

対数の値クイズ

1 次の対数の値を求めよ。

- (1) $\log_2 32$
- (2) $\log_{10} \sqrt{1000}$
- (3) $\log_{10} 0.001$
- (4) $\log_9 3$
- (5) $\log_{0.5} 4$
- (6) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

解答 (1) 5 (2) $\frac{3}{2}$ (3) -3 (4) $\frac{1}{2}$ (5) -2 (6) -3

解説

- (1) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
- (2) $\log_{10} \sqrt{1000} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$
- (3) $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$
- (4) $\log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- (5) $\log_{0.5} 4 = \log_{0.5} 0.5^{-2} = -2$
- (6) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3$

2 次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_6 12 + \log_6 3$
- (2) $\log_5 15 - \log_5 75$
- (3) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$
- (4) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2} \log_2 3 - \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

解答 (1) 2 (2) -1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

解説

- (1) 与式 $= \log_6 (12 \times 3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$
- (2) 与式 $= \log_5 \frac{15}{75} = \log_5 \frac{1}{5} = -1$
- (3) 与式 $= \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 2^{\frac{1}{3}} = \log_3 \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \log_3 \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3}$
- 別解 与式 $= \frac{1}{3} \log_3 (2 \times 3) - \frac{1}{3} \log_3 2 = \frac{1}{3} (\log_3 2 + 1) - \frac{1}{3} \log_3 2 = \frac{1}{3}$
- (4) 与式 $= \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3} + \log_2 3^{\frac{3}{2}} - \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \log_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$
- 別解 与式 $= \left(\frac{1}{2} - \log_2 3 \right) + \frac{3}{2} \log_2 3 - \left(\frac{1}{2} \log_2 3 - 1 \right) = \frac{3}{2}$

3 次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_4 8$
- (2) $\log_{27} 3$
- (3) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

解答 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) 3

解説

- (1) 与式 $= \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$

(2) 与式 $= \frac{\log_3 3}{\log_3 27} = \frac{1}{\log_3 3^3} = \frac{1}{3}$

(3) 与式 $= \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

4 次の式を簡単にせよ。

- (1) $\frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$
- (2) $\log_2 3 \cdot \log_{27} 25 \cdot \log_5 32$
- (3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

解答 (1) 0 (2) $\frac{10}{3}$ (3) 5

解説

- (1) $\frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24} = \log_5 \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2})^3}{\sqrt{2^3 \times 3}} = \log_5 1 = 0$
- (2) 底の変換公式によって
$$\log_{27} 25 = \frac{\log_2 25}{\log_2 27} = \frac{2 \log_2 5}{3 \log_2 3}, \quad \log_5 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 5} = \frac{5}{\log_2 5}$$
であるから
$$\log_2 3 \cdot \log_{27} 25 \cdot \log_5 32 = \log_2 3 \cdot \frac{2 \log_2 5}{3 \log_2 3} \cdot \frac{5}{\log_2 5} = \frac{10}{3}$$
- (3) $\log_2 3 = a$ とおくと
$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} = \frac{2 \log_2 3}{2} = \log_2 3 = a$$

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3} = \frac{2}{a}$$

$$\log_9 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 9} = \frac{\log_2 2}{\log_2 3^2} = \frac{1}{2 \log_2 3} = \frac{1}{2a}$$
よって $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = (a + a) \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{2a} \right) = 2a \times \frac{5}{2a} = 5$
- 別解 (1) 与式 $= \frac{1}{2} \log_5 3 + \frac{3}{2} \log_5 2 - \frac{1}{2} (3 \log_5 2 + \log_5 3) = 0$
- (3) a, b, c が 1 以外の正の数するとき
$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c$$
よって $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$
 $= \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_2 3 \cdot \log_9 2 + \log_4 9 \cdot \log_3 4 + \log_4 9 \cdot \log_9 2$
 $= \log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_9 2 \cdot \log_2 3 + \log_3 4 \cdot \log_4 9 + \log_4 9 \cdot \log_9 2$
 $= \log_2 4 + \log_9 3 + \log_3 9 + \log_4 2$
 $= 2 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 5$

5 次の式の値を求めよ。

- (1) $10^{\log_{10} 3}$
- (2) $10^{\log_{100} 2}$
- (3) $10^{\log_{0.1} 2}$
- (4) $100^{-\log_{10} 2}$

解答 (1) 3 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

解説

- (1) $x = 10^{\log_{10} 3}$ において両辺の常用対数をとると $\log_{10} x = \log_{10} 3$
よって $x = 3$
- (2) $x = 10^{\log_{100} 2}$ において両辺の常用対数をとると $\log_{10} x = \log_{100} 2$
ここで $\log_{100} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 100} = \frac{1}{2} \log_{10} 2 = \log_{10} \sqrt{2}$
であるから $\log_{10} x = \log_{10} \sqrt{2}$
よって $x = \sqrt{2}$
- (3) $x = 10^{\log_{0.1} 2}$ において両辺の常用対数をとると $\log_{10} x = \log_{0.1} 2$
ここで $\log_{0.1} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 10^{-1}} = -\log_{10} 2 = \log_{10} \frac{1}{2}$
であるから $\log_{10} x = \log_{10} \frac{1}{2}$
よって $x = \frac{1}{2}$
- (4) $x = 100^{-\log_{10} 2}$ において両辺の常用対数をとると $\log_{10} x = -\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 100$
ここで $-\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 100 = -2 \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{1}{4}$
であるから $\log_{10} x = \log_{10} \frac{1}{4}$
よって $x = \frac{1}{4}$
- 別解 $a^{\log_a M} = M$ が成り立つ。
(1) $10^{\log_{10} 3} = 3$
(2) $\log_{100} 2 = \log_{10^2} (\sqrt{2})^2 = \log_{10} \sqrt{2}$ であるから
$$10^{\log_{100} 2} = 10^{\log_{10} \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(3) $\log_{0.1} 2 = \log_{10^{-1}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = \log_{10} \frac{1}{2}$ であるから
$$10^{\log_{0.1} 2} = 10^{\log_{10} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(4) $100^{-\log_{10} 2} = (10^2)^{-\log_{10} 2} = (10^{\log_{10} 2})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

6 次の値を求めよ。[各 5 点]

- (1) $\log_6 36$
- (2) $\log_2 \sqrt[4]{32}$

解答 (1) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

(2) $\log_2 \sqrt[4]{32} = p$ とおくと $2^p = \sqrt[4]{32}$ $2^p = (2^5)^{\frac{1}{4}}$ $2^p = 2^{\frac{5}{4}}$

したがって $p = \frac{5}{4}$ すなわち $\log_2 \sqrt[4]{32} = \frac{5}{4}$

別解 $\log_2 \sqrt[4]{32} = \log_2 (2^5)^{\frac{1}{4}} = \log_2 2^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$

解説

- (1) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

(2) $\log_2 \sqrt[4]{32} = p$ とおくと $2^p = \sqrt[4]{32}$ $2^p = (2^5)^{\frac{1}{4}}$ $2^p = 2^{\frac{5}{4}}$

$$\text{したがって} \quad p = \frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad \log_2 \sqrt[4]{32} = \frac{5}{4}$$

$$\text{〔別解〕} \quad \log_2 \sqrt[4]{32} = \log_2 (2^5)^{\frac{1}{4}} = \log_2 2^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$$

〔7〕 次の計算をせよ。〔各 5 点〕

$$(1) \log_6 27 + \log_6 8 \qquad (2) \log_2 2\sqrt{10} - \log_2 \sqrt{5}$$

$$(3) 4\log_2 \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_2 5 + \log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad (4) \log_9 27$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \text{ 与式} = \log_6 (27 \times 8) = \log_6 (3^3 \times 2^3) = \log_6 6^3 = 3$$

$$(2) \text{ 与式} = \log_2 \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = (\log_2 2 + \log_2 \sqrt{10}) - \log_2 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2}\log_2 (2 \times 5) - \frac{1}{2}\log_2 5 \\ = 1 + \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 5) - \frac{1}{2}\log_2 5 = 1 + \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ 与式} = \log_2 \frac{(\sqrt{2})^4 \times \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \log_2 2 = 1$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = 4 \cdot \frac{1}{2}\log_2 2 - \frac{1}{2}\log_2 5 + \left(\frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 2\right) = 1$$

$$(4) \log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2}$$

〔解説〕

$$(1) \text{ 与式} = \log_6 (27 \times 8) = \log_6 (3^3 \times 2^3) = \log_6 6^3 = 3$$

$$(2) \text{ 与式} = \log_2 \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = (\log_2 2 + \log_2 \sqrt{10}) - \log_2 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2}\log_2 (2 \times 5) - \frac{1}{2}\log_2 5 \\ = 1 + \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 5) - \frac{1}{2}\log_2 5 = 1 + \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ 与式} = \log_2 \frac{(\sqrt{2})^4 \times \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \log_2 2 = 1$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = 4 \cdot \frac{1}{2}\log_2 2 - \frac{1}{2}\log_2 5 + \left(\frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 2\right) = 1$$

$$(4) \log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2}$$

〔8〕 次の計算をせよ。〔各 10 点〕

$$(1) (\log_2 5)(\log_5 2 + \log_{25} 8) \qquad (2) \log_5 10 \cdot \log_2 10 - (\log_5 2 + \log_2 5)$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \text{ 与式} = (\log_2 5) \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 5} + \frac{\log_2 8}{\log_2 25} \right) = (\log_2 5) \left(\frac{1}{\log_2 5} + \frac{3}{2\log_2 5} \right) \\ = \log_2 5 \cdot \frac{5}{2\log_2 5} = \frac{5}{2}$$

$$(2) \text{ 与式} = \log_5 (5 \times 2) \cdot \log_2 (5 \times 2) - (\log_5 2 + \log_2 5) \\ = (\log_5 5 + \log_5 2)(\log_2 5 + \log_2 2) - (\log_5 2 + \log_2 5) \\ = (1 + \log_5 2)(\log_2 5 + 1) - (\log_5 2 + \log_2 5)$$

$$= 1 + \log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1 + \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 2}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

〔解説〕

$$(1) \text{ 与式} = (\log_2 5) \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 5} + \frac{\log_2 8}{\log_2 25} \right) = (\log_2 5) \left(\frac{1}{\log_2 5} + \frac{3}{2\log_2 5} \right)$$

$$= \log_2 5 \cdot \frac{5}{2\log_2 5} = \frac{5}{2}$$

$$(2) \text{ 与式} = \log_5 (5 \times 2) \cdot \log_2 (5 \times 2) - (\log_5 2 + \log_2 5) \\ = (\log_5 5 + \log_5 2)(\log_2 5 + \log_2 2) - (\log_5 2 + \log_2 5) \\ = (1 + \log_5 2)(\log_2 5 + 1) - (\log_5 2 + \log_2 5)$$

$$= 1 + \log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1 + \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 2}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

〔9〕 次の値を簡単にせよ。〔各 10 点〕

$$(1) 10^{\log_{10} 5} \qquad (2) 100^{\log_{10} 7}$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad y = 10^{\log_{10} 5} \quad \text{とおき, } 10 \text{ を底とする両辺の対数をとると} \quad \log_{10} y = \log_{10} 5 \\ \text{したがって} \quad y = 5$$

$$(2) \quad y = 100^{\log_{10} 7} \quad \text{とおき, } 10 \text{ を底とする両辺の対数をとると} \\ \log_{10} y = \log_{10} 7 \cdot \log_{10} 100 \qquad \text{よって} \quad \log_{10} y = 2\log_{10} 7 \\ \text{ゆえに} \quad \log_{10} y = \log_{10} 49 \qquad \text{したがって} \quad y = 49$$

〔解説〕

$$(1) \quad y = 10^{\log_{10} 5} \quad \text{とおき, } 10 \text{ を底とする両辺の対数をとると} \quad \log_{10} y = \log_{10} 5 \\ \text{したがって} \quad y = 5$$

$$(2) \quad y = 100^{\log_{10} 7} \quad \text{とおき, } 10 \text{ を底とする両辺の対数をとると} \\ \log_{10} y = \log_{10} 7 \cdot \log_{10} 100 \qquad \text{よって} \quad \log_{10} y = 2\log_{10} 7 \\ \text{ゆえに} \quad \log_{10} y = \log_{10} 49 \qquad \text{したがって} \quad y = 49$$

〔10〕 (1) (ア) $\log_3 27$ (イ) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243}$ の値を求めよ。

$$(2) 2\log_2 12 - \frac{1}{4}\log_2 \frac{8}{9} - 5\log_2 \sqrt{3} \text{ を簡単にせよ。}$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad (\text{ア}) \quad 3 \qquad (\text{イ}) \quad -\frac{5}{2} \qquad (2) \quad \frac{13}{4}$$

〔解説〕

$$(1) \quad (\text{ア}) \quad \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

$$(\text{イ}) \quad \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{5}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$(2) \quad (\text{まとめる}) \quad (\text{与式}) = \log_2 12^2 + \log_2 \left(\frac{8}{9} \right)^{-\frac{1}{4}} + \log_2 (\sqrt{3})^{-5} \\ = \log_2 \left[12^2 \cdot \frac{9^{\frac{1}{4}}}{8^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^5} \right] = \log_2 \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{5}{2}}} = \log_2 2^{\frac{13}{4}} = \frac{13}{4}$$

$$(\text{分解}) \quad (\text{与式}) = 2\log_2 (2^2 \cdot 3) - \frac{1}{4}\log_2 \frac{2^3}{3^2} - 5\log_2 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2(\log_2 2^2 + \log_2 3) - \frac{1}{4}(\log_2 2^3 - \log_2 3^2) - \frac{5}{2}\log_2 3$$

$$= 2(2 + \log_2 3) - \frac{1}{4}(3 - 2\log_2 3) - \frac{5}{2}\log_2 3$$

$$= 4 - \frac{3}{4} + \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \right) \log_2 3 = \frac{13}{4}$$

〔11〕 (1) 次の(ア)～(ウ)の対数の値を求めよ。また、(エ)の を埋めよ。

$$(\text{ア}) \quad \log_2 64 \qquad (\text{イ}) \quad \log_{\frac{1}{2}} 8 \qquad (\text{ウ}) \quad \log_{0.01} 10\sqrt{10} \qquad (\text{エ}) \quad \log_{\sqrt{3}} \text{ } = -4$$

(2) 次の式を簡単にせよ。

$$(\text{ア}) \quad \log_6 12 + \log_6 3 \qquad (\text{イ}) \quad \log_3 18 - \log_3 2$$

$$(\text{ウ}) \quad \log_9 \frac{9}{5} + 2\log_9 \sqrt{15} \qquad (\text{エ}) \quad \frac{1}{2}\log_{10} \frac{5}{6} + \log_{10} \sqrt{7.5} + \frac{1}{2}\log_{10} 1.6$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad (\text{ア}) \quad 6 \qquad (\text{イ}) \quad -3 \qquad (\text{ウ}) \quad -\frac{3}{4} \qquad (\text{エ}) \quad \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad (\text{ア}) \quad 2 \qquad (\text{イ}) \quad 2 \qquad (\text{ウ}) \quad \frac{3}{2} \qquad (\text{エ}) \quad \frac{1}{2}$$

〔解説〕

$$(1) \quad (\text{ア}) \quad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

$$(\text{イ}) \quad \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = -3$$

$$\text{〔別解〕} \quad \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} 2^3 = -3\log_2 2 = -3$$

$$(\text{ウ}) \quad 10\sqrt{10} = 10^{\frac{3}{2}} = 100^{\frac{3}{4}} = 0.01^{-\frac{3}{4}} \text{ であるから}$$

$$\log_{0.01} 10\sqrt{10} = \log_{0.01} 0.01^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{〔別解〕} \quad \log_{0.01} 10\sqrt{10} = r \text{ とおくと} \quad 0.01^r = 10\sqrt{10}$$

$$\text{すなわち} \quad 10^{-2r} = 10^{\frac{3}{2}} \qquad \text{ゆえに} \quad -2r = \frac{3}{2} \qquad \text{よって} \quad r = -\frac{3}{4}$$

$$(\text{エ}) \quad \text{ に入る数は} \quad (\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{3})^4} = \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad (\text{ア}) \quad \log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \log_6 6^2 = 2$$

$$(\text{イ}) \quad (\text{解答 1}) \quad \log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 3^2 = 2$$

$$(\text{解答 2}) \quad (\text{与式}) = \log_3 (2 \cdot 3^2) - \log_3 2 \\ = (\log_3 2 + \log_3 3^2) - \log_3 2 \\ = (\log_3 2 + 2) - \log_3 2 = 2$$

$$(\text{ウ}) \quad (\text{解答 1}) \quad \log_9 \frac{9}{5} + 2\log_9 \sqrt{15} = \log_9 \frac{9}{5} + \log_9 (\sqrt{15})^2 \\ = \log_9 \left\{ \frac{9}{5} \cdot (\sqrt{15})^2 \right\} \\ = \log_9 27 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$(\text{解答 2}) \quad (\text{与式}) = \log_9 \frac{9}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_9 (3 \cdot 5) = 1 - \log_9 5 + (\log_9 3 + \log_9 5) \\ = 1 + \log_9 3 = 1 + \log_9 9^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(\text{エ}) \quad (\text{解答 1}) \quad \frac{1}{2}\log_{10} \frac{5}{6} + \log_{10} \sqrt{7.5} + \frac{1}{2}\log_{10} 1.6$$

$$\begin{aligned}
&= \log_{10} \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{1}{2}} + \log_{10} \sqrt{7.5} + \log_{10} (1.6)^{\frac{1}{2}} \\
&= \log_{10} \left(\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{7.5} \cdot \sqrt{1.6} \right) = \log_{10} \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{8}{5}} \\
&= \log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{解答 2}) \quad (\text{与式}) &= \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{2 \cdot 3} + \log_{10} \frac{3 \cdot 5}{2} + \log_{10} \frac{2^3}{5} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\log_{10} 5 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5 - \log_{10} 2 \\
&\quad + 3 \log_{10} 2 - \log_{10} 5) \\
&= \frac{1}{2} (\log_{10} 5 + \log_{10} 2) = \frac{1}{2} \log_{10} 10 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

12 次の式を簡単にせよ。

$$(1) (\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4) \quad (2) \log_2 25 \cdot \log_3 16 \cdot \log_5 27$$

$$(\text{解答}) \quad (1) \quad \frac{35}{3} \quad (2) \quad 24$$

解説

$$\begin{aligned}
(1) \quad (\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4) &= \left(\log_2 9 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8} \right) \left(\frac{\log_2 16}{\log_2 3} + \frac{\log_2 4}{\log_2 9} \right) \\
&= \left(\log_2 3^2 + \frac{\log_2 3}{\log_2 2^3} \right) \left(\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3^2} \right) \\
&= \left(2 \log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3} \right) \left(\frac{4}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 3} \right) \\
&= \frac{7}{3} \log_2 3 \cdot \frac{5}{\log_2 3} = \frac{35}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \log_2 25 \cdot \log_3 16 \cdot \log_5 27 &= \log_2 25 \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 27}{\log_2 5} = \log_2 5^2 \cdot \frac{\log_2 2^4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3^3}{\log_2 5} \\
&= 2 \log_2 5 \cdot \frac{4}{\log_2 3} \cdot \frac{3 \log_2 3}{\log_2 5} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24
\end{aligned}$$

13 次の式を簡単にせよ。

$$\begin{aligned}
(1) \quad \log_2 25 - 2 \log_4 10 - 3 \log_8 10 & \quad (2) \quad \log_4 8 + \log_9 \sqrt{27} \\
(3) \quad (\log_2 3 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 2) & \quad (4) \quad \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2
\end{aligned}$$

$$(\text{解答}) \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad \frac{9}{4} \quad (3) \quad \frac{9}{4} \quad (4) \quad 1$$

解説

$$\begin{aligned}
(1) \quad \log_2 25 - 2 \log_4 10 - 3 \log_8 10 &= \log_2 25 - 2 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 4} - 3 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 8} \\
&= \log_2 5^2 - 2 \cdot \frac{\log_2 (2 \cdot 5)}{2} - 3 \cdot \frac{\log_2 (2 \cdot 5)}{3} \\
&= 2 \log_2 5 - 2(1 + \log_2 5) = -2
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \log_4 8 + \log_9 \sqrt{27} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} + \frac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 9} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$(3) \quad (\log_2 3 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 2) = \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \right) \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{2} \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3} \right) \\
&= \frac{3}{2} (\log_2 3) \cdot \frac{3}{2 \log_2 3} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

$$(4) \quad \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = 1$$

$$\begin{aligned}
(\text{別解}) \quad (1) \quad \log_2 25 - 2 \log_4 10 - 3 \log_8 10 &= \log_2 5^2 - \log_2 10^2 - \log_2 10^3 \\
&= 2 \log_2 5 - \log_2 10 - \log_2 10 \\
&= 2(\log_2 5 - \log_2 10) \\
&= 2 \log_2 \frac{5}{10} = 2 \log_2 2^{-1} = -2
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \log_4 8 + \log_9 \sqrt{27} = \log_{2^2} 2^3 + \log_{3^2} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_2 2 + \frac{\frac{3}{2}}{2} \log_3 3$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad (\log_2 3 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 2) &= \left(\log_2 3 + \frac{1}{2} \log_2 3 \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 9} \right) \\
&= \frac{3}{2} \log_2 3 \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3} \right) \\
&= \frac{3 \log_2 3}{2} \cdot \frac{3}{2 \log_2 3} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

$$(4) \quad \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 = 1$$

14 $\log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25} \sqrt{125} \cdot \log_{27} 81$ を計算せよ。

$$(\text{解答}) \quad 18$$

解説

$$\log_2 27 \cdot \log_3 64 = \log_2 3^3 \cdot \log_3 2^6 = 3 \log_2 3 \cdot 6 \log_3 2 = 18 \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 18$$

$$\log_{25} \sqrt{125} = \log_{5^2} 5^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} \log_5 5 = \frac{3}{4}$$

$$\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3} \log_3 3 = \frac{4}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad (\text{与式}) = 18 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 18$$

15 (1) $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ のとき, 次の式を a , b で表せ。

$$(\text{ア}) \quad \log_2 9 + \log_3 8 \quad (\text{イ}) \quad \log_{\sqrt{45}} 144$$

$$(2) \quad \log_x a = \frac{1}{3}, \log_x b = \frac{1}{8}, \log_x c = \frac{1}{24} \text{ のとき, } \log_{abc} x \text{ の値を求めよ。}$$

$$(\text{解答}) \quad (1) \quad (\text{ア}) \quad \frac{3a^2 + 2b^2}{ab} \quad (\text{イ}) \quad \frac{4(2a+b)}{-a+2b+1} \quad (2) \quad 2$$

解説

$$\begin{aligned}
(1) \quad (\text{ア}) \quad \log_2 9 + \log_3 8 &= \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2} + \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} \\
&= \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2} + \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} + \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3} \\
&= \frac{2b}{a} + \frac{3a}{b} = \frac{3a^2 + 2b^2}{ab}
\end{aligned}$$

$$(\text{イ}) \quad \log_{\sqrt{45}} 144 = \frac{\log_{10} 144}{\log_{10} \sqrt{45}} = \frac{\log_{10} (2^4 \cdot 3^2)}{\frac{1}{2} \log_{10} (3^2 \cdot 5)}$$

$$= \frac{2(\log_{10} 2^4 + \log_{10} 3^2)}{\log_{10} 3^2 + \log_{10} \frac{10}{2}}$$

$$= \frac{2(4 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3)}{2 \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2}$$

$$= \frac{2(4a + 2b)}{2b + 1 - a} = \frac{4(2a + b)}{-a + 2b + 1}$$

$$(2) \quad \log_x abc = \log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = 2$$

16 (1) 次の式の値を求めよ。

$$(\text{ア}) \quad 3^{\log_9 2} \quad (\text{イ}) \quad 3^{\frac{1}{\log_3 5}} \quad (\text{ウ}) \quad 11^{\log_{121} 36}$$

$$(2) \quad 2^x = 3^y = 24^z = \sqrt[4]{6} \text{ を満たす } x, y, z \text{ に対して, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \text{ア} \frac{\quad}{\quad},$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \text{イ} \frac{\quad}{\quad} \text{ が成り立つ。}$$

$$(\text{解答}) \quad (1) \quad (\text{ア}) \quad \sqrt{2} \quad (\text{イ}) \quad 5 \quad (\text{ウ}) \quad 6 \\ (2) \quad (\text{ア}) \quad 4 \quad (\text{イ}) \quad -8$$

解説

$$(1) \quad (\text{ア}) \quad 3^{\log_9 2} = 3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 9}} = 3^{\frac{\log_3 2}{2}} = 3^{\log_3 \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(\text{別解}) \quad 3^{\log_9 2} = M \text{ とおく。}$$

左辺は正であるから, 両辺の 3 を底とする対数をとると

$$\log_9 2 \cdot \log_3 3 = \log_3 M \quad \text{すなわち} \quad \log_9 2 = \log_3 M$$

$$\log_9 2 = \log_{3^2} (\sqrt{2})^2 = \log_3 \sqrt{2} \text{ であるから} \quad \log_3 \sqrt{2} = \log_3 M$$

$$\text{したがって} \quad M = \sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad 3^{\log_9 2} = \sqrt{2}$$

$$(\text{イ}) \quad 3^{\frac{1}{\log_3 5}} = 3^{\log_3 5} = 5$$

$$(\text{別解}) \quad \frac{1}{\log_3 3} = \log_3 5 \text{ である。} 3^{\log_3 5} = M \text{ とおく。}$$

左辺は正であるから, 両辺の 3 を底とする対数をとると

$$\log_3 5 \cdot \log_3 3 = \log_3 M \quad \text{すなわち} \quad \log_3 5 = \log_3 M$$

$$\text{したがって} \quad M = 5 \quad \text{すなわち} \quad 3^{\frac{1}{\log_3 5}} = 5$$

$$(\text{ウ}) \quad 11^{\log_{121} 36} = 11^{\frac{\log_{11} 36}{\log_{11} 121}} = 11^{\frac{\log_{11} 36}{2}} = 11^{\log_{11} 6} = 6$$

$$(\text{別解}) \quad 11^{\log_{121} 36} = M \text{ とおく。}$$

左辺は正であるから, 両辺の 11 を底とする対数をとると

$$\log_{121} 36 \cdot \log_{11} 11 = \log_{11} M$$

$$\text{すなわち} \quad \log_{121} 36 = \log_{11} M$$

$$\log_{121} 36 = \log_{11^2} 6^2 = \log_{11} 6 \quad \text{であるから} \quad \log_{11} M = \log_{11} 6$$

$$\text{したがって} \quad M = 6 \quad \text{すなわち} \quad 11^{\log_{121} 36} = 6$$

$$(2) \quad 2^x = 3^y = 24^z = \sqrt[4]{6} \quad \text{から}$$

$$x = \log_2 \sqrt[4]{6} = \frac{1}{4} \log_2 6, \quad y = \log_3 \sqrt[4]{6} = \frac{1}{4} \log_3 6, \quad z = \log_{24} \sqrt[4]{6} = \frac{1}{4} \log_{24} 6$$

$$(ア) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{\log_2 6} + \frac{4}{\log_3 6} = 4(\log_6 2 + \log_6 3) = 4 \log_6 6 = 4$$

$$(イ) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{4}{\log_2 6} - \frac{4}{\log_3 6} - \frac{4}{\log_{24} 6} = 4(\log_6 2 - \log_6 3 - \log_6 24) \\ = 4 \log_6 \frac{2}{3 \cdot 24} = 4 \log_6 \frac{1}{36} = 4 \log_6 6^{-2} = 4 \cdot (-2) = -8$$

17 次の対数の値を求めよ。

$$(1) \log_3 9 \quad (2) \log_2 \frac{1}{4} \quad (3) \log_{100} 1 \quad (4) \log_2 \sqrt{8} \\ (5) \log_{\sqrt{3}} 3 \quad (6) \log_{64} 4 \quad (7) \log_{0.2} 25 \quad (8) \log_{25} \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad 0 \quad (4) \quad \frac{3}{2} \quad (5) \quad 2 \quad (6) \quad \frac{1}{3} \quad (7) \quad -2 \\ (8) \quad -\frac{1}{4}$$

解説

$$(1) \quad \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$(2) \quad \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

$$(3) \quad \log_{100} 1 = 0$$

$$(4) \quad \log_2 \sqrt{8} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$(5) \quad \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$$

$$(6) \quad \log_{64} 4 = \log_{64} (4^3)^{\frac{1}{3}} = \log_{64} 64^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$(7) \quad \log_{0.2} 25 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \right)^{-2} = -2$$

$$(8) \quad \log_{25} \sqrt{\frac{1}{5}} = \log_{25} 5^{-\frac{1}{2}} = \log_{25} 25^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$$

18 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \log_8 2 + \log_8 32$$

$$(2) \log_3 45 - \log_3 5$$

$$(3) 3 \log_5 12 - \log_5 300 - 2 \log_5 60$$

$$(4) \log_{0.5} \frac{8}{13} - 2 \log_{0.5} \frac{2}{3} + \log_{0.5} \frac{26}{9}$$

$$(5) \log_2 \sqrt[3]{18} - \frac{2}{3} \log_2 3$$

$$(6) \log_5 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log_5 \frac{25}{12} - \frac{3}{2} \log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad -4 \quad (4) \quad -2 \quad (5) \quad \frac{1}{3} \quad (6) \quad 1$$

解説

$$(1) \quad \text{与式} = \log_8 (2 \times 32) = \log_8 64 = 2$$

$$(2) \quad \text{与式} = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = 2$$

$$(3) \quad \text{与式} = \log_5 \frac{12^3}{300 \times 60^2} = \log_5 \frac{1}{5^4} = \log_5 5^{-4} = -4$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = 3 \log_5 (2^2 \times 3) - \log_5 (2^2 \times 3 \times 5^2) - 2 \log_5 (2^2 \times 3 \times 5) \\ = 3(2 \log_5 2 + \log_5 3) - (2 \log_5 2 + \log_5 3 + 2 \log_5 5) \\ - 2(2 \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 5) \\ = -4 \log_5 5 = -4$$

$$(4) \quad \text{与式} = \log_{0.5} \frac{\frac{8}{13} \times \frac{26}{9}}{\left(\frac{2}{3} \right)^2} = \log_{0.5} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = -2$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = \log_{0.5} \frac{2^3}{13} - 2 \log_{0.5} \frac{2}{3} + \log_{0.5} \frac{2 \times 13}{3^2} \\ = (3 \log_{0.5} 2 - \log_{0.5} 13) - 2(\log_{0.5} 2 - \log_{0.5} 3) + (\log_{0.5} 2 + \log_{0.5} 13 - 2 \log_{0.5} 3) \\ = 2 \log_{0.5} 2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \\ = -2$$

$$(5) \quad \text{与式} = \log_2 \sqrt[3]{18} - \log_2 \sqrt[3]{9} = \log_2 \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{9}} = \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = \frac{1}{3} \log_2 (2 \times 3^2) - \frac{2}{3} \log_2 3 = \frac{1}{3} (\log_2 2 + 2 \log_2 3) - \frac{2}{3} \log_2 3 \\ = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$$

$$(6) \quad \text{与式} = \log_5 \sqrt{2} + \log_5 \sqrt{\frac{25}{12}} + \log_5 (\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}} \\ = \log_5 \left(\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{25}{12}} \times \sqrt{6} \right) = \log_5 5 = 1$$

$$\text{〔別解〕} \quad \text{与式} = \frac{1}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 \frac{5^2}{2^2 \times 3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \log_5 (2 \times 3) \\ = \frac{1}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} (2 \log_5 5 - 2 \log_5 2 - \log_5 3) + \frac{1}{2} (\log_5 2 + \log_5 3) \\ = \log_5 5 = 1$$

19 底の変換公式を用いて、次の式を簡単にせよ。

$$(1) \log_8 32 \quad (2) \log_9 \frac{1}{3} \quad (3) \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{125} \\ (4) \log_2 3 \cdot \log_3 2 \quad (5) \log_3 5 \cdot \log_5 9 \quad (6) \log_4 5 \cdot \log_5 8$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad \frac{5}{3} \quad (2) \quad -\frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{3}{5} \quad (4) \quad 1 \quad (5) \quad 2 \quad (6) \quad \frac{3}{2}$$

解説

$$(1) \quad \log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}$$

$$(2) \quad \log_9 \frac{1}{3} = \frac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-1}}{\log_3 3^2} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{125} = \frac{\log_5 \sqrt[5]{125}}{\log_5 \frac{1}{5}} = \frac{\log_5 5^{\frac{3}{5}}}{\log_5 5^{-1}} = -\frac{3}{5}$$

$$(4) \quad \log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1$$

$$(5) \quad \log_3 5 \cdot \log_5 9 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 5} = 2$$

$$(6) \quad \log_4 5 \cdot \log_5 8 = \frac{\log_2 5}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5} = \frac{3}{2}$$

20 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 \quad (2) (\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4) \\ (3) \log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8 \quad (4) \log_2 10 \cdot \log_5 10 - (\log_2 5 + \log_5 2)$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad \frac{14}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4) \quad 2$$

解説

$$(1) \quad \text{与式} = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = 3$$

$$(2) \quad \text{与式} = \left(\log_2 9 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8} \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{\log_2 4}{\log_2 9} \right) \\ = \left(2 \log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3} \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{2}{2 \log_2 3} \right) \\ = \frac{7}{3} \log_2 3 \cdot \frac{2}{\log_2 3} = \frac{14}{3}$$

$$(3) \quad \text{与式} = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 9} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{2} \cdot \frac{2 \log_2 5}{2 \log_2 3} \cdot \frac{3}{\log_2 5} = \frac{3}{2}$$

$$(4) \quad \text{与式} = \log_2 10 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 5} - \left(\log_2 5 + \frac{1}{\log_2 5} \right) \\ = (\log_2 2 + \log_2 5) \cdot \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 5} - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5} \\ = (1 + \log_2 5) \left(\frac{1}{\log_2 5} + 1 \right) - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5} \\ = \frac{1}{\log_2 5} + 1 + 1 + \log_2 5 - \log_2 5 - \frac{1}{\log_2 5} \\ = 2$$

21 次の式の値を求めよ。ただし、 a 、 x は正の数とし、 $a \neq 1$ とする。

$$(1) 5^{\log_5 7} \quad (2) 10^{1 + \log_{10} 3} \quad (3) 36^{\log_6 \sqrt{5}} \\ (4) 7^{\log_{49} 4} \quad (5) a^{2 \log_a x} \quad (6) a^{-\log_a x}$$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 30 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 2 \quad (5) \quad x^2 \quad (6) \quad \frac{1}{x}$$

解説

$$(1) \quad 5^{\log_5 7} = 7$$

$$(2) \quad 10^{1 + \log_{10} 3} = 10^{\log_{10} 10 + \log_{10} 3} = 10^{\log_{10} 30} = 30 \\ (10^{1 + \log_{10} 3} = 10 \cdot 10^{\log_{10} 3} = 10 \cdot 3 = 30)$$

(3) $36^{\log_6 \sqrt{5}} = 6^{2\log_6 \sqrt{5}} = 6^{\log_6 5} = 5$

(4) $7^{\log_{49} 4} = \left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{49} 4} = 49^{\frac{1}{2}\log_{49} 4} = 49^{\log_{49} 4^{\frac{1}{2}}}$
 $= 49^{\log_{49} 2} = 2$

別解 $\log_{49} 4 = \frac{\log_7 4}{\log_7 49} = \frac{1}{2}\log_7 4 = \log_7 4^{\frac{1}{2}} = \log_7 2$

したがって $7^{\log_{49} 4} = 7^{\log_7 2} = 2$

(5) $a^{2\log_a x} = a^{\log_a x^2} = x^2$

(6) $a^{-\log_a x} = a^{\log_a x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

参考 与えられた式を y とおき，両辺の対数をとって解いてもよい。例えば，以下は (3) の解法。

[(3) の別解]

$y = 36^{\log_6 \sqrt{5}}$ とおく。6 を底として両辺の対数をとると $\log_6 y = \log_6 \sqrt{5} \cdot \log_6 36$

よって $\log_6 y = 2\log_6 \sqrt{5}$ ゆえに $\log_6 y = \log_6 5$

したがって $y = 5$

22 $\log_{11} 2$ の小数第 1 位の数を求めよ。

解答 2

解説

$\log_{11} 2 = a$ とすると $11^a = 2$

したがって $11^{10a} = (11^a)^{10} = 2^{10} = 1024$

ここで， $11^2 = 121$ ， $11^3 = 1331$ であるから $11^2 < 11^{10a} < 11^3$

底 11 は 1 より大きいから $2 < 10a < 3$

すなわち $0.2 < a < 0.3$

よって， $\log_{11} 2$ の小数第 1 位の数は 2