指数方程式クイズ

1 次の方程式，不等式を解け。

(1) $9^x=27$ (2) $2^{x-1}\leqq 8$ (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

解答 (1) $x=\frac{3}{2}$ (2) $x\leqq 4$ (3) $x<1$

解説

(1) 方程式を変形すると $3^{2x}=3^3$
よって $2x=3$
これを解いて $x=\frac{3}{2}$

(2) 不等式を変形すると $2^{x-1}\leqq 2^3$
底 2 は 1 より大きいから $x-1\leqq 3$
これを解いて $x\leqq 4$

(3) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $2x<x+1$
これを解いて $x<1$

2 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^x=4$ (2) $3^{2x-1}=243$ (3) $25^x=5^{3-x}$
(4) $2^x-32<0$ (5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\leqq\frac{1}{16}$ (6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{81}\right)^x$

解答 (1) $x=\frac{2}{3}$ (2) $x=3$ (3) $x=1$ (4) $x<5$ (5) $x\geqq 5$ (6) $x>\frac{1}{2}$

解説

(1) 方程式を変形すると $2^{3x}=2^2$ よって $3x=2$
これを解いて $x=\frac{2}{3}$

(2) 方程式を変形すると $3^{2x-1}=3^5$ よって $2x-1=5$
これを解いて $x=3$

(3) 方程式を変形すると $5^{2x}=5^{3-x}$ よって $2x=3-x$
これを解いて $x=1$

(4) 不等式を変形すると $2^x<2^5$
底 2 は 1 より大きいから $x<5$

(5) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^4$
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $x-1\geqq 4$
これを解いて $x\geqq 5$

(6) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$
底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $2x+1<4x$
これを解いて $x>\frac{1}{2}$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^{2x}=16$ (2) $27^x=3^{4-x}$ (3) $\sqrt{3^x}\geqq 3^{x+2}$
(4) $\left(\frac{1}{16}\right)^x<2^{x+5}$ (5) $9^x-3^x=6$ (6) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4>0$

解答 (1) $x=\frac{2}{3}$ (2) $x=1$ (3) $x\leqq -4$ (4) $x>-1$ (5) $x=1$
(6) $x<-1$，$2<x$

解説

(1) $(2^3)^{2x}=2^4$ から $2^{6x}=2^4$
よって $6x=4$ ゆえに $x=\frac{2}{3}$

(2) $3^{3x}=3^{4-x}$ から $3x=4-x$ これを解いて $x=1$

(3) $3^{\frac{x}{2}}\geqq 3^{x+2}$
底 3 は 1 より大きいから $\frac{x}{2}\geqq x+2$ すなわち $x\geqq 2x+4$
これを解いて $x\leqq -4$

(4) $(2^{-4})^x<2^{x+5}$ すなわち $2^{-4x}<2^{x+5}$
底 2 は 1 より大きいから $-4x<x+5$
これを解いて $x>-1$

(5) 方程式を変形すると $(3^x)^2-3^x-6=0$
$3^x=t$ とおくと $t^2-t-6=0$
因数分解して $(t+2)(t-3)=0$
$t>0$ であるから $t=3$
すなわち $3^x=3$
よって $x=1$

(6) 不等式を変形すると $2\cdot(2^x)^2-9\cdot 2^x+4>0$
$2^x=t$ とおくと $2t^2-9t+4>0$
因数分解して $(t-4)(2t-1)>0$
これを解くと $t<\frac{1}{2}$，$4<t$
ゆえに $2^x<\frac{1}{2}$，$4<2^x$
すなわち $2^x<2^{-1}$，$2^2<2^x$
底 2 は 1 より大きいから $x<-1$，$2<x$

4 次の方程式，不等式を解け。[各 9 点]

(1) $3^x=\frac{1}{243}$ (2) $4^{x-3}=2^{x+2}$ (3) $4^x>64$ (4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x\geqq 32$

解答 (1) $3^x=\frac{1}{243}$ から $3^x=3^{-5}$ よって $x=-5$
(2) $4^{x-3}=2^{x+2}$ から $2^{2(x-3)}=2^{x+2}$
よって $2(x-3)=x+2$ ゆえに $x=8$
(3) $4^x>64$ から $4^x>4^3$
底 4 は 1 より大きいから $x>3$
(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x\geqq 32$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $3x\leqq -5$ よって $x\leqq -\frac{5}{3}$
別解 $\left(\frac{1}{8}\right)^x\geqq 32$ から $2^{-3x}\geqq 2^5$
底 2 は 1 より大きいから $-3x\geqq 5$ よって $x\leqq -\frac{5}{3}$

解説

(1) $3^x=\frac{1}{243}$ から $3^x=3^{-5}$ よって $x=-5$

(2) $4^{x-3}=2^{x+2}$ から $2^{2(x-3)}=2^{x+2}$
よって $2(x-3)=x+2$ ゆえに $x=8$

(3) $4^x>64$ から $4^x>4^3$
底 4 は 1 より大きいから $x>3$

(4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x\geqq 32$ から $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $3x\leqq -5$ よって $x\leqq -\frac{5}{3}$
別解 $\left(\frac{1}{8}\right)^x\geqq 32$ から $2^{-3x}\geqq 2^5$
底 2 は 1 より大きいから $-3x\geqq 5$ よって $x\leqq -\frac{5}{3}$

5 次の方程式，不等式を解け。[各 10 点]

(1) $2^{2x-1}=512$ (2) $9^x+3^{x+1}>18$

解答 (1) $2^{2x-1}=512$ から $2^{2x-1}=2^9$
よって $2x-1=9$ ゆえに $x=5$
(2) $9^x+3^{x+1}>18$ から $(3^x)^2+3\cdot 3^x-18>0$
よって $(3^x+6)(3^x-3)>0$
$3^x+6>0$ であるから $3^x-3>0$ すなわち $3^x>3^1$
底 3 は 1 より大きいから $x>1$

解説

(1) $2^{2x-1}=512$ から $2^{2x-1}=2^9$
よって $2x-1=9$ ゆえに $x=5$

(2) $9^x+3^{x+1}>18$ から $(3^x)^2+3\cdot 3^x-18>0$
よって $(3^x+6)(3^x-3)>0$
$3^x+6>0$ であるから $3^x-3>0$ すなわち $3^x>3^1$
底 3 は 1 より大きいから $x>1$

6 次の方程式，不等式を解け。[各 15 点]

(1) $3^{2x-1}=\frac{1}{243}$ (2) $16^x-2\cdot 4^{x+1}<128$

解答 (1) $3^{2x-1}=\frac{1}{243}$ から $3^{2x-1}=3^{-5}$
よって $2x-1=-5$ ゆえに $x=-2$
(2) $16^x-2\cdot 4^{x+1}<128$ から $(4^x)^2-8\cdot 4^x-128<0$
よって $(4^x+8)(4^x-16)<0$

$4^x+8>0$ であるから　$4^x-16<0$　すなわち　$4^x<4^2$
底 4 は 1 より大きいから　$x<2$

解説

(1)　$3^{2x-1}=\dfrac{1}{243}$ から　$3^{2x-1}=3^{-5}$
よって　$2x-1=-5$　ゆえに　$x=-2$

(2)　$16^x-2\cdot4^{x+1}<128$ から　$(4^x)^2-8\cdot4^x-128<0$
よって　$(4^x+8)(4^x-16)<0$
$4^x+8>0$ であるから　$4^x-16<0$　すなわち　$4^x<4^2$
底 4 は 1 より大きいから　$x<2$

7 次の方程式を解け。

(1)　$16^{2-x}=8^x$　(2)　$4^x-2^{x+2}-32=0$

解答　(1)　$x=\dfrac{8}{7}$　(2)　$x=3$

解説

(1)　$16^{2-x}=8^x$ から　$2^{4(2-x)}=2^{3x}$
よって　$4(2-x)=3x$　整理すると　$7x=8$
ゆえに　$x=\dfrac{8}{7}$

(2)　$4^x-2^{x+2}-32=0$ から
$(2^x)^2-2^2\cdot2^x-32=0$
よって　$(2^x)^2-4\cdot2^x-32=0$
ゆえに　$(2^x+4)(2^x-8)=0$
よって　$2^x=-4$　または　$2^x=8$
$2^x>0$ であるから　$2^x=8$
ゆえに　$2^x=2^3$　よって　$x=3$

8 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2^x=64$　(2)　$27^x=\dfrac{1}{9}$　(3)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\dfrac{1}{64}$　(4)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16$

(5)　$2^x>64$　(6)　$27^x\leqq\dfrac{1}{81}$　(7)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\dfrac{1}{64}$　(8)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\geqq27$

解答　(1)　$x=6$　(2)　$x=-\dfrac{2}{3}$　(3)　$x=3$　(4)　$x=-\dfrac{4}{3}$　(5)　$x>6$

(6)　$x\leqq-\dfrac{4}{3}$　(7)　$x>3$　(8)　$x\leqq-\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$2^x=64$ から　$2^x=2^6$　よって　$x=6$

(2)　$27^x=\dfrac{1}{9}$ から　$3^{3x}=3^{-2}$
よって　$3x=-2$　ゆえに　$x=-\dfrac{2}{3}$

(3)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\dfrac{1}{64}$ から　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$
よって　$x=3$

(4)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$
よって　$3x=-4$　ゆえに　$x=-\dfrac{4}{3}$

別解　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16$ から　$2^{-3x}=2^4$
よって　$-3x=4$　ゆえに　$x=-\dfrac{4}{3}$

(5)　$2^x>64$ から　$2^x>2^6$
底 2 は 1 より大きいから　$x>6$

(6)　$27^x\leqq\dfrac{1}{81}$ から　$3^{3x}\leqq3^{-4}$
底 3 は 1 より大きいから　$3x\leqq-4$
よって　$x\leqq-\dfrac{4}{3}$

(7)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\dfrac{1}{64}$ から　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$
底 $\dfrac{1}{4}$ は 1 より小さいから　$x>3$

(8)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\geqq27$ から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}\geqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$
底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$2x\leqq-3$
よって　$x\leqq-\dfrac{3}{2}$

別解　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\geqq27$ から　$3^{-2x}\geqq3^3$
底 3 は 1 より大きいから　$-2x\geqq3$
よって　$x\leqq-\dfrac{3}{2}$

9 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2^{3x-2}=128$　(2)　$125^{x-1}=\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-6}$　(3)　$3^{x-2}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

(4)　$243^x<3^{2x+3}$　(5)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$　(6)　$(0.2)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

解答　(1)　$x=3$　(2)　$x=3$　(3)　$x=\dfrac{1}{2}$　(4)　$x<1$　(5)　$x<-2$

(6)　$x\leqq\dfrac{5}{6}$

解説

(1)　$2^{3x-2}=128$ から　$2^{3x-2}=2^7$
よって　$3x-2=7$
これを解いて　$x=3$

(2)　$125^{x-1}=\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-6}$ から　$5^{3(x-1)}=5^{-2(x-6)}$
よって　$3(x-1)=-2(x-6)$
これを解いて　$x=3$

(3)　$3^{x-2}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ から　$3^{x-2}=3^{-\frac{3}{2}}$
よって　$x-2=-\dfrac{3}{2}$
これを解いて　$x=\dfrac{1}{2}$

(4)　$243^x<3^{2x+3}$ から　$3^{5x}<3^{2x+3}$
底 3 は 1 より大きいから　$5x<2x+3$
これを解いて　$x<1$

(5)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$
底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$5x+4<3x$
これを解いて　$x<-2$

(6)　$(0.2)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$ から　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$
よって　$5^{-(2x-1)}\geqq5^{-\frac{2}{3}}$
底 5 は 1 より大きいから　$-(2x-1)\geqq-\dfrac{2}{3}$
これを解いて　$x\leqq\dfrac{5}{6}$

10 次の方程式を解け。

(1)　$2^{x-1}=2\sqrt{2}$　(2)　$81^x=27^{2x+3}$
(3)　$9^x-4\cdot3^x+3=0$　(4)　$2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$
(5)　$27^{x+1}+26\cdot9^x-3^x=0$　(6)　$2^{3-\frac{x}{4}}+31\cdot2^{-\frac{x}{8}}-4=0$

解答　(1)　$x=\dfrac{5}{2}$　(2)　$x=-\dfrac{9}{2}$　(3)　$x=0,\ 1$　(4)　$x=-1,\ 1$　(5)　$x=-3$
(6)　$x=24$

解説

(1)　$2^{x-1}=2\sqrt{2}$ から　$2^{x-1}=2^{\frac{3}{2}}$
よって　$x-1=\dfrac{3}{2}$　ゆえに　$x=\dfrac{5}{2}$

(2)　$81^x=3^{4x}$，$27^{2x+3}=3^{3(2x+3)}$ から　$3^{4x}=3^{3(2x+3)}$
よって　$4x=3(2x+3)$　これを解いて　$x=-\dfrac{9}{2}$

(3)　方程式を変形して　$(3^x)^2-4\cdot3^x+3=0$
$3^x=t$ とおくと　$t>0$
方程式は　$t^2-4t+3=0$
因数分解すると　$(t-1)(t-3)=0$
よって　$t=1,\ 3$　ゆえに　$3^x=1,\ 3$
したがって　$x=0,\ 1$

(4)　$2^{2x+1}=2^{2x}\cdot2^1=2(2^x)^2$ であるから，方程式は
$2(2^x)^2-5\cdot2^x+2=0$
$2^x=t$ とおくと　$t>0$
方程式は　$2t^2-5t+2=0$
因数分解すると　$(2t-1)(t-2)=0$
よって　$t=\dfrac{1}{2},\ 2$　ゆえに　$2^x=\dfrac{1}{2},\ 2$

したがって　$x=-1,\ 1$

(5)　$27^{x+1}=27^x\cdot 27^1=27(3^x)^3$，$9^x=(3^x)^2$ であるから，方程式は

$$27(3^x)^3+26(3^x)^2-3^x=0$$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$27t^3+26t^2-t=0$

因数分解すると　$t(t+1)(27t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=\dfrac{1}{27}$

よって　$3^x=\dfrac{1}{27}$

したがって　$x=-3$

(6)　$2^{3-\frac{x}{4}}=2^3\cdot 2^{-\frac{x}{4}}=8\left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^2$ であるから，方程式は

$$8\left(2^{-\frac{x}{8}}\right)^2+31\cdot 2^{-\frac{x}{8}}-4=0$$

$2^{-\frac{x}{8}}=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$8t^2+31t-4=0$

因数分解すると　$(t+4)(8t-1)=0$

$t>0$ であるから　$t=\dfrac{1}{8}$

よって　$2^{-\frac{x}{8}}=2^{-3}$

ゆえに　$-\dfrac{x}{8}=-3$　すなわち　$x=24$

$\boxed{11}$ 方程式 $\left(\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)^2=2\sqrt{2^{x-3}}$ の解は，$x=\boxed{}$

解答　1

解説

$$\left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^2=(2^{-x+1})^2=2^{-2x+2}$$

$$2\sqrt{2^{x-3}}=2\cdot(2^{x-3})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$

よって　$-2x+2=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$x=1$