桁数•小数首位クイズ

$\boxed{1}$ 3^{20} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　10 桁

解説

$$\log_{10}3^{20}=20\log_{10}3=20\times0.4771=9.542$$

ゆえに　　$9<\log_{10}3^{20}<10$

よって　　$10^9<3^{20}<10^{10}$

したがって，3^{20} は 10 桁の整数である。

$\boxed{2}$ 2^{100} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

解答　31 桁

解説

$\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2=100\times0.3010=30.10$

ゆえに　$30<\log_{10}2^{100}<31$

よって　$10^{30}<2^{100}<10^{31}$

したがって，2^{100} は 31 桁の整数である。

$\boxed{3}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　小数第 15 位

解説

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30}=30\log_{10}\frac{1}{3}=30\log_{10}3^{-1}=-30\log_{10}3$$

$$=-30\times0.4771=-14.313$$

ゆえに　$-15<\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}<-14$

よって　$10^{-15}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}<10^{-14}$

したがって，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第 15 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{4}$ 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<0.001$ を満たす最小の整数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

解答　10

解説

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.001$$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\log_{10}0.001\quad すなわち\quad n\log_{10}\frac{1}{2}<\log_{10}10^{-3}$$

ゆえに　$-n\log_{10}2<-3$

よって　$n>\dfrac{3}{\log_{10}2}=\dfrac{3}{0.3010}=9.9\cdots\cdots$

ゆえに，最小の整数 n は　10

$\boxed{5}$ 不等式 $1.2^n<100$ を満たす最大の整数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　25

解説

$$1.2^n<100$$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$\log_{10}1.2^n<\log_{10}100\quad すなわち\quad n\log_{10}1.2<\log_{10}10^2$$

$$\log_{10}1.2=\log_{10}\frac{2^2\times3}{10}=2\log_{10}2+\log_{10}3-\log_{10}10$$

$$=2\times0.3010+0.4771-1=0.0791$$

であるから　$0.0791n<2$

よって　$n<\dfrac{2}{0.0791}=25.2\cdots\cdots$

ゆえに，最大の整数 n は　25

$\boxed{6}$ 30 分ごとに分裂して，個数が 2 倍に増えるバクテリアがある。このバクテリア 10 個が，1 億個以上になるのは何時間後か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とし，答えは整数で求めよ。

解答　12 時間後

解説

x 時間後のバクテリアの個数は　10×2^{2x}

これが 1 億個以上であるとすると

$$10\times2^{2x}\geqq10^8$$

すなわち　$2^{2x}\geqq10^7$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$2x\log_{10}2\geqq7$$

よって　$2\times0.3010x\geqq7$

ゆえに　$x\geqq\dfrac{7}{2\times0.3010}=11.6\cdots\cdots$

答　12 時間後

$\boxed{7}$ あるガラス板を 1 枚通るごとに，光線はその強さの 1 割を失う。このガラス板を何枚以上重ねると，これを通ってきた光線の強さが，もとの強さの半分以下になるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　7 枚以上

解説

ガラス板を x 枚重ねたとき，これを通ってきた光線の強さがもとの強さの半分以下になったとすると

$$\left(\frac{9}{10}\right)^x\leqq\frac{1}{2}$$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$x(2\log_{10}3-1)\leqq-\log_{10}2$$

よって　$x(2\times0.4771-1)\leqq-0.3010$

ゆえに　$x\geqq\dfrac{-0.3010}{-0.0458}=6.5\cdots\cdots$　　答　7 枚以上

$\boxed{8}$ 6^{30} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　24 桁

解説

$\log_{10}6^{30}=30\log_{10}6=30(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=30(0.3010+0.4771)=23.343$

ゆえに　$23<\log_{10}6^{30}<24$　　よって　$10^{23}<6^{30}<10^{24}$

したがって，6^{30} は 24 桁の整数である。

$\boxed{9}$ 不等式 $2^n<3^{20}<2^{n+1}$ を満たす整数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　$n=31$

解説

不等式 $2^n<3^{20}<2^{n+1}$ の各辺は正であるから，各辺の常用対数をとると

$$\log_{10}2^n<\log_{10}3^{20}<\log_{10}2^{n+1}$$

すなわち　$n\log_{10}2<20\log_{10}3<(n+1)\log_{10}2$

$n\log_{10}2<20\log_{10}3$ から

$$n<\frac{20\log_{10}3}{\log_{10}2}=\frac{20\times0.4771}{0.3010}=31.7\cdots\cdots$$

$20\log_{10}3<(n+1)\log_{10}2$ から

$$n>\frac{20\log_{10}3}{\log_{10}2}-1=30.7\cdots\cdots$$

よって　$30.7\cdots\cdots<n<31.7\cdots\cdots$

n は整数であるから　$n=31$

$\boxed{10}$ 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　18^{100} は何桁の整数か。　　(2)　$10^{0.52}<4$ を示せ。

(3)　18^{100} の最高位の数字を求めよ。

解答　(1)　126 桁　　(2)　略　　(3)　3

解説

(1)　$\log_{10}18^{100}=100\log_{10}(2\times3^2)=100(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=100(0.3010+2\times0.4771)=125.52$

ゆえに　$125<\log_{10}18^{100}<126$

よって　$10^{125}<18^{100}<10^{126}$

したがって，18^{100} は 126 桁の整数である。

(2)　$\log_{10}10^{0.52}=0.52$

$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

よって　$\log_{10}10^{0.52}<\log_{10}4$

底 10 は 1 より大きいから　$10^{0.52}<4$

(3)　$\log_{10}3=0.4771$ であるから　$\log_{10}3<\log_{10}10^{0.52}$

底 10 は 1 より大きいから　$3<10^{0.52}$

これと (2) の結果から　$3<10^{0.52}<4$

(1) より　$18^{100}=10^{125.52}=10^{0.52}\times10^{125}$

であるから　$3\times10^{125}<18^{100}<4\times10^{125}$

ゆえに，18^{100} の最高位の数字は　3

11　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の問いに答えよ。[各 16 点]

(1)　2^{40} は何桁の数か。

(2)　$\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答　(1)　$\log_{10}2^{40}=40\log_{10}2=40\times0.3010=12.04$

よって　$12<\log_{10}2^{40}<13$

ゆえに　$10^{12}<2^{40}<10^{13}$

したがって，2^{40} は 13 桁の数である。

(2)　$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}=50(\log_{10}2-\log_{10}3)=50(0.3010-0.4771)$

$=-8.805$

よって　$-9<\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}<-8$

ゆえに　$10^{-9}<\left(\frac{2}{3}\right)^{50}<10^{-8}$

したがって，小数第 9 位に始めて 0 でない数字が現れる。

解説

(1)　$\log_{10}2^{40}=40\log_{10}2=40\times0.3010=12.04$

よって　$12<\log_{10}2^{40}<13$

ゆえに　$10^{12}<2^{40}<10^{13}$

したがって，2^{40} は 13 桁の数である。

(2)　$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}=50(\log_{10}2-\log_{10}3)=50(0.3010-0.4771)$

$=-8.805$

よって　$-9<\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}<-8$

ゆえに　$10^{-9}<\left(\frac{2}{3}\right)^{50}<10^{-8}$

したがって，小数第 9 位に始めて 0 でない数字が現れる。

12　0.12^{40} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。[20 点]

解答　$\log_{10}0.12^{40}=40\log_{10}\frac{12}{100}=40\log_{10}\frac{2^2\times3}{10^2}=40(2\log_{10}2+\log_{10}3-2\log_{10}10)$

$=40(2\times0.3010+0.4771-2)=-36.836$

よって　$-37<\log_{10}0.12^{40}<-36$　　ゆえに　$10^{-37}<0.12^{40}<10^{-36}$

したがって，0.12^{40} は小数第 37 位に初めて 0 でない数字が現れる。

解説

$\log_{10}0.12^{40}=40\log_{10}\frac{12}{100}=40\log_{10}\frac{2^2\times3}{10^2}=40(2\log_{10}2+\log_{10}3-2\log_{10}10)$

$=40(2\times0.3010+0.4771-2)=-36.836$

よって　$-37<\log_{10}0.12^{40}<-36$　　ゆえに　$10^{-37}<0.12^{40}<10^{-36}$

したがって，0.12^{40} は小数第 37 位に初めて 0 でない数字が現れる。

13　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。$2000<\left(\frac{9}{4}\right)^n<4000$ を満たすように，整数 n の値を定めよ。[15 点]

解答　$2000<\left(\frac{9}{4}\right)^n<4000$ の各辺の常用対数をとると

$\log_{10}2000<n\log_{10}\frac{9}{4}<\log_{10}4000$　……①

ここで

$\log_{10}2000=\log_{10}(2\times10^3)=\log_{10}2+3\log_{10}10=0.3010+3=3.3010$

$\log_{10}\frac{9}{4}=\log_{10}\frac{3^2}{2^2}=2\log_{10}3-2\log_{10}2=2\times0.4771-2\times0.3010=0.3522$

$\log_{10}4000=\log_{10}(2^2\times10^3)=2\log_{10}2+3\log_{10}10=2\times0.3010+3=3.6020$

よって，① から　$3.3010<0.3522n<3.6020$

ゆえに　$\frac{3.3010}{0.3522}<n<\frac{3.6020}{0.3522}$　すなわち　$9.3\cdots\cdots<n<10.2\cdots\cdots$

これを満たす整数 n は　$n=10$

解説

$2000<\left(\frac{9}{4}\right)^n<4000$ の各辺の常用対数をとると

$\log_{10}2000<n\log_{10}\frac{9}{4}<\log_{10}4000$　……①

ここで

$\log_{10}2000=\log_{10}(2\times10^3)=\log_{10}2+3\log_{10}10=0.3010+3=3.3010$

$\log_{10}\frac{9}{4}=\log_{10}\frac{3^2}{2^2}=2\log_{10}3-2\log_{10}2=2\times0.4771-2\times0.3010=0.3522$

$\log_{10}4000=\log_{10}(2^2\times10^3)=2\log_{10}2+3\log_{10}10=2\times0.3010+3=3.6020$

よって，① から　$3.3010<0.3522n<3.6020$

ゆえに　$\frac{3.3010}{0.3522}<n<\frac{3.6020}{0.3522}$　すなわち　$9.3\cdots\cdots<n<10.2\cdots\cdots$

これを満たす整数 n は　$n=10$

14　0.4^{50} は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。また，その数字は何か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。[20 点]

解答　$\log_{10}0.4^{50}=50\log_{10}(2^2\div10)=50(2\log_{10}2-1)$

$=50(2\cdot0.3010-1)=-19.9$　……①

よって　$-20<\log_{10}0.4^{50}<-19$　　ゆえに　$10^{-20}<0.4^{50}<10^{-19}$

よって，0.4^{50} は小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れる。

また，①から　$0.4^{50}=10^{-19.9}=10^{-20+0.1}=10^{-20}\times10^{0.1}$　……②

$0<0.1<0.3010$ であるから　$\log_{10}1<0.1<\log_{10}2$

ゆえに　$1<10^{0.1}<2$

すなわち，②から　$1\times10^{-20}<0.4^{50}<2\times10^{-20}$

よって，最初に現れる 0 でない数字は　1

解説

$\log_{10}0.4^{50}=50\log_{10}(2^2\div10)=50(2\log_{10}2-1)$

$=50(2\cdot0.3010-1)=-19.9$　……①

よって　$-20<\log_{10}0.4^{50}<-19$　　ゆえに　$10^{-20}<0.4^{50}<10^{-19}$

よって，0.4^{50} は小数第 20 位に初めて 0 でない数字が現れる。

また，①から　$0.4^{50}=10^{-19.9}=10^{-20+0.1}=10^{-20}\times10^{0.1}$　……②

$0<0.1<0.3010$ であるから　$\log_{10}1<0.1<\log_{10}2$

ゆえに　$1<10^{0.1}<2$

すなわち，②から　$1\times10^{-20}<0.4^{50}<2\times10^{-20}$

よって，最初に現れる 0 でない数字は　1

15　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　15^{15} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\frac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答　(1)　18 桁　　(2)　小数第 13 位

解説

(1)　$\log_{10}15^{15}=15\log_{10}15=15\log_{10}(3\cdot5)$

$=15(\log_{10}3+\log_{10}5)$

$=15(\log_{10}3+1-\log_{10}2)$

$=15(0.4771+1-0.3010)=17.6415$

ゆえに　$17<\log_{10}15^{15}<18$

よって　$10^{17}<15^{15}<10^{18}$

したがって，15^{15} は 18 桁の整数である。

(2)　$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{26}=\log_{10}3^{-26}=-26\log_{10}3$

$=-26\times0.4771=-12.4046$

ゆえに　$-13<\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{26}<-12$

よって　$10^{-13}<\left(\frac{1}{3}\right)^{26}<10^{-12}$

したがって，$\left(\frac{1}{3}\right)^{26}$ は小数第 13 位に初めて 0 でない数字が現れる。

16　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　6^{50} は何桁の整数か。

(2)　3^n が 10 桁の数となる最小の自然数 n は ア $\boxed{}$ である。また，$\left(\frac{1}{12}\right)^{15}$ は小数第 イ $\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

解答　(1)　39 桁　　(2)　(ア)　19　　(イ)　17

解説

(1)　$\log_{10}6^{50}=50\log_{10}6=50\log_{10}(2\cdot3)=50(\log_{10}2+\log_{10}3)=50(0.3010+0.4771)$

$=38.905$

ゆえに　$38<\log_{10}6^{50}<39$　　よって　$10^{38}<6^{50}<10^{39}$

したがって，6^{50} は 39 桁の整数である。

(2)　(ア)　3^n が 10 桁の数となるとき　$10^9 \leqq 3^n < 10^{10}$

各辺の常用対数をとると　$9 \leqq n\log_{10}3 < 10$

よって　$\dfrac{9}{\log_{10}3} \leqq n < \dfrac{10}{\log_{10}3}$

すなわち　$\dfrac{9}{0.4771} \leqq n < \dfrac{10}{0.4771}$

ゆえに　$18.8\cdots\cdots \leqq n < 20.9\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　19

(イ)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{12}\right)^{15} = -15\log_{10}12 = -15(2\log_{10}2+\log_{10}3)$

$= -15(2\times 0.3010+0.4771) = -16.1865$

よって　$-17<\log_{10}\left(\dfrac{1}{12}\right)^{15}<-16$

ゆえに　$10^{-17}<\left(\dfrac{1}{12}\right)^{15}<10^{-16}$

よって，$\left(\dfrac{1}{12}\right)^{15}$ は小数第 17 位に初めて 0 でない数字が現れる。

17　12^{60} は $^{ア}\boxed{}$ 桁の整数である。また，その最高位の数は $^{イ}\boxed{}$ で，一の位の数は $^{ウ}\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　(ア)　65　　(イ)　5　　(ウ)　6

解説

(ア)　$\log_{10}12^{60}=60\log_{10}(2^2\cdot 3)=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)=60(2\times 0.3010+0.4771)=64.746$

ゆえに　$64<\log_{10}12^{60}<65$　　よって　$10^{64}<12^{60}<10^{65}$

したがって，12^{60} は 65 桁の整数である。

(イ)　(ア) から　$\log_{10}12^{60}=64+0.746$　$\cdots\cdots$ ①

ここで　$\log_{10}5=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

ゆえに　$\log_{10}5<0.746<\log_{10}6$

よって，① から　$64+\log_{10}5<\log_{10}12^{60}<64+\log_{10}6$

すなわち　$5\cdot 10^{64}<12^{60}<6\cdot 10^{64}$

したがって，12^{60} の最高位の数は　5

別解　(イ)　(ア) から

$12^{60}=10^{64.746}=10^{64}\cdot 10^{0.746}$

$10^0<10^{0.746}<10^1$ であるから，$10^{0.746}$ の整数部分が 12^{60} の最高位の数である。ここで

$\log_{10}5=0.6990$ より　$10^{0.6990}=5$

$\log_{10}6=0.7781$ より　$10^{0.7781}=6$

$10^{0.6990}<10^{0.746}<10^{0.7781}$ から　$5<10^{0.746}<6$

よって，最高位の数は　5

(ウ)　12^1，12^2，12^3，12^4，12^5，$\cdots\cdots$ の一の位の数は，順に

2，4，8，6，2，$\cdots\cdots$

となり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

$60=4\times 15$ であるから，12^{60} の一の位の数は　6

別解　12^{60} の一の位の数は，12^{60} を 10 で割った余りに等しい。

$12\equiv 2 \pmod{10}$，$2^5=32\equiv 2 \pmod{10}$ であるから

$12^{60}\equiv 2^{60}\equiv (2^5)^{12}\equiv 2^{12}\equiv (2^5)^2\cdot 2^2\equiv 2^2\cdot 2^2\equiv 16\equiv 6 \pmod{10}$

よって，12^{60} の一の位の数は　6

18　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第 $^{ア}\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れ，その値は $^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　42　　(イ)　1

解説

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}=20\log_{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=60\log_{10}\dfrac{2}{10}=60(\log_{10}2-1)=60(0.3010-1)=-41.94$

ゆえに　$-42<\log_{10}\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}<-41$

よって　$10^{-42}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}<10^{-41}$

したがって，$\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第 ^{ア}42 位に初めて 0 でない数字が現れる。

また　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}=-41.94=-42+0.06$　$\cdots\cdots$ ①

ここで　$\log_{10}1=0$，$\log_{10}2=0.3010$　　ゆえに　$\log_{10}1<0.06<\log_{10}2$

よって，① から　$-42+\log_{10}1<\log_{10}\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}<-42+\log_{10}2$

すなわち　$1\cdot 10^{-42}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}<2\cdot 10^{-42}$

したがって，$\left(\dfrac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は ^{イ}1 である。

19　(1)　7^{100} は 85 桁の数である。7^{29} は何桁の数か。

(2)　3 進法で表すと 100 桁の自然数 N を，10 進法で表すと何桁の数になるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　(1)　25 桁　　(2)　48 桁

解説

(1)　7^{100} が 85 桁の数であるから　$10^{84}\leqq 7^{100}<10^{85}$

各辺の常用対数をとると　$84\leqq 100\log_{10}7<85$

よって　$0.84\leqq \log_{10}7<0.85$

ここで，$\log_{10}7^{29}=29\log_{10}7$ であるから

$29\times 0.84\leqq 29\log_{10}7<29\times 0.85$

すなわち　$24.36\leqq \log_{10}7^{29}<24.65$

ゆえに，$24<\log_{10}7^{29}<25$ であるから　$10^{24}<7^{29}<10^{25}$

したがって，7^{29} は 25 桁の数である。

(2)　N は 3 進法で表すと 100 桁の自然数であるから

$3^{100-1}\leqq N<3^{100}$　すなわち　$3^{99}\leqq N<3^{100}$

各辺の常用対数をとると

$99\log_{10}3\leqq \log_{10}N<100\log_{10}3$

よって　$99\times 0.4771\leqq \log_{10}N<100\times 0.4771$

すなわち　$47.2329\leqq \log_{10}N<47.71$

ゆえに，$47<\log_{10}N<48$ であるから　$10^{47}<N<10^{48}$

したがって，N を 10 進法で表すと，48 桁の数となる。

別解　$\log_{10}3=0.4771$ から　$10^{0.4771}=3$

$3^{99}\leqq N<3^{100}$ から　$(10^{0.4771})^{99}\leqq N<(10^{0.4771})^{100}$

よって　$10^{47.2329}\leqq N<10^{47.71}$　　ゆえに　$10^{47}<N<10^{48}$

したがって，N を 10 進法で表すと，48 桁の数となる。

20　A 町の人口は近年減少傾向にある。現在のこの町の人口は前年同時期の人口と比べて 4 % 減少したという。毎年この比率と同じ比率で減少すると仮定した場合，初めて人口が現在の半分以下になるのは何年後か。答えは整数で求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　17 年後

解説

n 年後に人口が現在の半分以下になるとすると　$0.96^n\leqq \dfrac{1}{2}$

両辺は正であるから，両辺の常用対数をとると

$n\log_{10}0.96\leqq \log_{10}\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots$ ①

ここで　$\log_{10}0.96=\log_{10}(2^5\cdot 3\cdot 10^{-2})=5\log_{10}2+\log_{10}3-2$

$=5\times 0.3010+0.4771-2=-0.0179$

$\log_{10}\dfrac{1}{2}=-\log_{10}2=-0.3010$

よって，① から　$-0.0179n\leqq -0.3010$

ゆえに　$n\geqq \dfrac{0.3010}{0.0179}=16.8\cdots\cdots$

よって，初めて人口が現在の半分以下になるのは　17 年後

21　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の数は何桁の整数か。

(1)　2^{50}　　(2)　3^{30}　　(3)　6^{52}

解答　(1)　16 桁　　(2)　15 桁　　(3)　41 桁

解説

(1)　$\log_{10}2^{50}=50\log_{10}2=50\times 0.3010=15.05$

よって　$15<\log_{10}2^{50}<16$

ゆえに　$10^{15}<2^{50}<10^{16}$

したがって，2^{50} は 16 桁の整数である。

(2)　$\log_{10}3^{30}=30\log_{10}3=30\times 0.4771=14.313$

よって　$14<\log_{10}3^{30}<15$

ゆえに　$10^{14}<3^{30}<10^{15}$

したがって，3^{30} は 15 桁の整数である。

(3)　$\log_{10}6^{52}=52\log_{10}(2\times 3)=52(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=52\times(0.3010+0.4771)=40.4612$

よって　$40<\log_{10}6^{52}<41$

ゆえに　$10^{40}<6^{52}<10^{41}$

したがって，6^{52} は 41 桁の整数である。

$\boxed{22}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の数を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$　(2) $\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$　(3) $\sqrt[3]{(0.06)^{10}}$

解答　(1)　第 31 位　(2)　第 4 位　(3)　第 5 位

解説

(1) $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=-100\log_{10}2=-100\times0.3010=-30.10$

よって　$-31<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}<-30$

ゆえに　$10^{-31}<\left(\frac{1}{2}\right)^{100}<10^{-30}$

したがって，$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ は小数第 31 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(2) $\log_{10}\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}=-\frac{25}{2}\log_{10}2=-\frac{25}{2}\times0.3010=-3.7625$

よって　$-4<\log_{10}\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}<-3$

ゆえに　$10^{-4}<\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}<10^{-3}$

したがって，$\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$ は小数第 4 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(3) $\log_{10}\sqrt[3]{(0.06)^{10}}=\frac{10}{3}\log_{10}(2\times3\times10^{-2})=\frac{10}{3}(\log_{10}2+\log_{10}3-2)$

$=\frac{10}{3}(0.3010+0.4771-2)=-4.073$

よって　$-5<\log_{10}\sqrt[3]{(0.06)^{10}}<-4$

ゆえに　$10^{-5}<\sqrt[3]{(0.06)^{10}}<10^{-4}$

したがって，$\sqrt[3]{(0.06)^{10}}$ は小数第 5 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{23}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^n<0.0001$ を満たす最小の整数 n を求めよ。

(2) 2.25^n の整数部分が 3 桁であるような整数 n の値を求めよ。

解答　(1)　9　(2)　$n=6,\ 7,\ 8$

解説

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^n<0.0001$ の両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n<\log_{10}0.0001$$

よって　$\log_{10}3^{-n}<\log_{10}10^{-4}$

すなわち　$-n\log_{10}3<-4$

ゆえに　$n>\frac{4}{\log_{10}3}=\frac{4}{0.4771}=8.3\cdots\cdots$

これを満たす最小の整数 n は　9

(2) 2.25^n の整数部分が 3 桁であるから　$10^2\leqq2.25^n<10^3$

各辺の常用対数をとると　$2\leqq n\log_{10}2.25<3$　……①

ここで　$\log_{10}2.25=\log_{10}\frac{225}{100}=\log_{10}\frac{9}{4}=\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^2=2(\log_{10}3-\log_{10}2)$

$=2(0.4771-0.3010)=0.3522$

よって，① から　$2\leqq0.3522n<3$

ゆえに　$\frac{2}{0.3522}\leqq n<\frac{3}{0.3522}$

すなわち　$5.6\cdots\cdots\leqq n<8.5\cdots\cdots$

これを満たす整数 n は　$n=6,\ 7,\ 8$

$\boxed{24}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 6^{20} は何桁の整数か。　(2) 6^{20} の最高位の数字を求めよ。

解答　(1)　16 桁　(2)　3

解説

(1) $\log_{10}6^{20}=20\log_{10}(2\times3)=20(\log_{10}2+\log_{10}3)=20(0.3010+0.4771)$

$=20\times0.7781=15.562$

ゆえに　$15<\log_{10}6^{20}<16$

よって　$10^{15}<6^{20}<10^{16}$

したがって，6^{20} は 16 桁の整数である。

(2) (1) より　$\log_{10}6^{20}=15+0.562$

$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

したがって　$\log_{10}3<0.562<\log_{10}4$

よって　$3<10^{0.562}<4$

ゆえに　$3\times10^{15}<10^{15.562}<4\times10^{15}$

すなわち　$3\times10^{15}<6^{20}<4\times10^{15}$

したがって，6^{20} の最高位の数字は　3

$\boxed{25}$ 年利率 5 %，1 年ごとの複利で 10 万円を預金したとき，x 年後の元利合計は $10(1.05)^x$ 万円となる。元利合計が初めて 15 万円を超えるのは何年後か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

解答　9 年後

解説

$10(1.05)^x>15$ を満たす最小の整数 x を求める。

$10(1.05)^x>15$ の両辺の常用対数をとると　$\log_{10}10(1.05)^x>\log_{10}15$

$\log_{10}10+\log_{10}(1.05)^x>\log_{10}(1.5\times10)$

$1+x\log_{10}1.05>\log_{10}1.5+1$

$x\log_{10}1.05>\log_{10}1.5$

ここで　$\log_{10}1.05=\log_{10}\frac{105}{100}=\log_{10}\frac{21}{20}=\log_{10}\frac{3\cdot7}{2\cdot10}$

$=\log_{10}3+\log_{10}7-\log_{10}2-1$

$=0.4771+0.8451-0.3010-1$

$=0.0212$

$\log_{10}1.5=\log_{10}\frac{3}{2}=\log_{10}3-\log_{10}2$

$=0.4771-0.3010=0.1761$

よって　$0.0212x>0.1761$　ゆえに　$x>\frac{0.1761}{0.0212}=8.3\cdots\cdots$

これを満たす最小の整数 x は　9

したがって，元利合計が初めて 15 万円を超えるのは　9 年後

$\boxed{26}$ 1 枚で 70 %の花粉を除去できるフィルターがある。99.99 %より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　8 枚

解説

1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから，n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る。

よって，求める条件は　$0.3^n<1-0.9999$

すなわち　$0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

この不等式を変形して　$n\log_{10}(3\times10^{-1})<\log_{10}10^{-4}$

$n(\log_{10}3-1)<-4$

$-0.5229n<-4$

よって　$n>\frac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$

したがって，フィルターは最低 8 枚必要である。

$\boxed{27}$ $\left(\frac{1}{30}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　小数第 30 位

解説

$\log_{10}\left(\frac{1}{30}\right)^{20}=-20\log_{10}30=-20(\log_{10}3+\log_{10}10)$

$=-20\times(0.4771+1)=-29.542$

よって　$-30<\log_{10}\left(\frac{1}{30}\right)^{20}<-29$　ゆえに　$10^{-30}<\left(\frac{1}{30}\right)^{20}<10^{-29}$

したがって，$\left(\frac{1}{30}\right)^{20}$ は小数第 30 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{28}$ 次の数は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 2^{40}　(2) 18^{30}

解答　(1)　13 桁　(2)　38 桁

解説

(1) $\log_{10}2^{40}=40\log_{10}2=40\times0.3010=12.04$

よって　$12<\log_{10}2^{40}<13$　ゆえに　$10^{12}<2^{40}<10^{13}$

したがって，2^{40} は 13 桁の整数である。

(2)　$\log_{10}18^{30}=30\log_{10}18=30\log_{10}(2\times3^2)=30(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=30(0.3010+2\times0.4771)=37.656$

よって　$37<\log_{10}18^{30}<38$　ゆえに　$10^{37}<18^{30}<10^{38}$

したがって，18^{30} は 38 桁の整数である。

$\boxed{29}$ 次の数を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$　(2)　0.2^{30}

解答　(1)　小数第 16 位　(2)　小数第 21 位

解説

(1)　$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=50\log_{10}\frac{1}{2}=-50\log_{10}2=-50\times0.3010=-15.05$

よって　$-16<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}<-15$　ゆえに　$10^{-16}<\left(\frac{1}{2}\right)^{50}<10^{-15}$

したがって，$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ を小数で表したとき，小数第 16 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(2)　$\log_{10}0.2^{30}=30\log_{10}(2\times10^{-1})=30(\log_{10}2-\log_{10}10)$

$=30(0.3010-1)=-20.97$

よって　$-21<\log_{10}0.2^{30}<-20$　ゆえに　$10^{-21}<0.2^{30}<10^{-20}$

したがって，0.2^{30} を小数で表したとき，小数第 21 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{30}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$3000<\left(\frac{5}{4}\right)^n<6000$ を満たす整数 n の値を求めよ。

(2)　6.75^n の整数部分が 5 桁であるような整数 n の値を求めよ。

解答　(1)　$n=36,\ 37,\ 38$　(2)　$n=5,\ 6$

解説

(1)　$3000<\left(\frac{5}{4}\right)^n<6000$ の各辺の常用対数をとると

$\log_{10}3000<n\log_{10}\frac{5}{4}<\log_{10}6000$　…… ①

ここで　$\log_{10}3000=\log_{10}(3\times10^3)=\log_{10}3+3\log_{10}10$

$=0.4771+3=3.4771$

$\log_{10}\frac{5}{4}=\log_{10}\frac{10}{8}=\log_{10}\frac{10}{2^3}=\log_{10}10-3\log_{10}2$

$=1-3\times0.3010=0.097$

$\log_{10}6000=\log_{10}(2\times3\times10^3)=\log_{10}2+\log_{10}3+3\log_{10}10$

$=0.3010+0.4771+3=3.7781$

よって，① から　$3.4771<0.097n<3.7781$

ゆえに　$\frac{3.4771}{0.097}<n<\frac{3.7781}{0.097}$　すなわち　$35.8\cdots\cdots<n<38.9\cdots\cdots$

これを満たす整数 n は　$n=36,\ 37,\ 38$

(2)　6.75^n の整数部分が 5 桁であるから　$10^4\leqq6.75^n<10^5$

各辺の常用対数をとると　$4\leqq n\log_{10}6.75<5$　…… ①

ここで　$\log_{10}6.75=\log_{10}\frac{675}{100}=\log_{10}\frac{27}{4}$

$=\log_{10}\frac{3^3}{2^2}=3\log_{10}3-2\log_{10}2$

$=3\times0.4771-2\times0.3010=0.8293$

よって，① から　$4\leqq0.8293n<5$

ゆえに　$\frac{4}{0.8293}\leqq n<\frac{5}{0.8293}$

すなわち　$4.82\cdots\cdots\leqq n<6.02\cdots\cdots$

これを満たす整数 n は　$n=5,\ 6$

$\boxed{31}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$\log_{10}5$ の値を求めよ。　(2)　3^{37} は何桁の整数か。

(3)　3^{37} の最高位の数字を求めよ。

解答　(1)　0.6990　(2)　18 桁　(3)　4

解説

(1)　$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

(2)　$\log_{10}3^{37}=37\log_{10}3=37\times0.4771=17.6527$

よって　$17<\log_{10}3^{37}<18$　ゆえに　$10^{17}<3^{37}<10^{18}$

したがって，3^{37} は 18 桁の整数である。

(3)　(2) から　$\log_{10}3^{37}=17+0.6527$

また　$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

(1) から　$\log_{10}5=0.6990$

よって，$\log_{10}4<0.6527<\log_{10}5$ であるから　$4<10^{0.6527}<5$

ゆえに　$4\times10^{17}<10^{17.6527}<5\times10^{17}$

すなわち　$4\times10^{17}<3^{37}<5\times10^{17}$

したがって，3^{37} の最高位の数字は　4