指数方程式クイズ(難)

$\boxed{1}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x-2^{x+1}-8=0$　　(2) $9^x-8\cdot3^x-9>0$

解答　(1) $x=2$　(2) $x>2$

解説

(1) 方程式を変形すると

$(2^x)^2-2\cdot2^x-8=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は

$t^2-2t-8=0$

よって　$(t+2)(t-4)=0$

$t>0$ であるから　$t=4$

ゆえに　$2^x=4$　すなわち　$2^x=2^2$

よって　$x=2$

(2) 不等式を変形すると

$(3^x)^2-8\cdot3^x-9>0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は

$t^2-8t-9>0$

よって　$(t+1)(t-9)>0$

$t+1>0$ であるから　$t-9>0$　すなわち　$t>9$

ゆえに　$3^x>9$　すなわち　$3^x>3^2$

底 3 は 1 より大きいから　$x>2$

$\boxed{2}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $3^{2x}-3^{x+1}-54=0$　　(2) $2\cdot4^x-5\cdot2^x+2=0$

(3) $4^x-7\cdot2^x-8>0$　　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

解答　(1) $x=2$　(2) $x=1,\ -1$　(3) $x>3$　(4) $x>1$

解説

(1) 方程式を変形すると　$(3^x)^2-3\cdot3^x-54=0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-3t-54=0$

よって　$(t+6)(t-9)=0$

$t>0$ であるから　$t=9$

ゆえに　$3^x=9$　すなわち　$3^x=3^2$

よって　$x=2$

(2) 方程式を変形すると　$2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x+2=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$2t^2-5t+2=0$

よって　$(t-2)(2t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=2,\ \frac{1}{2}$

ゆえに　$2^x=2,\ \frac{1}{2}$　すなわち　$2^x=2^1,\ 2^{-1}$

よって　$x=1,\ -1$

(3) 不等式を変形すると　$(2^x)^2-7\cdot2^x-8>0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-7t-8>0$

よって　$(t+1)(t-8)>0$

$t+1>0$ であるから　$t-8>0$　すなわち　$t>8$

ゆえに　$2^x>8$　すなわち　$2^x>2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$x>3$

(4) 不等式を変形すると　$3\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$3t^2+5t-2<0$

よって　$(t+2)(3t-1)<0$

$t+2>0$ であるから　$3t-1<0$　すなわち　$t<\frac{1}{3}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^1$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>1$

$\boxed{3}$ 次の方程式を解け。

(1) $16^{2-x}=8^x$　　(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$

解答　(1) $x=\frac{8}{7}$　(2) $x=3$

解説

(1) $16^{2-x}=8^x$ から　$2^{4(2-x)}=2^{3x}$

よって　$4(2-x)=3x$　　整理すると　$7x=8$

ゆえに　$x=\frac{8}{7}$

(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$ から

$(2^x)^2-2^2\cdot2^x-32=0$

よって　$(2^x)^2-4\cdot2^x-32=0$

ゆえに　$(2^x+4)(2^x-8)=0$

よって　$2^x=-4$　または　$2^x=8$

$2^x>0$ であるから　$2^x=8$

ゆえに　$2^x=2^3$　　よって　$x=3$

$\boxed{4}$ 次の方程式を解け。

(1) $25^{x^2-3x+14}=125^{x(x-3)}$　　(2) $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$

(3) $2^{3x+2}-13\cdot2^{2x}+11\cdot2^x-2=0$　　(4) $2^{x+2}-2^{-x}+3=0$

解答　(1) $x=-4,\ 7$　(2) $x=\pm1$　(3) $x=0,\ 1,\ -2$　(4) $x=-2$

解説

(1) $25^{x^2-3x+14}=125^{x(x-3)}$ から　$5^{2(x^2-3x+14)}=5^{3x(x-3)}$

よって　$2(x^2-3x+14)=3x(x-3)$

整理して　$x^2-3x-28=0$

ゆえに　$(x+4)(x-7)=0$

したがって　$x=-4,\ 7$

(2) $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$ から　$2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x+2=0$

$t=2^x$ とおくと　$2t^2-5t+2=0$　より　$(t-2)(2t-1)=0$

よって　$t=2,\ \frac{1}{2}$

ゆえに　$2^x=2$　または　$2^x=\frac{1}{2}$

すなわち　$2^x=2^1$　または　$2^x=2^{-1}$

したがって　$x=\pm1$

(3) 与えられた方程式から　$4\cdot(2^x)^3-13\cdot(2^x)^2+11\cdot2^x-2=0$

$t=2^x$ とおくと　$4t^3-13t^2+11t-2=0$

左辺を $P(t)$ とおくと，$P(t)=4t^3-13t^2+11t-2$

$P(1)=4-13+11-2=0$　より　$P(t)$ は $t-1$ で割り切れる

$P(t)$ を $t-1$ で割ると，商が $4t^2-9t+2$ となるので

$P(t)=(t-1)(4t^2-9t+2)=(t-1)(t-2)(4t-1)$

よって　$(t-1)(t-2)(4t-1)=0$　より　$t=1,\ 2,\ \frac{1}{4}$

ゆえに　$2^x=1$　または　$2^x=2$　または　$2^x=\frac{1}{4}$

すなわち　$2^x=2^0$　または　$2^x=2^1$　または　$2^x=2^{-2}$

したがって　$x=0,\ 1,\ -2$

(4) $2^{x+2}-2^{-x}+3=0$　より　$2^x\cdot2^2-\frac{1}{2^x}+3=0$

$t=2^x$ とおくと　$4t-\frac{1}{t}+3=0$　両辺に $t\ (>0)$ を掛けて

$4t^2+3t-1=0$　よって　$(4t-1)(t+1)=0$

$t+1>0$ であるから　$4t-1=0$　より　$t=\frac{1}{4}$

$2^x=\frac{1}{4}$　すなわち　$2^x=2^{-2}$　したがって　$x=-2$

$\boxed{5}$ 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases}4^x=8^{y-1}\\27^x=3^{y+1}\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3^{2x}-3^y=-6\\3^{2x+y}=27\end{cases}$

解答　(1) $x=\frac{6}{7},\ y=\frac{11}{7}$　(2) $x=\frac{1}{2},\ y=2$

解説

(1) $4^x=8^{y-1}$ ……①，$27^x=3^{y+1}$ ……②　とする。

① から　$2^{2x}=2^{3(y-1)}$　　よって　$2x=3y-3$ ……③

② から　$3^{3x}=3^{y+1}$　　よって　$3x=y+1$ ……④

③，④ を連立して解くと　$x=\frac{6}{7},\ y=\frac{11}{7}$

(2) $3^{2x}-3^y=-6$ ……①，$3^{2x+y}=27$ ……②　とする。

② から　$3^{2x+y}=3^3$　　よって　$2x+y=3$

すなわち　$y=-2x+3$ ……③

これを ① に代入すると　$3^{2x}-3^{-2x+3}=-6$

ゆえに　$3^{2x}+6-27\cdot3^{-2x}=0$

両辺に $3^{2x}\ (>0)$ を掛けて　$(3^{2x})^2+6\cdot3^{2x}-27=0$

よって　$(3^{2x}-3)(3^{2x}+9)=0$

$3^{2x}>0$ であるから　$3^{2x}=3$　　ゆえに　$2x=1$

したがって　$x=\frac{1}{2}$　　③ から　$y=2$

別解　$3^{2x}=X,\ 3^y=Y$ とおくと　$X>0,\ Y>0$

また，連立方程式は $\begin{cases} X-Y=-6 & \cdots\cdots ① \\ XY=27 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$Y=X+6$　……③

③ を ② に代入して整理すると　$X^2+6X-27=0$

ゆえに　$(X-3)(X+9)=0$

$X>0$ であるから　$X=3$

これを ③ に代入して　$Y=9$　($Y>0$ を満たす)

$X=3$ から　$3^{2x}=3$　　よって　$x=\dfrac{1}{2}$

$Y=9$ から　$3^y=9$　　よって　$y=2$

したがって，解は　$x=\dfrac{1}{2},\ y=2$

6 $(n^2-3n+3)^{n^2-8n+15}=1$ を満たす自然数 n のうち，最小なものと最大なものを求めよ。

解答　最小なものは 1，最大なものは 5

解説

$(n^2-3n+3)^{n^2-8n+15}=1$　……① とする。

$n^2-3n+3=\left(n-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ であるから，① が成り立つのは，

$$n^2-3n+3=1 \quad \text{または} \quad n^2-8n+15=0$$

のときである。

$n^2-3n+3=1$ から　$(n-1)(n-2)=0$　　よって　$n=1,\ 2$

$n^2-8n+15=0$ から　$(n-3)(n-5)=0$　　よって　$n=3,\ 5$

したがって，① を満たす自然数 n は　1，2，3，5

このうち，最小なものは 1，最大なものは 5 である。

7 $h(x)=2(8^{x-1}+8^{-x})-3(4^{x-1}+4^{-x})+2^{x-1}+2^{-x}$ とする。

方程式 $h(x)=0$ は，$t=2^{x-1}+2^{-x}$ とおくと，t についての 3 次方程式

$\left(2t-{}^{ア}\boxed{}\right)\left(t+{}^{イ}\boxed{}\right)\left(t-{}^{ウ}\boxed{}\right)=0$ となる。

したがって，$h(x)=0$ の解 x の値は小さい順に $x={}^{エ}\boxed{}$，$x={}^{オ}\boxed{}$ となる。

解答　（ア）3　（イ）1　（ウ）1　（エ）0　（オ）1

解説

$(2^{x-1}+2^{-x})^2=2^{2(x-1)}+2\cdot2^{x-1}\cdot2^{-x}+2^{-2x}=4^{x-1}+4^{-x}+1$

$(2^{x-1}+2^{-x})^3=2^{3(x-1)}+3\cdot2^{x-1}\cdot2^{-x}(2^{x-1}+2^{-x})+2^{-3x}$

$\qquad=8^{x-1}+8^{-x}+\dfrac{3}{2}(2^{x-1}+2^{-x})$

よって　$4^{x-1}+4^{-x}=(2^{x-1}+2^{-x})^2-1=t^2-1$

$\qquad 8^{x-1}+8^{-x}=(2^{x-1}+2^{-x})^3-\dfrac{3}{2}(2^{x-1}+2^{-x})=t^3-\dfrac{3}{2}t$

ゆえに　$h(x)=2\left(t^3-\dfrac{3}{2}t\right)-3(t^2-1)+t=2t^3-3t^2-2t+3$

$\qquad=t^2(2t-3)-(2t-3)=(2t-3)(t^2-1)=(2t-3)(t+1)(t-1)$

よって，方程式 $h(x)=0$ は t についての 3 次方程式 $(2t-{}^{ア}3)(t+{}^{イ}1)(t-{}^{ウ}1)=0$ となる。

これを解くと　$t=\dfrac{3}{2},\ \pm1$

ここで，$2^{x-1}>0$，$2^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$2^{x-1}+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^{x-1}\cdot2^{-x}}=2\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$$

ゆえに　$t\geqq\sqrt{2}$　　これを満たす t の値は　$t=\dfrac{3}{2}$

$2^{x-1}+2^{-x}=\dfrac{3}{2}$ の両辺に 2^{x+1} を掛けて整理すると

$\qquad(2^x)^2-3\cdot2^x+2=0$　すなわち　$(2^x-1)(2^x-2)=0$

よって　$2^x=1,\ 2$　　ゆえに　$x=0,\ 1$

したがって，$h(x)=0$ の解 x の値は小さい順に $x={}^{エ}0$，$x={}^{オ}1$ となる。

8 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x+2^{x+1}-24=0$　　(2) $10^{2x}+10^x=2$

(3) $9^{x+1}-28\cdot3^x+3=0$　　(4) $16^x-3\cdot4^x-4\geqq0$

(5) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-\dfrac{1}{3^x}-6<0$　　(6) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2>0$

解答　(1) $x=2$　(2) $x=0$　(3) $x=1,\ -2$　(4) $x\geqq1$　(5) $x>-1$
(6) $x<-1,\ 2<x$

解説

(1) 方程式を変形すると　$(2^x)^2+2\cdot2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2+2t-24=0$

よって　$(t-4)(t+6)=0$

$t>0$ であるから　$t=4$

ゆえに　$2^x=4$　すなわち　$2^x=2^2$

したがって　$x=2$

(2) 方程式を変形すると　$(10^x)^2+10^x-2=0$

$10^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2+t-2=0$

よって　$(t-1)(t+2)=0$

$t>0$ であるから　$t=1$

ゆえに　$10^x=1$　すなわち　$10^x=10^0$

したがって　$x=0$

(3) 方程式を変形すると　$9\cdot(3^x)^2-28\cdot3^x+3=0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$9t^2-28t+3=0$

よって　$(t-3)(9t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=3,\ \dfrac{1}{9}$

ゆえに　$3^x=3,\ \dfrac{1}{9}$　すなわち　$3^x=3^1,\ 3^{-2}$

したがって　$x=1,\ -2$

(4) 不等式を変形すると　$(4^x)^2-3\cdot4^x-4\geqq0$

$4^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-3t-4\geqq0$

よって　$(t+1)(t-4)\geqq0$

$t+1>0$ であるから　$t-4\geqq0$　すなわち　$t\geqq4$

ゆえに　$4^x\geqq4$　すなわち　$4^x\geqq4^1$

底 4 は 1 より大きいから　$x\geqq1$

(5) 不等式を変形すると　$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-6<0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-t-6<0$

よって　$(t+2)(t-3)<0$

$t+2>0$ であるから　$t-3<0$　すなわち　$t<3$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<3$　すなわち　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>-1$

(6) 不等式を変形すると　$4\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2>0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$4t^2-9t+2>0$

よって　$(t-2)(4t-1)>0$

これを解くと　$t<\dfrac{1}{4},\ 2<t$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\dfrac{1}{4},\ 2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　すなわち　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x<-1,\ 2<x$

9 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2^x+2^y=6 \\ 2^{x+y}=8 \end{cases}$ (ただし $x<y$)　　(2) $\begin{cases} 2^{x-1}+3^{y+1}=31 \\ 2^{x+2}-3^{y-1}=29 \end{cases}$

解答　(1) $x=1,\ y=2$　(2) $x=3,\ y=2$

解説

(1) $2^x=X$，$2^y=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$　また $x<y$ より $X<Y$

また，連立方程式は $\begin{cases} X+Y=6 & \cdots\cdots ① \\ XY=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$Y=6-X$　……③

これを ② に代入して　$X(6-X)=8$

よって　$X^2-6X+8=0$

これを解いて　$X=2,\ 4$

③ から　$X=2$ のとき $Y=4$，$X=4$ のとき $Y=2$

このうち $X>0$，$Y>0$，$X<Y$ を満たすのは $X=2$，$Y=4$

$X=2$，$Y=4$ から　$2^x=2$，$2^y=4$　　よって　$x=1,\ y=2$

別解　[X，Y の求め方]

①，② から，X，Y は 2 次方程式 $t^2-6t+8=0$ の解である。

左辺を因数分解して　$(t-2)(t-4)=0$

よって　$t=2,\ 4$

ゆえに　$X=2$，$Y=4$ または $X=4$，$Y=2$

(2) $2^{x-1}=X$，$3^{y-1}=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$

また，連立方程式は $\begin{cases} X+9Y=31 & \cdots\cdots ① \\ 8X-Y=29 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② を解くと　$X=4$，$Y=3$

これは $X>0$，$Y>0$ を満たす。

$X=4$ から　$2^{x-1}=4$　　これを解いて　$x=3$

$Y=3$ から　$3^{y-1}=3$　　これを解いて　$y=2$

よって　$x=3,\ y=2$

$\boxed{10}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$　(2) $2(3^x+3^{-x})-5(9^x+9^{-x})+6=0$

(3) $2^{x-4}<8^{1-2x}<4^{x+1}$

解答　(1) $x=0,\ 2$　(2) $x=0$　(3) $\frac{1}{8}<x<1$

解説

(1) 方程式から　$(2^x)^3-3\cdot(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$　方程式は　$X^3-3X^2-6X+8=0$

$P(X)=X^3-3X^2-6X+8$　とおくと　$P(1)=1-3-6+8=0$

よって　$P(X)$ は $X-1$ で割り切れる

$P(X)$ を $X-1$ で割ると商は X^2-2X-8 より

$P(X)=(X-1)(X^2-2X-8)=(X-1)(X+2)(X-4)$

ゆえに　$(X-1)(X+2)(X-4)=0$

$X>0$ であるから　$X=1,\ 4$

$X=1$ のとき　$2^x=1$　ゆえに　$x=0$

$X=4$ のとき　$2^x=4$　ゆえに　$x=2$

したがって　$x=0,\ 2$

(2) $3^x+3^{-x}=t$ とおくと　$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

方程式は　$2t-5(t^2-2)+6=0$　整理して　$5t^2-2t-16=0$

ゆえに　$(t-2)(5t+8)=0$　……①

ここで，$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$t=3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2\quad\cdots\cdots②$$

等号は $3^x=3^{-x}$，すなわち $x=-x$ から $x=0$ のとき成り立つ。

$t\geqq 2$ から　$5t+8>0$　よって，① から　$t-2=0$　すなわち　$t=2$

$t=2$ となるのは，② で等号が成り立つ場合であるから，求める解は　$x=0$

(3) $8^{1-2x}=(2^3)^{1-2x}=2^{3-6x}$，$4^{x+1}=(2^2)^{x+1}=2^{2x+2}$ であるから，不等式は

$$2^{x-4}<2^{3-6x}<2^{2x+2}$$

底 2 は 1 より大きいから　$x-4<3-6x<2x+2$

$x-4<3-6x$ から　$x<1$　……①

$3-6x<2x+2$ から　$\frac{1}{8}<x$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$\frac{1}{8}<x<1$

$\boxed{11}$ 次の方程式を解け。

(1) $2^{x-1}=2\sqrt{2}$　(2) $81^x=27^{2x+3}$

(3) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$　(4) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$

(5) $27^{x+1}+26\cdot 9^x-3^x=0$　(6) $2^{3-\frac{x}{4}}+31\cdot 2^{-\frac{x}{8}}-4=0$

解答　(1) $x=\frac{5}{2}$　(2) $x=-\frac{9}{2}$　(3) $x=0,\ 1$　(4) $x=-1,\ 1$　(5) $x=-3$

(6) $x=24$

解説

(1) $2^{x-1}=2\sqrt{2}$ から　$2^{x-1}=2^{\frac{3}{2}}$

よって　$x-1=\frac{3}{2}$　ゆえに　$x=\frac{5}{2}$

(2) $81^x=3^{4x}$，$27^{2x+3}=3^{3(2x+3)}$ から　$3^{4x}=3^{3(2x+3)}$

よって　$4x=3(2x+3)$　これを解いて　$x=-\frac{9}{2}$

(3) 方程式を変形して　$(3^x)^2-4\cdot 3^x+3=0$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$t^2-4t+3=0$

因数分解すると　$(t-1)(t-3)=0$

よって　$t=1,\ 3$　ゆえに　$3^x=1,\ 3$

したがって　$x=0,\ 1$

(4) $2^{2x+1}=2^{2x}\cdot 2^1=2(2^x)^2$ であるから，方程式は

$$2(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$$

$2^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$2t^2-5t+2=0$

因数分解すると　$(2t-1)(t-2)=0$

よって　$t=\frac{1}{2},\ 2$　ゆえに　$2^x=\frac{1}{2},\ 2$

したがって　$x=-1,\ 1$

(5) $27^{x+1}=27^x\cdot 27^1=27(3^x)^3$，$9^x=(3^x)^2$ であるから，方程式は

$$27(3^x)^3+26(3^x)^2-3^x=0$$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$27t^3+26t^2-t=0$

因数分解すると　$t(t+1)(27t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=\frac{1}{27}$

よって　$3^x=\frac{1}{27}$

したがって　$x=-3$

(6) $2^{3-\frac{x}{4}}=2^3\cdot 2^{-\frac{x}{4}}=8\left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^2$ であるから，方程式は

$$8\left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^2+31\cdot 2^{-\frac{x}{8}}-4=0$$

$2^{-\frac{x}{8}}=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$8t^2+31t-4=0$

因数分解すると　$(t+4)(8t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=\frac{1}{8}$

よって　$2^{-\frac{x}{8}}=2^{-3}$

ゆえに　$-\frac{x}{8}=-3$　すなわち　$x=24$

$\boxed{12}$ 次の方程式を解け。

(1) $25^x-3\cdot 5^x-10=0$　(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x-6\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+125=0$

解答　(1) $x=1$　(2) $x=-1,\ -2$

解説

(1) 方程式を変形すると　$(5^x)^2-3\cdot 5^x-10=0$

$5^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-3t-10=0$

すなわち　$(t+2)(t-5)=0$　$t>0$ であるから　$t=5$

$5^x=5$ より　$x=1$

(2) 方程式を変形すると　$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-6\cdot 5\left(\frac{1}{5}\right)^x+125=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-30t+125=0$

すなわち　$(t-5)(t-25)=0$　$t>0$ であるから　$t=5,\ 25$

$t=5$ のとき

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=5$ より，$\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ であるから　$x=-1$

$t=25$ のとき

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$ より，$\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ であるから　$x=-2$

よって　$x=-1,\ -2$

$\boxed{13}$ 方程式 $4^{x+3}-2^{x+4}-2^{x+3}+2=0$ を解け。

解答　$x=-2,\ -3$

解説

方程式を変形すると　$64\cdot 4^x-16\cdot 2^x-8\cdot 2^x+2=0$

よって　$32\cdot(2^x)^2-12\cdot 2^x+1=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$32t^2-12t+1=0$

よって　$(4t-1)(8t-1)=0$　$t>0$ であるから　$t=\frac{1}{4},\ \frac{1}{8}$

ゆえに　$2^x=2^{-2},\ 2^{-3}$　したがって　$x=-2,\ -3$

$\boxed{14}$ 方程式 $8^{x+1}-2^{x+2}+4=5^2(4^x+2^x)$ を解け。

解答　$x=-3,\ 2$

解説

$2^x=t$ とおくと　$t>0$

また　$8^{x+1}=(2^3)^{x+1}=(2^x)^3\cdot 8=8t^3$

$4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=t^2$

よって，方程式は　$8t^3-4t+4=25(t^2+t)$

ゆえに　$8t^3-25t^2-29t+4=0$

$P(t)=8t^3-25t^2-29t+4$　とおくと　$P(-1)=-8-25+29+4=0$

よって　$P(t)$ は $t+1$ で割り切れる

$P(t)$ を $t+1$ で割ると商は $8t^2-33t+4$ より

$P(t)=(t+1)(8t^2-33t+4)$

よって　$(t+1)(8t^2-33t+4)=0$　ゆえに　$(t+1)(t-4)(8t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ 4,\ \frac{1}{8}$

$t>0$ であるから　$t=4,\ \frac{1}{8}$

$t=4$ のとき，$2^x=2^2$ から　$x=2$

$t=\frac{1}{8}$ のとき，$2^x=2^{-3}$ から　$x=-3$

したがって　$x=-3,\ 2$

$\boxed{15}$ $2^x+13\cdot 2^{1-x}-2^{2(2-x)}-11=0$ を満たす x の値は小さいほうから順に ${}^{ア}\boxed{}$, ${}^{イ}\boxed{}$, ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

解答 (ア) 0 (イ) 1 (ウ) 3

解説

$2^x+13\cdot 2^{1-x}-2^{2(2-x)}-11=0$ から $2^x+26\cdot 2^{-x}-16\cdot 2^{-2x}-11=0$

$2^x=t$ とおくと $t>0$

方程式は $t+\dfrac{26}{t}-\dfrac{16}{t^2}-11=0$ よって両辺に t^2 をかけて

$t^3-11t^2+26t-16=0$

$P(t)=t^3-11t^2+26t-16$ とおくと $P(1)=1-11+26-16=0$

よって $P(t)$ は $t-1$ で割り切れる

$P(t)$ を $t-1$ で割ると商は t^2-6t+8 より

$P(t)=(t-1)(t^2-6t+8)=(t-1)(t-2)(t-8)$

よって $(t-1)(t-2)(t-8)=0$

$t>0$ より $t=1,\ 2,\ 8$ すなわち $2^x=1,\ 2,\ 8$

$2^x=1$ のとき $x=0$

$2^x=2$ のとき $x=1$

$2^x=8$ のとき $x=3$

したがって，求める x の値は $x={}^{ア}0,\ {}^{イ}1,\ {}^{ウ}3$

$\boxed{16}$ 方程式 $16^x-3\cdot 2^{2x+1}-16=0$ を解け。

解答 $x=\dfrac{3}{2}$

解説

方程式を変形して $(4^x)^2-6\cdot 4^x-16=0$ ゆえに $(4^x+2)(4^x-8)=0$

$4^x>0$ であるから $4^x+2>0$ よって $4^x=8$

すなわち $2^{2x}=2^3$ したがって $x=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{17}$ 方程式 $2^{3x}-3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}=0$ を解け。

解答 $x=0,\ 1$

解説

$2^{3x}-3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}=0$ から $(2^x)^3-3\cdot(2^x)^2+2\cdot 2^x=0$

$2^x=t$ とおくと $t^3-3t^2+2t=0$ よって $t(t-1)(t-2)=0$

$t=2^x>0$ であるから $t=1,\ 2$ すなわち $2^x=1,\ 2$

したがって $x=0,\ 1$

$\boxed{18}$ 方程式 $16^x+4^{x+1}-320=0$ を解け。

解答 $x=2$

解説

方程式を変形すると $(4^x)^2+4\cdot 4^x-320=0$

$4^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は $t^2+4t-320=0$

よって $(t+20)(t-16)=0$

$t>0$ であるから $t=16$

ゆえに $4^x=16$ すなわち $4^x=4^2$

よって $x=2$

$\boxed{19}$ 次の方程式を解け。

(1) $4^x-3\cdot 2^{x+2}-64=0$ (2) $3^x-3^{2-x}=-8$

解答 (1) $x=4$ (2) $x=0$

解説

(1) 方程式を変形して $(2^x)^2-12\cdot 2^x-64=0$

$2^x=t$ とおくと $t>0$

方程式は $t^2-12t-64=0$ よって $(t+4)(t-16)=0$

$t>0$ であるから $t=16$ すなわち $2^x=16$

ゆえに $2^x=2^4$ よって $x=4$

(2) 方程式を変形して $3^x-\dfrac{9}{3^x}=-8$

両辺に 3^x を掛けて整理すると $(3^x)^2+8\cdot 3^x-9=0$

$3^x=t$ とおくと $t>0$

方程式は $t^2+8t-9=0$ よって $(t-1)(t+9)=0$

$t>0$ であるから $t=1$ すなわち $3^x=1$

ゆえに $3^x=3^0$ よって $x=0$

$\boxed{20}$ $a>0$，$a\neq 1$ とする。x の方程式 $a^x+a^{1-x}=1+a$ を解け。

解答 $x=0,1$

解説

$a^x>0$ であるから，$a^x+a^{1-x}=1+a$ の両辺に a^x を掛けると $(a^x)^2+a=(1+a)a^x$

すなわち $(a^x)^2-(1+a)a^x+a=0$ よって $(a^x-1)(a^x-a)=0$

よって $a^x=1,a$ より $a^x=a^0,a^1$ ゆえに $x=0,1$

$\boxed{21}$ 次の方程式，不等式を解け。ただし，a は 1 と異なる正の定数とする。

(1) $\log_a(x^2-2x-8)\geqq\log_a(2x-3)$

(2) $a^{2x+1}-a^{x+2}-a^{x-1}+1=0$

解答 (1) $0<a<1$ のとき $4<x\leqq 5$， $a>1$ のとき $x\geqq 5$

(2) $x=-2,1$

解説

(1) 真数は正であるから $x^2-2x-8>0$ かつ $2x-3>0$

よって $(x+2)(x-4)>0$ かつ $x>\dfrac{3}{2}$ ゆえに $x>4$ ……①

[1] $0<a<1$ のとき

不等式から $x^2-2x-8\leqq 2x-3$ 整理して $x^2-4x-5\leqq 0$

よって $(x+1)(x-5)\leqq 0$ ゆえに $-1\leqq x\leqq 5$ ……②

①，② から，解は $4<x\leqq 5$

[2] $a>1$ のとき

不等式から $x^2-2x-8\geqq 2x-3$ よって $(x+1)(x-5)\geqq 0$

ゆえに $x\leqq -1,\ 5\leqq x$ ……③

①，③ から，解は $x\geqq 5$

(2) 方程式から $a\cdot a^{2x}-a^2a^x-\dfrac{1}{a}a^x+1=0$

$a^x=t$ とおくと $at^2-a^2t-\dfrac{1}{a}t+1=0$

両辺に $a\,(>0)$ を掛けて $a^2t^2-(a^3+1)t+a=0$

よって $(t-a)(a^2t-1)=0$

ゆえに $t=a\,,\,\dfrac{1}{a^2}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & -a & \longrightarrow & -a^3 \\ a^2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline a^2 & & a & & -(a^3+1) \end{array}$$

したがって $a^x=a^1\,,a^{-2}$ より $x=1\,,-2$