-2x+3=(x-1)^3$

整理すると　$x^2-5x+4=0$

よって　$(x-1)(x-4)=0$

ゆえに　$x=1,\ 4$

このうち，③ を満たすものは　$x=4$

これは ② を満たすから，求める解である。

$\boxed{6}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_2(x^2+3x+4)=1$　　(2)　$\log_3(x-5)+\log_3(2x-3)=2$

(3)　$\log_2(x^2+5x+2)-\log_2(2x+3)=2$　　(4)　$\log_2 x+\log_4(x+3)=1$

(5)　$\log_x 5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$　　(6)　$\log_{2x}(x^3+6x^2-x-2)=2$

解答　(1)　$x=-1,\ -2$　(2)　$x=6$　(3)　$x=5$　(4)　$x=1$　(5)　$x=125$　(6)　$x=1$

解説

(1)　対数の定義から　$x^2+3x+4=2^1$

ゆえに　$x^2+3x+2=0$　すなわち　$(x+1)(x+2)=0$

したがって　$x=-1,\ -2$

(2)　真数は正であるから　$x-5>0$　かつ　$2x-3>0$

よって　$x>5$

方程式から　$\log_3(x-5)(2x-3)=\log_3 3^2$

ゆえに　$(x-5)(2x-3)=9$　　整理して　$2x^2-13x+6=0$

よって　$(x-6)(2x-1)=0$

$x>5$ であるから　$x=6$

(3)　真数は正であるから　$x^2+5x+2>0$　かつ　$2x+3>0$　……①

方程式から　$\log_2(x^2+5x+2)=\log_2 4+\log_2(2x+3)$

よって　$\log_2(x^2+5x+2)=\log_2 4(2x+3)$

したがって　$x^2+5x+2=4(2x+3)$

整理して　$x^2-3x-10=0$

ゆえに　$(x+2)(x-5)=0$

よって　$x=-2,\ 5$

このうち，① を満たすものが解であるから　$x=5$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+3>0$

よって　$x>0$

このとき，$\log_2 x=\log_4 x^2$ であるから，方程式は　$\log_4 x^2(x+3)=\log_4 4$

ゆえに　$x^2(x+3)=4$　　整理して　$x^3+3x^2-4=0$

したがって　$(x-1)(x+2)^2=0$　　$x>0$ であるから　$x=1$

(5)　底は 1 でない正の数であるから　$x>0$　かつ　$x\neq 1$　……①

方程式から　$x^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{5}$　　両辺を 2 乗して　$x=125$

これは ① を満たすから，求める解である。

(6)　真数は正であるから　$x^3+6x^2-x-2>0$　……①

底は 1 でない正の数であるから　$2x>0$　かつ　$2x\neq 1$

よって　$x>0,\ x\neq\dfrac{1}{2}$　……②

方程式から　$x^3+6x^2-x-2=(2x)^2$

整理して　$x^3+2x^2-x-2=0$

ゆえに　$(x+1)(x-1)(x+2)=0$

したがって　$x=\pm 1,\ -2$

このうち，② を満たすものは　$x=1$

これは ① を満たすから，求める解である。

$\boxed{7}$ 次の方程式を解け。

(1)　$(\log_2 x)^2-7\log_2 x-8=0$　　(2)　$x^{\log_2 x}=\dfrac{x^5}{64}$

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{2},\ 256$　(2)　$x=4,\ 8$

解説

(1)　$\log_2 x=t$ とおくと　$t^2-7t-8=0$

よって　$(t+1)(t-8)=0$　　ゆえに　$t=-1,\ 8$

すなわち　$\log_2 x=-1$ または $\log_2 x=8$

よって　$x=2^{-1},\ 2^8$　すなわち　$x=\dfrac{1}{2},\ 256$

(2)　$\log_2 x$ の真数について，$x>0$ から　$x^{\log_2 x}>0,\ x^5>0$

よって，方程式の両辺は正であり，2 を底とする対数をとると

$$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{x^5}{64}$$

よって　$(\log_2 x)(\log_2 x)=\log_2 x^5-\log_2 2^6$

整理すると　$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

ゆえに　$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$

したがって　$\log_2 x=2$ または $\log_2 x=3$

よって　$x=2^2,\ 2^3$　すなわち　$x=4,\ 8$

$\boxed{8}$ 次の方程式を解け。

(1)　$5\log_3 3x^2-4(\log_3 x)^2+1=0$　　(2)　$\log_2 x^2-\log_x 4+3=0$

(3)　$2^{x\log_4 x}=x\sqrt{x}$　　(4)　$(x^{\log_2 x})^{\log_2 x}=64x^{6\log_2 x-11}$

解答　(1)　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 27$　(2)　$x=\dfrac{1}{4},\ \sqrt{2}$　(3)　$x=1,\ 3$　(4)　$x=2,\ 4,\ 8$

解説

(1)　$\log_3 x=t$ とおくと　$\log_3 3x^2=1+2\log_3 x=1+2t$

よって，方程式は　$5(1+2t)-4t^2+1=0$

整理すると　$2t^2-5t-3=0$

ゆえに　$(2t+1)(t-3)=0$　　よって　$t=-\dfrac{1}{2},\ 3$

すなわち　$\log_3 x=-\dfrac{1}{2}$　または　$\log_3 x=3$

したがって　$x=3^{-\frac{1}{2}},\ 3^3$　すなわち　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 27$

(2)　底と真数の条件から　$x>0$　かつ　$x\neq 1$　……①

方程式から　$2\log_2 x-\dfrac{2}{\log_2 x}+3=0$

よって　$2(\log_2 x)^2+3\log_2 x-2=0$

ゆえに　$(\log_2 x+2)(2\log_2 x-1)=0$

よって　$\log_2 x=-2$　または　$\log_2 x=\dfrac{1}{2}$

したがって　$x=2^{-2},\ 2^{\frac{1}{2}}$　すなわち　$x=\dfrac{1}{4},\ \sqrt{2}$

これらは ① を満たすから，求める解である。

(3)　$\log_4 x$ の真数について，$x>0$ であるから　$x\sqrt{x}>0$

よって，方程式の両辺は正であり，対数の定義から　$x\log_4 x=\log_2 x\sqrt{x}$

ここで　$\log_2 x\sqrt{x}=\log_{2^2}(x\sqrt{x})^2=\log_4 x^3=3\log_4 x$

ゆえに　$x\log_4 x=3\log_4 x$　　よって　$(x-3)\log_4 x=0$

ゆえに　$x=3$　または　$\log_4 x=0$　　したがって　$x=1,\ 3$

(4)　真数は正であるから　$x>0$

よって，方程式の両辺は正であり　$x^{(\log_2 x)^2}=64x^{6\log_2 x-11}$

両辺の 2 を底とする対数をとると　$\log_2 x^{(\log_2 x)^2}=\log_2\left(64x^{6\log_2 x-11}\right)$

ここで　(左辺)$=(\log_2 x)^2\cdot\log_2 x=(\log_2 x)^3$

(右辺)$=\log_2 64+\log_2 x^{6\log_2 x-11}$

$=6+(6\log_2 x-11)\cdot\log_2 x$

したがって　$(\log_2 x)^3=6+(6\log_2 x-11)\log_2 x$

すなわち　$(\log_2 x)^3-6(\log_2 x)^2+11\log_2 x-6=0$

$\log_2 x=t$ とおくと　$t^3-6t^2+11t-6=0$

ゆえに　$(t-1)(t-2)(t-3)=0$　　よって　$t=1,\ 2,\ 3$

すなわち　$\log_2 x=1,\ 2,\ 3$

したがって　$x=2,\ 4,\ 8$

$\boxed{9}$ 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x-3^y=-27 \\ \log_2(x+1)-\log_2(y+3)=-1 \end{cases}$ を解け。

解答　$x=3,\ y=5$

解説

$\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 & \cdots\cdots ① \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とする。

真数は正であるから　$x+1>0$　かつ　$y+3>0$

よって　$x>-1$，$y>-3$　……③

② を変形して　$\log_2(x+1)+1=\log_2(y+3)$

すなわち　$\log_2 2(x+1)=\log_2(y+3)$

ゆえに　$2(x+1)=y+3$　　よって　$y=2x-1$　……④

④ を ① に代入すると　$8\cdot 3^x - 3^{2x-1} = -27$

すなわち　$8\cdot 3^x - \frac{1}{3}(3^x)^2 = -27$

両辺に 3 を掛けて整理すると　$(3^x)^2 - 24\cdot 3^x - 81 = 0$

よって　$(3^x+3)(3^x-27)=0$

$3^x>0$ であるから　$3^x=27$

ゆえに　$x=3$　　④ に代入すると　$y=5$

これらは ③ を満たす。　　よって　$x=3$，$y=5$

$\boxed{10}$ (1)　次の方程式を解け。

$$\log_2 x - \log_8 x = 2(\log_2 x)(\log_4 x)$$

(2)　次の方程式を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

$$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}(y+2x^2+1)$$

解答　(1)　$x=1$，$\sqrt[3]{4}$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 9)$，$(4,\ 11)$

解説

(1)　方程式から　$\log_2 x - \log_{2^3} x = 2(\log_2 x)\log_{2^2} x$

よって　$\log_2 x - \frac{1}{3}\log_2 x = 2(\log_2 x)\cdot\frac{1}{2}\log_2 x$

すなわち　$\frac{2}{3}\log_2 x = (\log_2 x)^2$

ゆえに　$(\log_2 x)\left(\log_2 x - \frac{2}{3}\right)=0$

これを解いて　$\log_2 x = 0$　または　$\log_2 x = \frac{2}{3}$

したがって　$x=1$，$\sqrt[3]{4}$

(2)　方程式から　$\log_{10} xy = \log_{10}(y+2x^2+1)$

よって　$xy = y+2x^2+1$

ゆえに　$(x-1)y = 2x^2+1$　……①

$x=1$ のとき，① は $0=3$ となり，成り立たない。

よって，自然数 x は 2 以上である。

① から　$y=\frac{2x^2+1}{x-1}=\frac{2(x^2-1)+3}{x-1}=\frac{2(x+1)(x-1)+3}{x-1}$

$=2x+2+\frac{3}{x-1}$　……②

y は整数であるから $\frac{3}{x-1}$ は整数である。

ゆえに，$x-1$ $(\geqq 1)$ は 3 の約数であるから

$x-1=1$　または　$x-1=3$

よって　$x=2$　または　$x=4$

② から　$x=2$ のとき $y=9$，$x=4$ のとき $y=11$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 9)$，$(4,\ 11)$

$\boxed{11}$ 次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$　　(2)　$\log_4(2x+3)+\log_4(4x+1)=2\log_4 5$

(3)　$\log_2(3-x)=\log_4(2x+18)$

解答　(1)　$x=1$　　(2)　$x=1$　　(3)　$x=-1$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

よって　$x>0$　……①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x+3)=2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$　すなわち　$(x-1)(x+4)=0$

① から，解は　$x=1$

(2)　真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $4x+1>0$

よって　$x>-\frac{1}{4}$　……①

方程式を変形すると　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 5^2$

すなわち　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 25$

ゆえに　$(2x+3)(4x+1)=25$

整理して　$4x^2+7x-11=0$　すなわち　$(x-1)(4x+11)=0$

① から，解は　$x=1$

(3)　真数は正であるから　$3-x>0$　かつ　$2x+18>0$

よって　$-9<x<3$　……①

方程式を変形すると　$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4}$

すなわち　$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{2}$

両辺に 2 を掛けて　$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18)$

すなわち　$\log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$

ゆえに　$(3-x)^2=2x+18$

整理して　$x^2-8x-9=0$　すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

① から，解は　$x=-1$

$\boxed{12}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+3=0$　　(2)　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{4}} x=0$

(3)　$(\log_3 x)^2-\log_9 x^2-2\leqq 0$　　(4)　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{3}} x^2-15>0$

解答　(1)　$x=2$，8　　(2)　$x=1$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 9$　　(4)　$0<x<\frac{1}{27}$，$243<x$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^4>0$

すなわち　$x>0$　……①

方程式を変形すると　$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

$\log_2 x=t$ とおくと　$t^2-4t+3=0$

よって　$(t-1)(t-3)=0$

ゆえに　$t=1$，3

$t=1$　すなわち　$\log_2 x=1$ のとき　$x=2^1=2$

$t=3$　すなわち　$\log_2 x=3$ のとき　$x=2^3=8$

したがって　$x=2$，8

これらは ① を満たす。

(2)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=0$

すなわち　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x=0$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$ とおくと　$t^2-\frac{t}{2}=0$

よって　$t\left(t-\frac{1}{2}\right)=0$　　ゆえに　$t=0$，$\frac{1}{2}$

$t=0$　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x=0$ のとき　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

$t=\frac{1}{2}$　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$x=1$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$

これらは ① を満たす。

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式を変形すると　$(\log_3 x)^2-\frac{\log_3 x^2}{\log_3 9}-2\leqq 0$

すなわち　$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2\leqq 0$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t^2-t-2\leqq 0$　　よって　$(t+1)(t-2)\leqq 0$

これを解いて　$-1\leqq t\leqq 2$

ゆえに　$-1\leqq \log_3 x\leqq 2$　　すなわち　$\log_3\frac{1}{3}\leqq \log_3 x\leqq \log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 9$　……②

①，② から，解は　$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 9$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+2\log_{\frac{1}{3}} x-15>0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$ とおくと　$t^2+2t-15>0$

よって　$(t-3)(t+5)>0$　　これを解いて　$t<-5$，$3<t$

ゆえに　$\log_{\frac{1}{3}} x<-5$，$3<\log_{\frac{1}{3}} x$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} 243$，$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}<\log_{\frac{1}{3}} x$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>243$，$\frac{1}{27}>x$　……②

①，② から，解は　$0<x<\frac{1}{27}$，$243<x$

13 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} \log_{10}x+\log_{10}y=2 \\ x+y=25 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2y^4=1 \\ \log_2 x+(\log_2 y)^2=3 \end{cases}$

解答 (1) $x=5$，$y=20$ または $x=20$，$y=5$

(2) $x=4$，$y=\dfrac{1}{2}$ または $x=\dfrac{1}{64}$，$y=8$

解説

(1) $\begin{cases} \log_{10}x+\log_{10}y=2 & \cdots\cdots ① \\ x+y=25 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

真数は正であるから　$x>0$ かつ $y>0$　……③

① から　$\log_{10}xy=\log_{10}100$

よって　$xy=100$　……④

また，② から　$y=25-x$　……⑤

これを ④ に代入して　$x(25-x)=100$

ゆえに　$x^2-25x+100=0$

これを解いて　$x=5$，20

⑤ から　$x=5$ のとき $y=20$，$x=20$ のとき $y=5$

これらは ③ を満たす。

よって　$x=5$，$y=20$ または $x=20$，$y=5$

(2) $\begin{cases} x^2y^4=1 & \cdots\cdots ① \\ \log_2 x+(\log_2 y)^2=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

真数は正であるから　$x>0$ かつ $y>0$

① の両辺は正であるから，2 を底とする対数をとると　$\log_2 x^2y^4=\log_2 1$

よって　$2\log_2 x+4\log_2 y=0$

ゆえに　$\log_2 x=-2\log_2 y$　……③

これを ② に代入して　$-2\log_2 y+(\log_2 y)^2=3$

よって　$(\log_2 y+1)(\log_2 y-3)=0$

ゆえに　$\log_2 y=-1$，3

したがって　$y=\dfrac{1}{2}$，8（$y>0$ を満たす）

$y=\dfrac{1}{2}$ のとき，① から　$x^2=2^4$　　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{2^4}=4$

$y=8$ のとき，① から　$x^2=\dfrac{1}{8^4}$　　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{\dfrac{1}{8^4}}=\dfrac{1}{64}$

よって　$x=4$，$y=\dfrac{1}{2}$ または $x=\dfrac{1}{64}$，$y=8$

参考　$\log_2 y=-1$，3 が求まった後，③ より $\log_2 x$ を求めてもよい。

14 $\log_4(x+13)=\log_2(x+1)$ を満たす実数 x は $\boxed{}$ である。

解答 3

解説

真数は正であるから，$x+13>0$ かつ $x+1>0$ より

$x>-1$　……①

$$\log_4(x+13)=\frac{\log_2(x+13)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x+13)$$

であるから，方程式は　$\dfrac{1}{2}\log_2(x+13)=\log_2(x+1)$

ゆえに　$\log_2(x+13)=\log_2(x+1)^2$

よって，$x+13=(x+1)^2$ から　$x^2+x-12=0$

ゆえに　$(x-3)(x+4)=0$

よって　$x=3$，-4

① から，求める解は　$x=3$

15 $\log_3(x^2)+\left(\log_x\dfrac{1}{27}\right)^2=7$ を満たす正の実数 x をすべて求めよ。

解答 $x=\dfrac{1}{3}$，27，$3\sqrt{3}$

解説

真数は正であり，底は 1 でない正の数であるから　$0<x<1$，$1<x$　……①

方程式を変形すると　$2\log_3 x+(-3\log_x 3)^2=7$

よって　$2\log_3 x+9\cdot\dfrac{1}{(\log_3 x)^2}=7$　　ゆえに　$2(\log_3 x)^3-7(\log_3 x)^2+9=0$

$\log_3 x=t$ とおくと　$2t^3-7t^2+9=0$

すなわち　$(t+1)(t-3)(2t-3)=0$　　よって　$t=-1$，3，$\dfrac{3}{2}$

ゆえに　$\log_3 x=-1$，3，$\dfrac{3}{2}$　　すなわち　$x=3^{-1}$，3^3，$3^{\frac{3}{2}}$

したがって　$x=\dfrac{1}{3}$，27，$3\sqrt{3}$

これらは ① を満たす。

16 a を 1 と異なる正の数とする。$\log_a(x+2)+\log_{a^2}(x-1)=\log_a 4$ を解くと，$x=\boxed{}$ である。

解答 2

解説

真数は正であるから　$x+2>0$ かつ $x-1>0$　　よって　$x>1$　……①

方程式を変形すると　$\log_a(x+2)+\dfrac{\log_a(x-1)}{\log_a a^2}=\log_a 4$

よって　$2\log_a(x+2)+\log_a(x-1)=2\log_a 4$

ゆえに　$\log_a(x+2)^2(x-1)=\log_a 16$　　したがって　$(x+2)^2(x-1)=16$

整理して　$x^3+3x^2-20=0$　　すなわち　$(x-2)(x^2+5x+10)=0$

$x^2+5x+10=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$ であるから，方程式の実数解は　$x=2$

これは ① を満たす。

17 x の方程式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=1$ を解け。

解答 $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$

解説

真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $x-4>0$ より　$x>4$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=\dfrac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(x-4)$，$1=\log_2 2$ であるから，方程式は

$\log_2(x-1)+\log_2(x-4)=\log_2 2$

よって　$\log_2(x-1)(x-4)=\log_2 2$　　ゆえに　$(x-1)(x-4)=2$

よって　$x^2-5x+2=0$　　ゆえに　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

$x>4$ であるから，解は　$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$

18 方程式 $\log_x 8-\log_2\dfrac{x}{4}=0$ を解け。ただし，$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ とする。

解答 $x=\dfrac{1}{2}$，8

解説

与式から　$\dfrac{\log_2 8}{\log_2 x}-\log_2 x+\log_2 4=0$　　よって　$\dfrac{3}{\log_2 x}-\log_2 x+2=0$

両辺に $\log_2 x$ を掛けて　$3-(\log_2 x)^2+2\log_2 x=0$

ゆえに　$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$

よって　$(\log_2 x+1)(\log_2 x-3)=0$　　ゆえに　$\log_2 x=-1$，3

$\log_2 x=-1$ から　$x=\dfrac{1}{2}$

$\log_2 x=3$ から　$x=8$

これらの値は，$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ を満たす。

よって，解は　$x=\dfrac{1}{2}$，8

19 連立方程式 $\begin{cases} 3\log_2 x+3\log_8 y^2=5 \\ 2\log_4 x^2-\log_2 y=8 \end{cases}$ を解け。

解答 $x=8$，$y=\dfrac{1}{4}$

解説

真数は正であるから　$x>0$，$y>0$　……①

$3\log_2 x+3\log_8 y^2=5$ から　$3\log_2 x+3\cdot\dfrac{\log_2 y^2}{\log_2 8}=5$

よって　$3\log_2 x+2\log_2 y=5$　……②

$2\log_4 x^2-\log_2 y=8$ から　$2\cdot\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 4}-\log_2 y=8$

ゆえに　$2\log_2 x-\log_2 y=8$　……③

②，③ から　$\log_2 x=3$，$\log_2 y=-2$　　よって　$x=8$，$y=\dfrac{1}{4}$

これらは ① を満たす。

ゆえに，解は　$x=8$，$y=\dfrac{1}{4}$

20 方程式 $\log_2 x^2=2+\log_2|x-2|$ を解け。

解答　$x=-2\pm2\sqrt{3}$

解説

真数は正であるから　$x^2>0$ かつ $|x-2|>0$

よって　$x\fallingdotseq 0$ かつ $x\fallingdotseq 2$

$$2+\log_2|x-2|=\log_2 4+\log_2|x-2|=\log_2 4|x-2|$$

ゆえに，与えられた方程式は　$\log_2 x^2=\log_2 4|x-2|$

すなわち　$x^2=4|x-2|$

[1]　$x<2$ のとき

$x^2=-4(x-2)$　　整理すると　$x^2+4x-8=0$

よって　$x=-2\pm2\sqrt{3}$

これらは $x<2$ かつ $x\fallingdotseq 0$ を満たす。

[2]　$x>2$ のとき

$x^2=4(x-2)$　　整理すると　$x^2-4x+8=0$

この方程式は $(x-2)^2+4=0$ となり，実数解をもたない。

[1]，[2] から　$x=-2\pm2\sqrt{3}$

21 方程式 $\log_3 x+\log_9(4-x)=1$ を解け。

解答　$x=3$，$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

解説

真数は正であるから　$x>0$ かつ $4-x>0$

ゆえに　$0<x<4$　……①

方程式から　$\log_3 x+\dfrac{\log_3(4-x)}{\log_3 9}=1$

$2\log_3 x+\log_3(4-x)=2$

$\log_3 x^2+\log_3(4-x)=2$

$\log_3 x^2(4-x)=2$

よって　$x^2(4-x)=3^2$

整理して　$x^3-4x^2+9=0$

ゆえに　$(x-3)(x^2-x-3)=0$

よって　$x=3$，$\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

① を満たすものが解であるから　$x=3$，$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

22 方程式 $3\log_2 x+1=\log_2(3x+1)$ を満たす実数 x の値は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{\quad}+\sqrt{{}^{イ}\boxed{\quad}}}{{}^{ウ}\boxed{\quad}}$ である。

解答　（ア）1　（イ）3　（ウ）2

解説

真数は正であるから，$x>0$ かつ $3x+1>0$ より　$x>0$

方程式から　$\log_2 2x^3=\log_2(3x+1)$

よって　$2x^3=3x+1$　すなわち　$2x^3-3x-1=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(2x^2-2x-1)=0$

ゆえに　$x=-1$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　$x>0$ であるから　$x=\dfrac{{}^{ア}1+\sqrt{{}^{イ}3}}{{}^{ウ}2}$

23 $|\log_2|x-1|-2|=1$ の解 x は，小さい順に並べると $-{}^{ア}\boxed{\quad}$，$-{}^{イ}\boxed{\quad}$，${}^{ウ}\boxed{\quad}$，${}^{エ}\boxed{\quad}$ である。

解答　（ア）7　（イ）1　（ウ）3　（エ）9

解説

$|\log_2|x-1|-2|=1$ から　$\log_2|x-1|-2=\pm1$

$\log_2|x-1|-2=1$ のとき　$\log_2|x-1|=3$

よって，$|x-1|=8$ から　$x-1=\pm8$　　ゆえに　$x=9$，-7

$\log_2|x-1|-2=-1$ のとき　$\log_2|x-1|=1$

よって，$|x-1|=2$ から　$x-1=\pm2$　　ゆえに　$x=3$，-1

したがって，解 x を小さい順に並べると　$-{}^{ア}7$，$-{}^{イ}1$，${}^{ウ}3$，${}^{エ}9$

24 x についての方程式 $(x^2+1)^{x^2-3x+2}=1$ の実数解を求めよ。

解答　$x=0$，1，2

解説

すべての実数 x に対して，$x^2+1>0$ であるから，方程式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}(x^2+1)^{x^2-3x+2}=\log_{10}1$$

すなわち　$(x^2-3x+2)\log_{10}(x^2+1)=0$

よって　$x^2-3x+2=0$ または $\log_{10}(x^2+1)=0$

$x^2-3x+2=0$ から　$(x-1)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=1$，2

$\log_{10}(x^2+1)=0$ から　$x^2+1=1$　　ゆえに　$x^2=0$

よって　$x=0$　　したがって　$x=0$，1，2

25 方程式 $10^{2\log_{10}x}=4$ の解は，$x=\boxed{\quad}$ である。

解答　2

解説

真数は正であるから　$x>0$

方程式を変形すると　$10^{\log_{10}x^2}=4$

よって　$x^2=4$　　$x>0$ であるから　$x=2$

26 $(\log_2(\log_3 x))^2-\log_2(\log_3 x)^5+6=0$ の解は $x={}^{ア}\boxed{\quad}$，${}^{イ}\boxed{\quad}$ である。

解答　（ア），（イ）　81，6561

解説

真数は正であるから　$x>0$ かつ $\log_3 x>0$　　よって　$x>1$

方程式を変形すると　$\{\log_2(\log_3 x)\}^2-5\log_2(\log_3 x)+6=0$

$\log_2(\log_3 x)=X$ とおくと　$X^2-5X+6=0$

よって　$(X-2)(X-3)=0$　　ゆえに　$X=2$，3

よって　$\log_2(\log_3 x)=2$，3　　すなわち　$\log_3 x=4$，8

したがって　$x={}^{ア}81$，${}^{イ}6561$　[(ア)，(イ) は順不同]

27 方程式 $\log_{\sqrt{2}}(2-x)+\log_2(x+1)=1$ の解をすべて求めると，$x=\boxed{\quad}$ である。

解答　$x=1$，$1-\sqrt{3}$

解説

真数は正であるから　$2-x>0$　かつ　$x+1>0$

よって　$-1<x<2$

方程式から　$\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2\sqrt{2}}+\log_2(x+1)=\log_2 2$

よって　$2\log_2(2-x)+\log_2(x+1)=\log_2 2$

すなわち　$\log_2(2-x)^2(x+1)=\log_2 2$

ゆえに　$(2-x)^2(x+1)=2$

整理すると　$x^3-3x^2+2=0$

よって　$(x-1)(x^2-2x-2)=0$

したがって　$x=1$，$1\pm\sqrt{3}$

$-1<x<2$ であるから，解は　$x=1$，$1-\sqrt{3}$

28 方程式 $\log_9(x+4)=\log_3(2x-7)+\log_5\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$ を解け。

解答　$x=\dfrac{59}{4}$

解説

真数は正であるから　$x+4>0$ かつ $2x-7>0$

よって　$x>\dfrac{7}{2}$　……①

$$\log_9(x+4)=\frac{\log_3(x+4)}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\log_3(x+4)$$

$$\log_5\frac{1}{5\sqrt{5}}=\log_5 5^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$$

よって，与えられた方程式は　$\dfrac{1}{2}\log_3(x+4)=\log_3(2x-7)-\dfrac{3}{2}$

両辺に 2 を掛けて整理すると　$\log_3\dfrac{(2x-7)^2}{x+4}=3$

すなわち　$\dfrac{(2x-7)^2}{x+4}=3^3$

$(2x-7)^2=27(x+4)$

よって　$4x^2-55x-59=0$　　ゆえに　$(x+1)(4x-59)=0$

① から　$x=\dfrac{59}{4}$

29 次の方程式を解け。

(1) $16^x-9\cdot4^x+8=0$　　(2) $\log_2 x=\log_4(3x+10)$

解答 (1) $x=0,\ \dfrac{3}{2}$　(2) $x=5$

解説

(1) $16^x=(4^x)^2$ であるから，$4^x=t$ とおくと，与えられた方程式は　$t^2-9t+8=0$

よって　$(t-1)(t-8)=0$

$t>0$ であるから　$t=1,\ 8$

よって　$4^x=1,\ 8$　すなわち　$4^x=4^0,\ 4^{\frac{3}{2}}$

したがって　$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

(2) 対数の真数は正であるから　$x>0,\ 3x+10>0$

ゆえに　$x>0,\ x>-\dfrac{10}{3}$

共通範囲をとって　$x>0$

このとき，方程式は　$\log_2 x=\dfrac{\log_2(3x+10)}{\log_2 4}$

すなわち　$\log_2 x=\dfrac{\log_2(3x+10)}{2}$

両辺に 2 を掛けて　$2\log_2 x=\log_2(3x+10)$

よって　$\log_2 x^2=\log_2(3x+10)$

ゆえに　$x^2=3x+10$

すなわち　$(x+2)(x-5)=0$

$x>0$ であるから　$x=5$

30 方程式 $\log_x 4-\log_2 x^4=7$ を解け。

解答 $x=\dfrac{1}{4},\ \sqrt[4]{2}$

解説

底と真数の条件から　$x>0,\ x\neq1$

このとき，$\log_x 4-\log_2 x^4=7$ から　$\dfrac{2}{\log_2 x}-4\log_2 x=7$

すなわち　$4(\log_2 x)^2+7\log_2 x-2=0$

よって　$(\log_2 x+2)(4\log_2 x-1)=0$

ゆえに　$\log_2 x=-2,\ \dfrac{1}{4}$

したがって　$x=\dfrac{1}{4},\ \sqrt[4]{2}$　($x>0,\ x\neq1$ を満たす)

31 方程式 $2\log_3(3x-2)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)=2$ を解け。

解答 $x=\dfrac{5}{3}$

解説

真数は正であるから　$3x-2>0$ かつ $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}>0$

すなわち　$x>\dfrac{2}{3}$ かつ $x>\dfrac{1}{6}$　よって　$x>\dfrac{2}{3}$ ……①

方程式から　$\log_3(3x-2)^2+\dfrac{\log_3\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)}{\log_3\dfrac{1}{3}}=\log_3 3^2$

すなわち　$\log_3(3x-2)^2-\log_3\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)=\log_3 9$

よって　$\log_3(3x-2)^2=\log_3\left\{9\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\right\}$

ゆえに　$(3x-2)^2=6x-1$　すなわち　$9x^2-18x+5=0$

よって　$(3x-1)(3x-5)=0$　① から　$x=\dfrac{5}{3}$

32 方程式 $6x-9=4^{\log_2 x}$ を解け。

解答 $x=3$

解説

真数は正であるから　$x>0$ ……①

$4^{\log_2 x}=(2^{\log_2 x})^2=x^2$ であるから，与式は　$6x-9=x^2$

すなわち　$x^2-6x+9=0$　よって　$(x-3)^2=0$

ゆえに　$x=3$　これは ① を満たすから，求める解である。

33 方程式 $\log_{x-2}(x^3-16x+8)=3$ を解け。

解答 $x=4$

解説

底の条件から　$x-2>0,\ x-2\neq1$

よって　$x>2,\ x\neq3$ ……①

また，真数は正であるから　$x^3-16x+8>0$ ……②

与式から　$x^3-16x+8=(x-2)^3$　整理すると　$3x^2-14x+8=0$

よって　$(x-4)(3x-2)=0$　① を満たす x の値は　$x=4$

このとき，$x^3-16x+8=64-64+8=8>0$ であり，② を満たすから解である。

したがって　$x=4$

34 方程式 $2^{x^2-2x-2}=3^{\log_3 2}$ を解け。

解答 $x=-1,\ 3$

解説

$3^{\log_3 2}=2$ であるから，方程式は　$2^{x^2-2x-2}=2$

よって　$x^2-2x-2=1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

これを解くと　$x=-1,\ 3$

35 方程式 $\dfrac{x^{16}}{125}=x^{16\log_5 x}$ を解け。

解答 $x=5^{\frac{1}{4}},\ 5^{\frac{3}{4}}$

解説

真数は正であるから　$x>0$

両辺の 5 を底とする対数をとると　$\log_5\dfrac{x^{16}}{125}=\log_5 x^{16\log_5 x}$

よって　$16\log_5 x-\log_5 125=16(\log_5 x)^2$

すなわち　$16(\log_5 x)^2-16\log_5 x+3=0$

ゆえに　$(4\log_5 x-1)(4\log_5 x-3)=0$

したがって　$\log_5 x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}$

よって，求める x の値は　$x=5^{\frac{1}{4}},\ 5^{\frac{3}{4}}$　(これらは $x>0$ を満たす)

36 次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $\log_2(3^x+5)=5$　(2) $16^{x^2}8^x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $8^x-4^x-2^{x+1}+2=0$

(4) $3^{x^2\log_9 x}=x\sqrt{x}$　(5) $\begin{cases}\log_2 x+2\log_2 y=0\\(\log_2 x)^2+8\log_2 y=5\end{cases}$

解答 (1) $x=3$　(2) $x=-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4}$　(3) $x=0,\ \dfrac{1}{2}$　(4) $x=1,\ \sqrt{3}$

(5) $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ \sqrt{2}\right),\ \left(32,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$

解説

(1) $\log_2(3^x+5)=5$ から　$3^x+5=2^5$

ゆえに　$3^x=27$　よって　$x=3$

(2) 方程式から　$(2^4)^{x^2}(2^3)^x=2^{-\frac{1}{2}}$　すなわち　$2^{4x^2+3x}=2^{-\frac{1}{2}}$

よって　$4x^2+3x=-\dfrac{1}{2}$　整理して　$8x^2+6x+1=0$

ゆえに　$(2x+1)(4x+1)=0$　よって　$x=-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4}$

(3) 方程式から　$(2^x)^3-(2^x)^2-2\cdot2^x+2=0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$　方程式は　$X^3-X^2-2X+2=0$

ゆえに　$(X-1)(X^2-2)=0$　よって　$X=1,\ \pm\sqrt{2}$

$X>0$ であるから　$X=1,\ \sqrt{2}$

ゆえに　$2^x=1,\ 2^{\frac{1}{2}}$　よって　$x=0,\ \dfrac{1}{2}$

(4) 真数は正であるから　$x>0$ ……①

両辺の 3 を底とする対数をとると　$x^2\log_9 x=\log_3 x\sqrt{x}$

$\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}\log_3 x$，$\log_3 x\sqrt{x}=\log_3 x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\log_3 x$ であるから

$$\frac{1}{2}x^2\log_3 x=\frac{3}{2}\log_3 x$$

ゆえに　$(x^2-3)\log_3 x=0$　よって　$x^2-3=0,\ \log_3 x=0$

$x^2-3=0$ から　$x=\pm\sqrt{3}$，　$\log_3 x=0$ から　$x=1$

① から，解は　$x=1,\ \sqrt{3}$

(5) $\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと，連立方程式は

$X+2Y=0$ ……①，　$X^2+8Y=5$ ……②

① から　$2Y=-X$ ……③

② に代入して整理すると　　$X^2-4X-5=0$

ゆえに　　$(X+1)(X-5)=0$　　　　よって　　$X=-1,\ 5$

③ から　　$X=-1$ のとき　$Y=\dfrac{1}{2}$，$X=5$ のとき　$Y=-\dfrac{5}{2}$

$\log_2 x=X$ より　$x=2^X$，$\log_2 y=Y$ より　$y=2^Y$ であるから

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right),\ \left(32,\ \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$$